INTEGRALE SUI CAMMINI [S.14, M.9]

La formula di riduzione di LSZ ci dice come ottenere gli elementi di matrice S $\quad S_{i\to f} = {}_{out}\langle f | i \rangle_{in}$
a partire da funzioni di Green $\langle 0 | T\{\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)\} | 0 \rangle$.

Queste possono essere calcolate nel formalismo di seconda quantizzazione, per esempio in teoria delle perturbazioni:

$$\langle 0 | T\{\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)\} | 0 \rangle = \frac{\langle 0 | T\{\varphi_I(x_1)\dots\varphi_I(x_n)\exp\left[-i\int d^4x\, \mathcal{H}_I(x)\right]\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T\{\exp\left[-i\int d^4x\, \mathcal{H}_I(x)\right]\} | 0 \rangle}$$

e calcolando diagrammi di Feynman usando il teorema di Wick.
$\Rightarrow$ Argomenti di QFT 1.

Un modo ALTERNATIVO di quantizzare la teoria è chiamato formalismo dell'integrale sui cammini.

$$\langle 0 | T\{\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)\} | 0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\varphi\; \varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)\, e^{iS[\varphi]}}{\int \mathcal{D}\varphi\; e^{iS[\varphi]}}$$

- $\int \mathcal{D}\varphi$ indica l'integrale su tutte le CONFIGURAZIONI DI CAMPO CLASSICHE $\varphi(x)$.
- $S[\varphi]$ è l'azione classica valutata sulla configurazione φ.

INTEGRALI GAUSSIANI

Calcoliamo $\quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \; e^{-\frac{1}{2}ap^2 + Jp}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dp \; \exp\left(-\frac{1}{2}a\left(p - \frac{J}{a}\right) + \frac{J^2}{2a}\right) \qquad \leftarrow \text{completiamo il quadrato}$$

$$= e^{J^2/2a} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \; \exp\left(-\frac{1}{2}ap^2\right) \qquad \leftarrow \text{trasliamo } p \to p + \frac{J}{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} e^{J^2/2a} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \; \exp\left(-\frac{1}{2}p^2\right) \qquad \leftarrow \left[p \to \frac{p}{\sqrt{a}}, \quad dp \to \frac{dp}{\sqrt{a}}\right]$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dp \; \exp\left(-\frac{1}{2}p^2\right)\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,dy \; e^{-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,dy \; e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} =$$

$$= \int_0^{\infty} r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta \; e^{-\frac{1}{2}r^2} = 2\pi \int_0^{\infty} r\,dr \; e^{-\frac{1}{2}r^2} = \pi \int_0^{\infty} dr^2 \; e^{-\frac{1}{2}r^2} = 2\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \; e^{-\frac{1}{2}ap^2 + Jp} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \; e^{\frac{J^2}{2a}}}$$

Per più dimensioni e p complessi: $ap^2 \to p_i a_{ij} p_j = \vec{p} A \vec{p}$
dove A è una matrice simmetrica

Diagonalizzando $\quad A = R \lambda R^{-1} \quad$ e definendo $\quad \vec{p} \to R\vec{p}' \quad \det R = 1$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{p} \; \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{p}^T A \vec{p} + \vec{J}^T \cdot \vec{p}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{p}' \exp\left(-\frac{1}{2}\underbrace{\vec{p}'^T \lambda \vec{p}'}_{= p_i'^2 \lambda_i} + \underbrace{(\vec{J}^T R)\vec{p}'}_{J_i' p_i'}\right)$$

diventa un prodotto di integrali 1D:

$$I = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}} \; \exp\left(\frac{1}{2}\vec{J}^T A^{-1} \vec{J}\right) \quad , \quad n \text{ è la dimensione di } \vec{p}.$$

MECCANICA QUANTISTICA COME INTEGRALE SUI CAMMINI

Consideriamo un sistema quantistico in 1D, non relativistico, con Hamiltoniana $\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}, t)$. $\hat{H}, \hat{p}, \hat{x}$: operatori

Se lo stato iniziale $|i\rangle$ è localizzato a x_i al tempo t_i
e lo " finale $|f\rangle$ " a x_f " t_f

Se $\hat{H}(\hat{x}, t) = \hat{H}(x)$ (t-indipendente)

$|i(t_i)\rangle = |x_i\rangle$
$|f(t_f)\rangle = |x_f\rangle$

Lo stato $|i\rangle \equiv |x_i, t_i\rangle$ evolve in

$$U(t_f, t_i)\,|i\rangle = e^{-i(t_f - t_i)\hat{H}}\,|i\rangle$$

L'ampiezza di transizione sarà data da:

