INVARIANZA PER CAMBIAMENTO DI COORDINATE

Sistema vincolato $\quad \bar{r}_i(\bar{q}, t) \rightsquigarrow \bar{v}_i(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$

abbiamo fatto una SCELTA di COORDINATE in Q

"Mettiamo queste funzioni" dentro $T(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_N)$ e $V(\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_N)$

$\rightsquigarrow L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \rightsquigarrow$ eq. del moto (eq. di Lagrange)

- La scelta di coordinate per Q è ARBITRARIA

posso scegliere $\{q_h\}$ o $\{\tilde{q}_h\}$ (diversi sistemi di coord)

$\{q_h\} \longleftarrow$ TASFORMAZ. di COORD. $q_h = q_h(\tilde{\bar{q}}, t) \longrightarrow \{\tilde{q}_h\}$

$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_h, t) \qquad\qquad \bar{r}_i = \bar{r}_i(\tilde{q}_h, t)$

$L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \qquad\qquad \tilde{L}(\tilde{\bar{q}}, \dot{\tilde{\bar{q}}}, t)$ $\longleftarrow$ Espressione analitica della Lagrangiana è diversa nei due sist. di coord

eq. del moto (eq. diff. nelle $q_h(t)$) $\qquad\qquad$ eq. del moto (eq. diff. nelle $\tilde{q}_h(t)$)

Solut. $q_h(t)$ $\qquad\qquad$ Solut. $\tilde{q}_h(t)$

$\bar{r}_i(t) \equiv \bar{r}_i(\bar{q}(t), t) \qquad\qquad \bar{r}_i(t) \equiv \bar{r}_i(\tilde{\bar{q}}(t), t)$

$=$

$$\Longrightarrow \quad \bar{q}(t) = \bar{q}(\tilde{\bar{q}}(t), t)$$

Es) Pto materiale vincolato su un piano e legato all'origine con una molla di lungh. a riposo nulla e $k = m\omega^2$.

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Coord. cartesiane

$$x = q_1 \qquad y = q_2 \qquad z = 0 \qquad \bar{r}_i(\bar{q})$$

Coord. polari

$$x = \tilde{q}_1 \cos\tilde{q}_2 \qquad y = \tilde{q}_1 \operatorname{sen}\tilde{q}_2 \qquad z = 0 \qquad \bar{r}_i(\tilde{\bar{q}})$$

Trasf. di coord.:

$$q_1 = \tilde{q}_1 \cos\tilde{q}_2 \qquad q_2 = \tilde{q}_1 \operatorname{sen}\tilde{q}_2 \qquad \leftarrow \quad \bar{q} = \bar{q}(\tilde{\bar{q}})$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \qquad V = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) \qquad \leftarrow T(\bar{v}), V(\bar{r})$$

$$L(\bar{q},\dot{\bar{q}},t) = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{m\omega^2}{2}(q_1^2+q_2^2)$$

$$\tilde{L}(\tilde{\bar{q}},\dot{\tilde{\bar{q}}},t) = \frac{m}{2}(\dot{\tilde{q}}_1^2 + \tilde{q}_1^2\dot{\tilde{q}}_2^2) - \frac{m\omega^2}{2}\tilde{q}_1^2$$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}$ $\qquad \frac{\partial L}{\partial q_1}$

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 = -m\omega^2 q_1 \\ m\ddot{q}_2 = -m\omega^2 q_2 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_1} = m\ddot{\tilde{q}}_1 \qquad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_1} = m\tilde{q}_1\dot{\tilde{q}}_2^2 - m\omega^2\tilde{q}_1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_2} = \frac{d}{dt}\left(m\tilde{q}_1^2\dot{\tilde{q}}_2\right) = 2m\tilde{q}_1\dot{\tilde{q}}_1\dot{\tilde{q}}_2 + m\tilde{q}_1^2\ddot{\tilde{q}}_2 \qquad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_2} = 0$$

$$\begin{cases} m\ddot{\tilde{q}}_1 = m\tilde{q}_1\dot{\tilde{q}}_2^2 - m\omega^2\tilde{q}_1 \\ m\tilde{q}_1^2\ddot{\tilde{q}}_2 + 2m\tilde{q}_1\dot{\tilde{q}}_1\dot{\tilde{q}}_2 = 0 \end{cases}$$

