SISTEMI DINAMICI

30 marzo 2021

$$\varphi^{t} : M \longrightarrow M$$
$$x_0 \longrightarrow x(t; x_0)$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t)) \longrightarrow$$ sistema dinamico continuo

Sistemi dinamici discreti

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ iterato $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n\text{-volte}}$

processo che prende uno stato iniziale x_0 ($\in \mathbb{R}$) e lo trasforma in $x_1 = f(x_0)$.

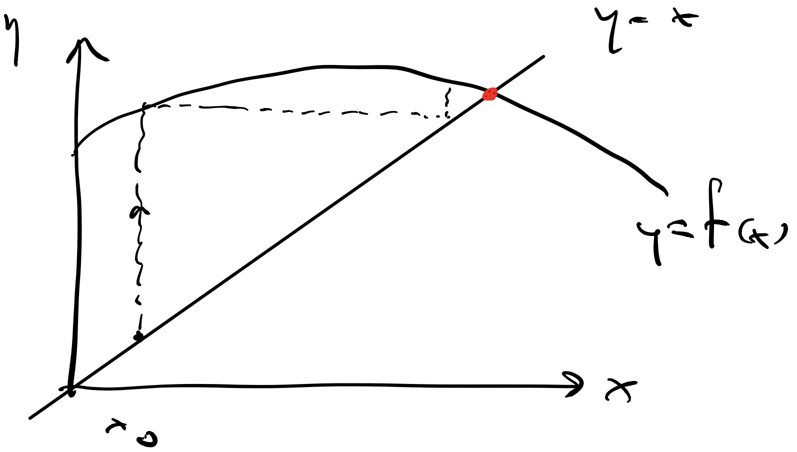
$x_2 = f(x_1) = f^2(x_0)$ ..... possiamo definire un'orbita $O = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$

Punti fissi $f(x_0) = x_0$ (orbita $x_0, x_0, x_0 \dots$)

n-cicli $\quad f^n(x_0) = x_0 \quad$ (analogo di un'orbita periodica)

orbita : $\quad x_0, x_1, x_2, \dots, x_0$

Modo di visualizzare le orbite



iterazione grafica

Sistemi dinamici discreti $\longrightarrow$ biforcazioni

$$f_\lambda \longrightarrow f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1 \rightsquigarrow$$ analogo di punto iperbolico

Continui $\quad \dot{x} = G(x,\mu) \to G(x^*,\mu^*) = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial x} \neq 0 \to$$ teo funzione implicita

Discreti $\quad g(x,\mu) = f_\mu(x) - x$

punto fisso $\quad g(x^*,\mu^*) = f_{\mu^*}(x^*) - x^* = 0$

$$\frac{\partial g}{\partial x} \neq 0 \longrightarrow f'_{\mu^*}(x^*) - 1 \neq 0$$

e allora usiamo il teorema

delle funzioni implicite

Modello logistico discreto

$$\left\{ \dot{N} = r N \left(1 - \frac{N}{k}\right) \right\}$$

$$\hookrightarrow \quad x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$$

Consideriamo questo modello su $I = [0,1]$

$$f_\lambda(x) = \lambda x (1 - x)$$

4

Due punti fissi $x = 0$, $x_\lambda = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$

Oggi vediamo $\lambda = 4$

Notiamo che $f'_\lambda(x) = \lambda(1 - 2x)$

$$f'_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \lambda(1-2x)\Big|_{x=\frac{1}{2}} = 0 \quad \forall \lambda$$

$x = \frac{1}{2}$ è un max di f_λ

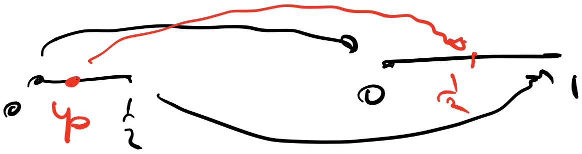
Se $\lambda = 4$ $\quad f_4\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