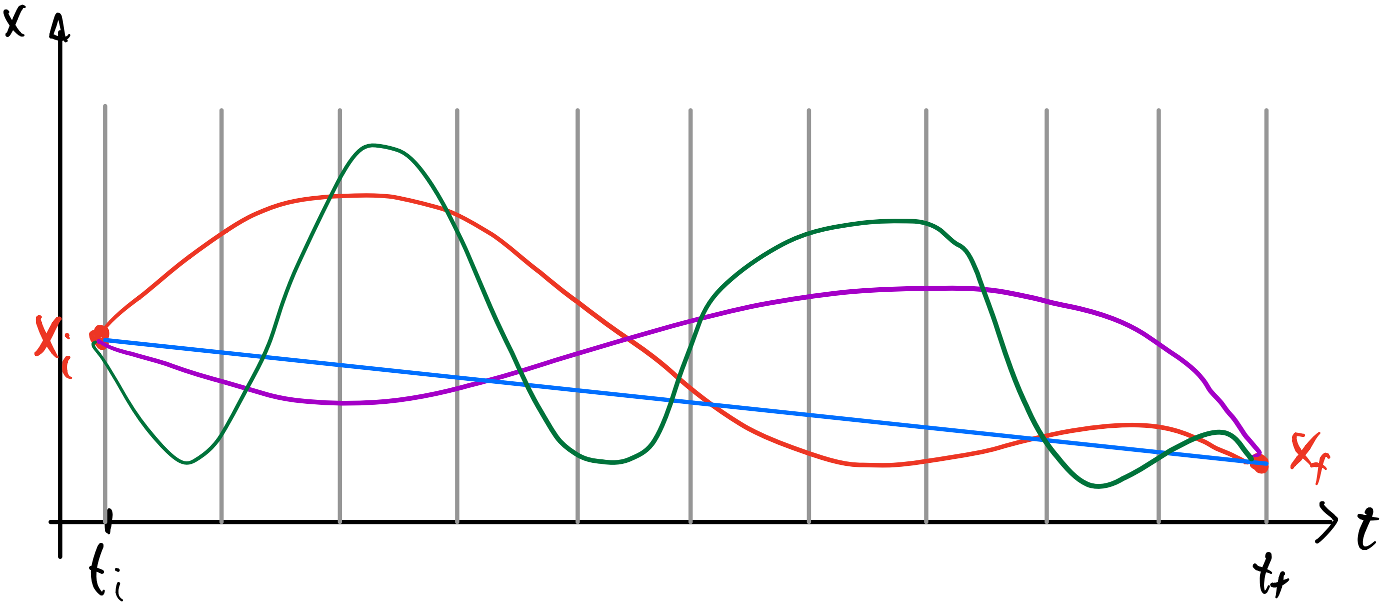
$$\langle f | i \rangle = \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \langle x_f, t_f | e^{-i(t_f - t_i)\hat{H}} | x_i, t_f \rangle$$ [Sakurai, 2.2.47]

↳ Calcolabile se conosciamo una base di autostati di $\hat{H}$.

- Se $\hat{H}(x) \to \hat{H}(x, t)$ | | |

Se $\hat{H}$ dipende in maniera continua da t possiamo fare la stessa cosa ma per intervalli di tempo infinitesimi δt.
Dividiamo $t_f - t_i$ in $(n+1)$ intervalli δt: $t_j = t_i + j\delta t$, $t_{n+1} = t_f$

$$\langle f | i \rangle = \int dx_n \ldots dx_1 \, \langle x_f | e^{-iH(t_f)\delta t} | x_n \rangle \langle x_n | \ldots \, | x_2 \rangle \langle x_2 | e^{-iH(t_2)\delta t} | x_1 \rangle \langle x_1 | e^{-iH(t_1)\delta t} | x_i \rangle$$



Assumiamo V non dipende da p

Per ogni intervallo δt:

$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx}$

$$\langle x_{j+1}| e^{-iH\delta t} |x_j\rangle = \int \frac{dp}{2\pi} \langle x_{j+1}|p\rangle\langle p| e^{-i\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}, t_j)\right)\delta t} |x_j\rangle =$$

usiamo: Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\delta t} e^{-i\hat{V}\delta t} = e^{-i\left(\frac{\hat{p}^2}{2m}+\hat{V}\right)\delta t - \frac{1}{2}\left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \hat{V}\right]\delta t^2 + \dots} \simeq e^{-i\left(\frac{\hat{p}^2}{2m}+\hat{V}\right)\delta t + O(\delta t^2)}$$

$$= e^{-iV(x_j, t_j)\delta t} \int \frac{dp}{2\pi} e^{-i\frac{p^2}{2m}\delta t + ip(x_{j+1}-x_j)}$$

usiamo l'integrale Gaussiano

$$= N\, e^{-iV(x_j,t_j)\delta t}\, e^{i\frac{m}{2}\delta t \frac{(x_{j+1}-x_j)^2}{(\delta t)^2}} = N\, e^{iL(x_j, \dot{x}_j)\delta t}$$

Normalizzazione

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x,t) \leftarrow \text{Lagrangiana}$$

L'integrale Gaussiano ha effettuato una trasformata di Legendre da H a L.

$$\Rightarrow \langle f|i\rangle = N^n \int dx_n \dots dx_1 \exp\left(i \sum_j \delta t \, L(x_j, \dot{x}_j)\right)$$ tutto classico nel r.h.s.