Soluz. $\qquad q_1(t) \quad q_2(t)$

Soluz. $\qquad \tilde{q}_1(t) \quad \tilde{q}_2(t)$

$$q_1(t) = \tilde{q}_1(t)\cos\tilde{q}_2(t)$$
$$q_2(t) = \tilde{q}_1(t)\operatorname{sen}\tilde{q}_2(t)$$

Trasf. di coord.

$$q_h = q_h(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n, t) \qquad \text{t.c.} \qquad \det\left(\frac{\partial q_h}{\partial \tilde{q}_k}\right) \neq 0 \qquad (\star)$$

$$\dot{q}_h = \dot{q}_h(\tilde{\bar{q}}, \dot{\tilde{\bar{q}}}, t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q_h}{\partial \tilde{q}_k} \dot{\tilde{q}}_k + \frac{\partial q_h}{\partial t}$$

Prop. Dato un sist. Lagrangiano con Lagrangiana $L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$, si consideri il camb. di coord. (regolare e invertibile) $(\star)$ e sia $\tilde{L}(\tilde{\bar{q}}, \dot{\tilde{\bar{q}}}, t)$ la Lagrangiana ottenuta da L in SOSTITUZIONE di $(\star)$, cioè

$$\tilde{L}(\tilde{\bar{q}}, \dot{\tilde{\bar{q}}}, t) \equiv L(\bar{q}(\tilde{\bar{q}}, t), \dot{\bar{q}}(\tilde{\bar{q}}, \dot{\tilde{\bar{q}}}, t), t) \qquad (\circ)$$

Allora $\tilde{\bar{q}}(t)$ è soluzione delle eq. di Lagrange con Lagr. $\tilde{L}$ SE E SOLO SE $\bar{q}(t)$ è solut. delle eq. di Lag. con Lag. L.

Dim.

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} \overset{(\circ)}{=} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} \overset{(\star)}{=} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \cancel{\sum_{k=1}^{n}} \frac{\partial q_l}{\partial \tilde{q}_k} \underbrace{\frac{\partial \dot{\tilde{q}}_k}{\partial \dot{\tilde{q}}_h}}_{\delta_{kh}}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial q_l}{\partial \tilde{q}_h}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} = \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right) \frac{\partial q_l}{\partial \tilde{q}_h} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_l}{\partial \tilde{q}_h}(\tilde{\bar{q}}(t), t)$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial^2 q_l}{\partial \tilde{q}_h \partial \tilde{q}_m} \dot{\tilde{q}}_m + \frac{\partial^2 q_l}{\partial \tilde{q}_h \partial t} =$$

$f(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t)$ valutata in $\tilde{q}(t)$

$$= \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_h} \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial q_l}{\partial \tilde{q}_m} \dot{\tilde{q}}_m + \frac{\partial q_l}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial \tilde{q}_h} \dot{q}_l$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l}\right) \frac{\partial q_l}{\partial \tilde{q}_h} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \tilde{q}_h} \right]$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} = \sum_{\ell=1}^{m} \left[\frac{\partial L}{\partial q_\ell} \frac{\partial q_\ell}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} \frac{\partial \dot{q}_\ell}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} \right]$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_h} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}_h}}_{\substack{\text{eq. di Lagr. di } \tilde{L} \\ (\tilde{*})}} = \overbrace{\sum_{\ell=1}^{m} \underbrace{\left(\frac{\partial q_\ell}{\partial \tilde{q}_h}\right)}_{\substack{\equiv J_{h\ell} \\ \text{invertibile}}} \Bigg[\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} - \frac{\partial L}{\partial q_\ell}}_{\substack{\text{eq. di Lagr. di } L \\ (*)}} \Bigg]}^{\sum_\ell J_{h\ell} V_\ell} \qquad h=1,\dots,m$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\ell} - \frac{\partial L}{\partial q_\ell} \equiv V_\ell$$