Siccome $f_4(1) = 0$, $\quad f_4^2\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

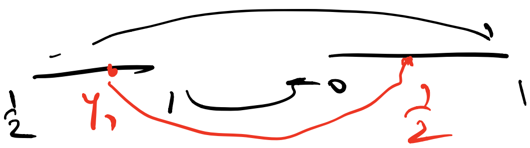
Quindi $f_4(0)=0$, $f_4(\frac{1}{2})=1$, $f_4(1)=0$

Allora

$$f_4\left(\left[0,\tfrac{1}{2}\right]\right) = I$$



$$f_4\left(\left[\tfrac{1}{2},1\right]\right) = I$$



Entrambi $[0,\frac{1}{2}]$ e $[\frac{1}{2},1]$ vengono mandati in I. In particolare $\exists\, y_0 \in [0,\frac{1}{2}]$ e $y_1 \in [\frac{1}{2},1]$ t.c. $f_4(y_0)=f_4(y_1)=\frac{1}{2}$

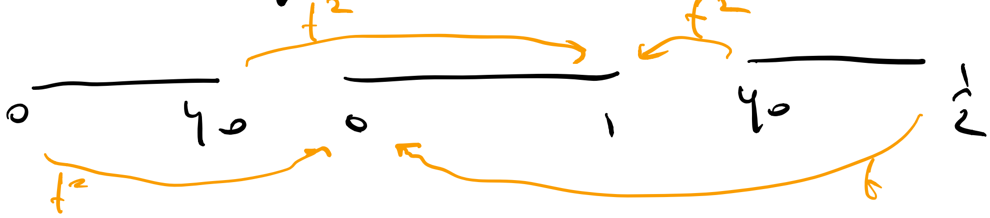
Segue, siccome $f_4(\frac{1}{2})=1$, abbiamo che

$$f_4^2(y_0) = f_4\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

$$f_4^2(y_1) = f_4\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

Quindi anche

$$f_4^2([0,y_0]) = f_4^2\left(\left[y_0,\tfrac{1}{2}\right]\right) = I$$

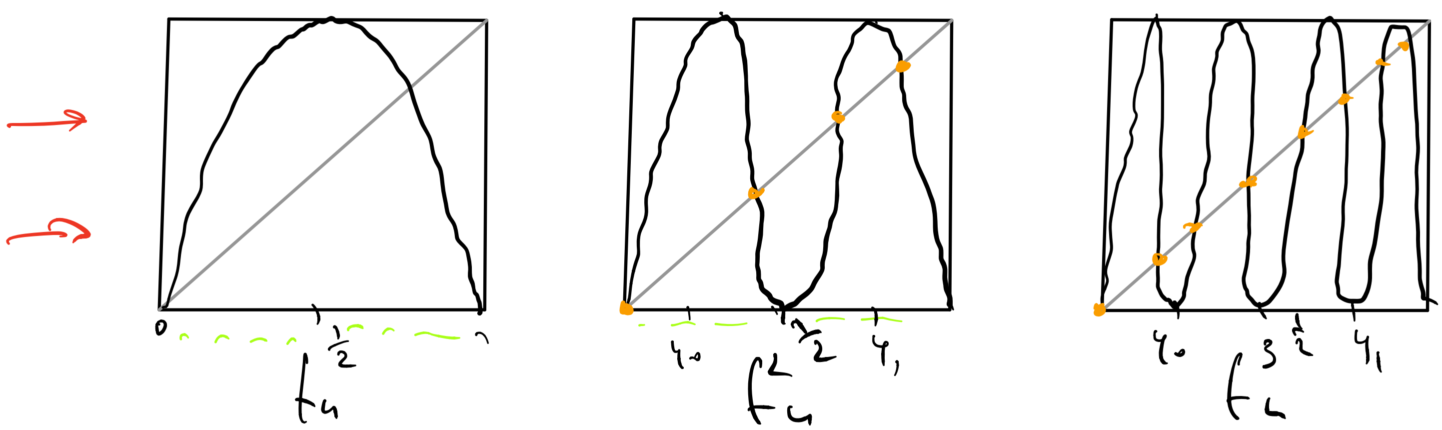


$$f_4^2\left(\left[\tfrac{1}{2}, q_1\right]\right) = f_4^2\left(\left[q_1, 0\right]\right) = I$$