Nel limite $\delta t \to 0$ si ha

$$\langle f|i\rangle = \mathcal{N} \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}x(t) \; e^{iS[x]}$$

- $\int \mathcal{D}x(t)$ indica la somma su tutti i cammini con le corrette condizioni al contorno

- $S[x] = \int_{t_i}^{t_f} dt \, L(x(t), \dot{x}(t))$ è l'azione calcolata su ciascun cammino

LIMITE CLASSICO

Dobbiamo reintrodurre $\hbar$. Dato che $[\hbar]$ = azione

$$\langle f|i\rangle = \mathcal{N} \int_{x(t_i)=x_i}^{x(t_f)=x_f} \mathcal{D}x(t) \; e^{iS[x]/\hbar}$$

Nel limite $\hbar \to 0$ possiamo usare il PRINCIPIO DI FASE STAZIONARIA (method of stationary phase or steepest descent method) per il quale l'integrale è completamente dominato dalla CONFIGURAZIONE CHE MINIMIZZA L'AZIONE (tutte le altre oscillano infinitamente più veloci e si integrano a zero)

$$\frac{\delta S}{\delta x} = 0$$ ← equazioni del moto classiche

In più dimensioni: $\vec{x} = \{x_j\}$

$$\langle f | i \rangle = \langle \vec{x}_i, t_i | \vec{x}_f, t_f \rangle = N \int_{\vec{x}(t_i)=\vec{x}_i}^{\vec{x}(t_f)=\vec{x}_f} \prod_j [\mathcal{D} x_j(t)] \; e^{i S[\vec{x}]/\hbar}$$

Possiamo anche calcolare l'elemento di matrice di un [I2.9.2.1] operatore:

$$\langle x_f, t_f | \mathcal{O}(t) | x_i, t_i \rangle = \langle x_f | e^{-i\hat{H}(t_f - t)} \mathcal{O} \, e^{-i H(t - t_i)} | x_i \rangle$$

$$= \int dx' dx'' \; \langle x_f | e^{-i\hat{H}(t_f - t)} | x' \rangle \langle x' | \mathcal{O} | x'' \rangle \langle x'' | e^{-iH(t - t_i)} | x_i \rangle$$

$$= \int dx' dx'' \int_{x'}^{x_f} \mathcal{D}(x) \, e^{iS[x]} \; \langle x' | \mathcal{O} | x'' \rangle \int_{x_i}^{x''} \mathcal{D}(x') \, e^{iS[x']}$$

Assuming $\langle x' | \mathcal{O} | x'' \rangle = \mathcal{O}(x') \, \delta(x' - x'')$ OPERATORE LOCALE

$$= \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}(x) \, e^{iS[x]} \, \mathcal{O}(x(t))$$

COME APPARE IL T-PRODOTTO

$$\int_{x_i}^{x_f} Dx \quad e^{iS[x]} \; \vartheta(x(t_1)) \; \vartheta'(x(t_2)) =$$

$$\int dx' \; |x'_t\rangle\langle x'_t| \; \theta(x'(t)) = \int dx' dx'' \; |x''\rangle\langle x''|\hat{\theta}(x'_t) \, |x'_t\rangle\langle x'_t|$$

$$= \int_{\substack{dx'_{t_2} dx''_{t_2} \\ dx'_{t_1} dx''_{t_1}}} \Big[\langle x_f | e^{-i\hat{H}(t_f - t_2)} |x'_{t_2}\rangle\langle x'_{t_2}| \hat{\vartheta}' |x''_{t_2}\rangle\langle x''_{t_2}| e^{-i\hat{H}(t_2 - t_1)} |x'_{t_1}\rangle$$

$$\times \langle x'_{t_1} | \hat{\vartheta} |x''_{t_1}\rangle\langle x''_{t_1}| e^{-i\hat{H}(t_1 - t_i)} |x_i\rangle \, \vartheta(t_2 - t_1) \; +$$

$$+ \; \langle x_f | e^{-i\hat{H}(t_f - t_1)} |x'_{t_1}\rangle\langle x'_{t_1}| \hat{\vartheta}' |x''_{t_1}\rangle\langle x''_{t_1}| e^{-i\hat{H}(t_1 - t_2)} |x'_{t_2}\rangle$$