Se $(*)$ sono sodd. $\forall \ell \Longrightarrow (\tilde{*})$ sono soddisf. $\forall h$ (manifesto)

Se $(\tilde{*})$ sono sodd. $\forall h \Rightarrow \sum_{\ell=1}^{m} J_{h\ell} V_\ell = 0 \Leftrightarrow J \cdot \bar{V} = 0$

$\xRightarrow[J \text{ invertibile}]{}$ $(*)$ sono sodd. $\forall \ell$

(moltiplichiamo a destra e sinistra per J^{-1}) //

Diverse Lagrangiane possono portare alle stesse eq. del moto.

__Prop.__ Per ogni scelta della funzione $F(\bar{q},t)$ e della cost. $c \neq 0$, la Lagrangiana $L(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)$ e la Lagrangiana

$$L'(\bar{q},\dot{\bar{q}},t) = c\, L(\bar{q},\dot{\bar{q}},t) + \varphi(\bar{q},\dot{\bar{q}},t),$$

$$\text{dove } \varphi(\bar{q},\dot{\bar{q}},t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial t},$$

"derivata totale" $\bar{\varphi}(\bar{q}(t),\dot{\bar{q}}(t),t) = \frac{d}{dt}F(\bar{q}(t),t)$

conducono alle stesse eq. di Lagrange.

"Lagrangiane che differiscono per una DERIVATA TOTALE (in t) sono (classicam.) EQUIVALENTI"

Dim.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot q_h} = c\,\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h} + \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial \dot q_h}}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q_h} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial q_h \partial q_l}\dot q_l + \cancel{\frac{\partial^2 F}{\partial q_h \partial t}}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_h} = c\,\frac{\partial L}{\partial q_h} + \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial q_h}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial q_h \partial q_k}\dot q_k + \cancel{\frac{\partial^2 F}{\partial q_h \partial t}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial L'}{\partial q_h} = c\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h}\right) \quad //$$

$c \neq 0$

POTENZIALI DIPENDENTI DA VELOCITÀ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \qquad (\neq)$$

$$\text{se } Q_h = -\frac{\partial V}{\partial q_h} \qquad L = T - V$$

Ci si può ridurre alla forma $(\neq)$ anche nel caso più generale in cui

$$Q_h = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot q_h} - \frac{\partial V}{\partial q_h} \qquad \text{con } V = V(\bar q, \dot{\bar q}, t)$$

ES| FORZA DI CORIOLIS

(Forza apparente in un sist. di rif. rotante con $\bar\omega$ che poi prendiamo COST.)

$$\bar F = 2m\,\dot{\bar q} \times \bar\omega$$

(Forza centrifuga è puram. posizionale da

$$V_c(\bar q) = -\frac{1}{2} m \omega^2 d^2(\bar q)$$

distanza da asse di rotaz.)

Prodotto vett. in $\mathbb{R}^3$

$$\bar v \times \bar u = \bar e_1 (v_2 u_3 - v_3 u_2) + \bar e_2 (v_3 u_1 - v_1 u_3) + \bar e_3 (v_1 u_2 - v_2 u_1) =$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det\begin{pmatrix} \bar e_1 & v_1 & u_1 \\ \bar e_2 & v_2 & u_2 \\ \bar e_3 & v_3 & u_3 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}\, \bar e_i\, v_j\, u_k$$

tensore totalm. antisimm.