Cioè ho trovato $2^2 = 4$ intervalli che f_4^2 mandano in I

Allo stesso modo, f_4^3 mando 2^3 intervalli in tutto I, ...; in generale l'n-esimo iterazione f_4^n 2^n intervalli in tutto I

Graficamente



2 punti fissi: $0, \frac{3}{4}$

4 punti fissi: $0, \frac{3}{4}$, e due 2-cicli di f_4

8 punti fissi: $0, \frac{3}{4}, \ldots$

(punto fisso di f^n, che non è punto fisso di f, è un n-ciclo di f, $f^n(x_0) = x_0$)

<u>Def.</u> Supponiamo di avere una funzione

f definita su $I = [\alpha, \beta]$, che manda I in I. Diciamo che f è caotica se:

1) I punti periodici di f sono densi in I

2) la funzione f è <u>transitiva</u>. Cioè dati $U_1, U_2 \subset I$, $\exists\, x_0 \in U_1$ e $n > 0$ tale che $f^n(x_0) \in U_2$.

3) f è sensibile rispetto alle condizioni iniziali in I: $\exists$ costante β (di sensibilità) tale che per $x_0 \in U \subset I$ $\exists\, y_0 \in U$ e $n > 0$ tali che

$$|f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \beta$$

Attenzione! $\exists$ definizioni diverse (e def. diverse nel caso continuo).

Seconda parte

Sistemi din. discreti $\to$ iterazione di f

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$$

$$\lambda = 4$$

Mappa a Tenda

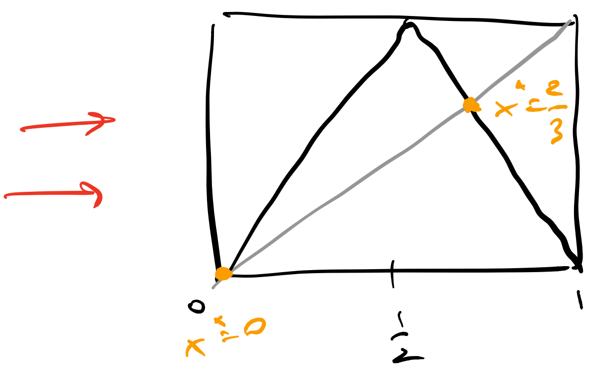
Definiamo

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -2x+2 & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Punti fissi: $x = T(x)$

per $x \in [0, \frac{1}{2}]$ $\quad x = T(x) = 2x \longrightarrow x^* = 0$

per $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ $\quad x = T(x) = 2(1-x) \longrightarrow x^* = \frac{2}{3}$



T manda $[0, \frac{1}{2}]$ e $[\frac{1}{2}, 1]$ in tutto I

Vediamo T^2: $\quad T^2(x) = T(T(x))$

$$= \begin{cases} 2(2x) & 0 \leq 2x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-2x) & \frac{1}{2} \leq 2x \leq 1 \\ 2 \cdot [2(1-x)] & 0 \leq 2(1-x) \leq \frac{1}{2} \\ 2[1 - 2(1-x)] & \frac{1}{2} \leq 2(1-x) \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4x & 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ 2-4x & \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2} \\ -2+4x & \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4} \\ 4-4x & \frac{3}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$