$$\times \langle x'_{t_2} | \hat{\vartheta} |x''_{t_2}\rangle\langle x''_{t_2}| e^{-i\hat{H}(t_2 - t_i)} |x_i\rangle \, \vartheta(t_1 - t_2) \Big] =$$

$$= \langle x_f | \hat{\vartheta}'(t_2) \, \hat{\vartheta}(t_1) |x_i\rangle \, \vartheta(t_2 - t_1) \; +$$

$$+ \; \langle x_f | \hat{\vartheta}(t_1) \, \hat{\vartheta}'(t_2) |x_i\rangle \, \vartheta(t_1 - t_2) =$$

$$= \langle x_f | T\{ \hat{\vartheta}(t_1) \, \hat{\vartheta}'(t_2) \} |x_i\rangle$$

INTEGRALE SUI CAMMINI IN QFT PER CAMPI SCALARI

[M.1.2]

Generalizziamo l'espressione per d dimensioni alla teoria dei campi

QM in d-dim		QFT
indice j	$\longrightarrow$	coordinata $\vec{x}$
$x_j(t)$	$\longrightarrow$	$\varphi(\vec{x}, t)$
Lagrangiana L	$\longrightarrow$	$\int d^3x \, \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)$
$\prod_j Dx_j$	$\longrightarrow$	$D\varphi(\vec{x}) \equiv D\varphi$

Quindi:

$$\langle \varphi_f(\vec{x}), t_f \,|\, \varphi_i(\vec{x}), t_i \rangle = N \int_{\varphi(\vec{x}, t_i) = \varphi_i(\vec{x})}^{\varphi(\vec{x}, t_f) = \varphi_f(\vec{x})} D\varphi \; \exp\left\{ i \int_{t_i}^{t_f} d^4x \, \underset{\text{CAMPI CLASSICI}}{\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi)} \right\}$$

Scegliamo come $\varphi_i(\vec{x}) = \varphi_f(\vec{x}) = 0$ e $t_i \to -\infty$, $t_f \to +\infty$

$$_{out}\langle 0|0\rangle_{in} = \langle 0|0\rangle = N \int D\varphi \; e^{iS[\varphi]}$$

Dato che $\langle 0|0\rangle \equiv 1$ $\Rightarrow$ $N = \left(\int D\varphi \, e^{iS} \right)^{-1}$

La normalizzazione N dipende solo dalla misura e l'azione, non da cosa metto nell'integrale.

Consideriamo $N \int D\varphi \, e^{iS[\varphi]} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{classico}}}{\varphi(\vec{x}_j, t_j)} = \langle 0 | \underset{\substack{\uparrow \\ \text{operatore}}}{\hat{\varphi}(\vec{x}_j, t_j)} | 0 \rangle$

Con due campi: $N \int D\varphi \, e^{iS[\varphi]} \varphi(\vec{x}_1, t_1) \varphi(\vec{x}_2, t_2)$

Guardando il caso in QM è chiaro che il campo con t minore va sempre a destra nell'elemento di matrice, quindi

$$N \int D\varphi \, e^{iS[\varphi]} \varphi(\vec{x}_1, t_1) \varphi(\vec{x}_2, t_2) = \langle 0 | T\{ \hat{\varphi}(\vec{x}_1, t_1) \hat{\varphi}(\vec{x}_2, t_2) \} | 0 \rangle$$

Inoltre: → nel LHS i due campi sono classici e quindi commutano → $\varphi(x_1)\varphi(x_2) = \varphi(x_2)\varphi(x_1)$

→ nel RHS, senza $T\{\ \}$ $\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \rangle \neq \langle \varphi(x_2)\varphi(x_1) \rangle$ quindi serve il $T\{\ \}$.

⇒ Il T-prodotto è una naturale conseguenza dell'integrale sui cammini.

In generale quindi:

$$\langle 0 | T\{ \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \} | 0 \rangle = \frac{\int D\varphi \, e^{iS[\varphi]} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)}{\int D\varphi \, e^{iS[\varphi]}}$$

Pro e Contro dell'integrale sui cammini

Vantaggi:

- Formulazione di QFT esplicitamente Lorentz-covariante
- Non devo introdurre l'Hamiltoniana, il che permette di ottenere la quantizzazione di teorie di gauge in maniera chiara.
- Effetti delle simmetrie di una teoria di campo sono più evidenti.
- Utile per studiare effetti non-perturbativi:
  - QCD sul lattice
  - Istantoni, solitoni
  - Tunneling

Svantaggi:

- l'unitarietà della matrice S è meno evidente che nel formalismo di seconda quantizzazione
- Meno utile per problemi non-relativistici.