$(\Rightarrow \epsilon_{iij} = 0) \qquad \epsilon_{123} = 1$

$$\left(\epsilon_{123} = 1 \to \epsilon_{213} = -1 \to \epsilon_{231} = 1 \to \right.$$
$$\left. \to \epsilon_{321} = -1 \right)$$

Prop. La forza di Coriolis con $\bar{\omega}$ cost. si ricava attraverso

$$F_h = \frac{d}{dt}\frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V_1}{\partial q_h} \quad \text{con} \quad V_1(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = -m(\dot{\bar{q}} \times \bar{\omega}) \cdot \bar{q}$$

Dim.

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \left(\sum_{ijk} \overset{\epsilon_{ijk}}{\bar{e}_i}\, a_j b_k \right) \cdot \left(\sum_{\ell} c_\ell \bar{e}_\ell \right) =$$

$$= \sum_i \left(\sum_{jk} a_j \overset{\epsilon_{ijk}}{b_k} \right) c_i =$$

$$= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}\, a_j b_k c_i = \sum_{ijk} \epsilon_{kij}\, b_k c_i a_j =$$

$$= \sum_j \left(\sum_{ki} \epsilon_{jki} b_k c_i \right) a_j = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} =$$

$$= \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$$

$$V_1 = -m(\dot{\bar{q}} \times \bar{\omega}) \cdot \bar{q} = -m\, \dot{\bar{q}} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{q})$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial q_h} = -m(\dot{\bar{q}} \times \bar{\omega})_h$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_h} = -m(\bar{\omega} \times \bar{q})_h \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_h} = -m(\bar{\omega} \times \dot{\bar{q}})_h = m(\dot{\bar{q}} \times \bar{\omega})_h$$

$$F_h = \frac{d}{dt}\frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial V_1}{\partial q_h} = 2m(\dot{\bar{q}} \times \bar{\omega})_h \qquad //$$

$L = T - V_c - V_1$

forza centrifuga

forza Coriolis

en cinetica in coord $\bar{q}$ solidali al sistema di rif. rotante

In un sist. di rif. inerziale con coord x, y, z

$$L = T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Trasf. di coord.:

$$x = q_1 \cos\omega t - q_2 \operatorname{sen}\omega t \qquad \leftarrow x = x(\bar{q}, t)$$

$$y = q_1 \operatorname{sen}\omega t + q_2 \cos\omega t \qquad \vdots$$

$$z = q_3$$

$$\tilde{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = L(x(\bar{q},t), y(\bar{q},t), z(\bar{q},t), \dot{x}(\bar{q},\dot{\bar{q}},t), \dot{y}(\bar{q},\dot{\bar{q}},t), \dot{z}(\bar{q},\dot{\bar{q}},t), t)$$

$$\dot{x} = \dot{q}_1 \cos\omega t - \dot{q}_2 \operatorname{sen}\omega t - q_1 \omega \operatorname{sen}\omega t - q_2 \omega \cos\omega t$$

$$\dot{y} = \dot{q}_1 \operatorname{sen}\omega t + \dot{q}_2 \cos\omega t + q_1 \omega \cos\omega t - q_2 \omega \operatorname{sen}\omega t$$

$$\dot{z} = \dot{q}_3$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) =$$

$T(\dot{q})$ en. cin. nel sist. rotante

$-V_c(\bar{q})$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{m\omega^2}{2} (\underbrace{q_1^2 + q_2^2}) +$$

↳ dist. dall'asse z

$$\underbrace{+\, m\omega\,(\underbrace{q_1\dot{q}_2 - q_2\cdot\dot{q}_1}_{(\bar{q}\times\dot{\bar{q}})_3})} \qquad \bar{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$m\bar{\omega}\cdot(\bar{q}\times\dot{\bar{q}}) = -m\bar{\omega}\cdot(\dot{\bar{q}}\times\bar{q}) =$$

$$= -m\,(\bar{\omega}\times\dot{\bar{q}})\cdot\bar{q} = -V_1(\bar{q},\dot{\bar{q}})$$