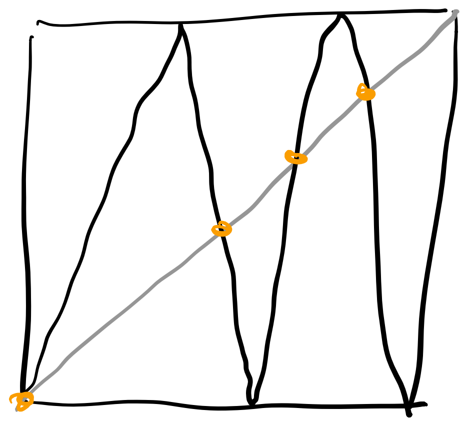
Punti fissi di T^2 : $T^2(x) = x$

$4x = x \rightarrow x^* = 0$ ← pti fissi di T

$2-4x = x \rightarrow x^* = \frac{2}{5}$

$-2+4x = x \rightarrow x^* = \frac{2}{3}$ ← pti fissi di T

$x = 4-4x \rightarrow x^* = \frac{4}{5}$

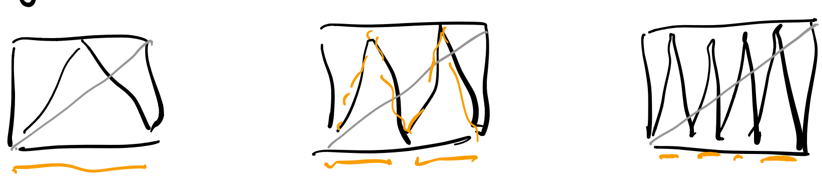


T^2

$x^* = \frac{2}{5}, \frac{4}{5}$ sono punti periodici di T con periodo 2. In generale T^n ha 2^n punti fissi che sono punti periodici di T.

<u>Teorema</u> : T è caotica.

Graficamente vediamo



- - - -

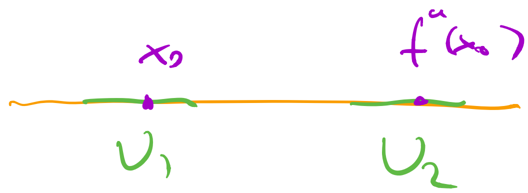
T^n manda gli intervalli $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ per $k = 0, \dots, 2^n - 1$ in tutto I.

T^n interseca la diagonale in ogni intervallo

$\rightarrow$ ogni intervallo contiene un punto periodico di T

Siccome questi intervalli sono lunghi $\frac{1}{2^n}$ i punti periodici di T sono densi in I.

Vediamo la transitività.



aspettando un tempo n

Allora: prendiamo U_1 e U_2 aperti in I

L'intervallo U_1 contiene un intervallo della forma $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ per n grande abbastanza

Stesso argomento dimostra la sensibilità ai dati iniziali (ad esempio $p = \frac{1}{2}$) $\blacksquare$

Introduciamo il concetto di <u>coniugazione</u>

Consideriamo due intervalli: I, J.

Prendiamo

$$f : I \longrightarrow I \, , \qquad g : J \longrightarrow J$$

Diciamo che f e g sono <u>coniugate</u>

se $\exists$ h omeomorfismo (= continua, biunivoca e con inversa continua)

$$h : I \longrightarrow J$$

Tale che $h \circ f = g \circ h$. Si dice

che il diagramma

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & I \arrow[d, "h"] \\ J \arrow[r, "g"] & J \end{tikzcd}$$

commuta.

In particolare h porta orbite di f

e orbite di g. Siccome $h(f^n(x)) = g^n(h(x))$

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & I \arrow[d, "h"'] & \cdots \\
J \arrow[r, "g"'] & J \arrow[r, "g"'] & J \arrow[r, "g"'] & J & \cdots
\end{tikzcd}
$$

... h manda il punto n-esimo dell'orbita di f nel punto n-esimo dell'orbita di g.

L'importanza della coniugazione viene dal

<u>Teorema</u> Siano $f: I \to I$, $g: J \to J$ e supponiamo che siano coniugate da h. Allora f caotico in $I \Rightarrow g$ caotico in J.