7. Complementi su gradiente e curve di livello, $n = 2$

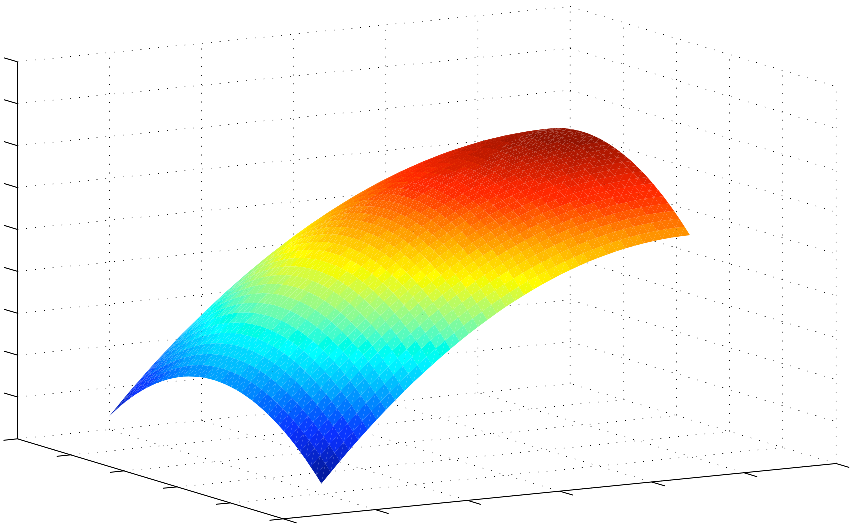
Si ricordi che il grafico di f è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+1}$. Abbiamo detto che se $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione definita su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e differenziabile nel punto $\mathbf{x}_0$ di A, allora l'iperpiano di equazione

$$x_{n+1} = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle$$

è tangente al grafico di f nel punto $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$.

Il vettore $(-\nabla f(\mathbf{x}_0), 1)$ è uno dei due vettori normali al piano tangente al grafico di f e quindi al grafico stesso di f nel punto $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$.

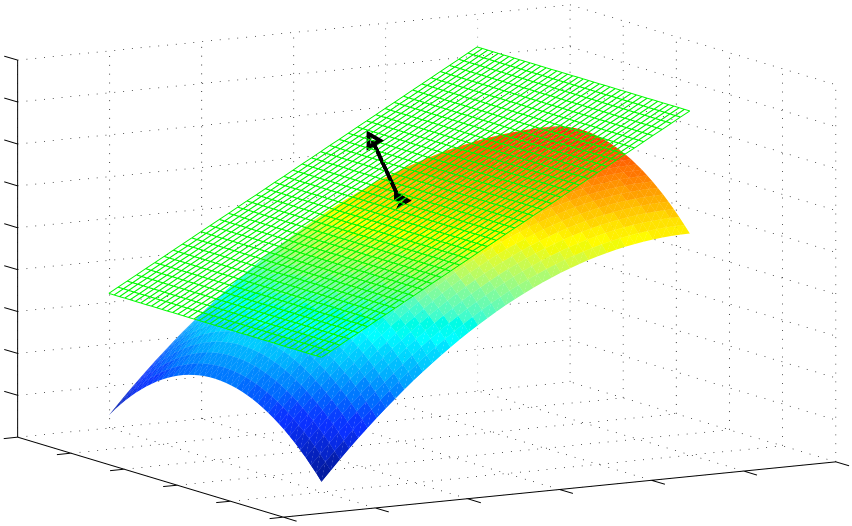
In particolare per $n = 2$ consideriamo il grafico di f in $\mathbb{R}^3$:



il piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è la funzione lineare $\ell(x, y) = f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)\,(y - y_0)$ e ha grafico

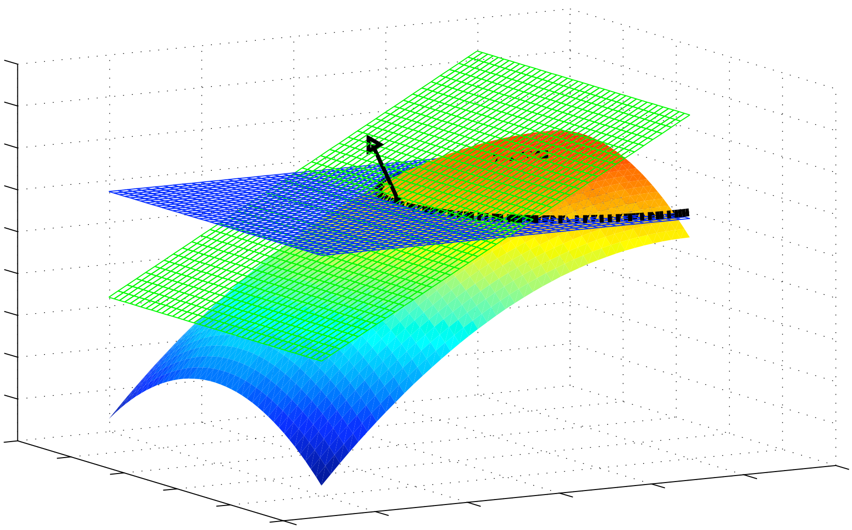
$$z = f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)\,(y - y_0).$$

Il vettore normale al piano che abbiamo disegnato è $(-\nabla f(x_0, y_0), 1)$.



Sezioniamo ora il grafico di f con il piano parallelo al piano x, y a quota $f(x_0, y_0)$ e otteniamo una curva C, in formule:

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = f(x_0, y_0) \end{cases}$$



Proiettiamo la curva C sul piano x, y: otteniamo così la curva di livello di f passante per il punto (x_0, y_0), ossia la curva

$$C_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, f(x,y) = f(x_0,y_0)\right\}.$$

Ripetiamo la stessa operazione con il piano tangente: sezioniamo col piano $z = f(x_0, y_0)$ e otteniamo l'intersezione di due piani

$$\begin{cases} z = f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)\,(y-y_0) \\ z = f(x_0,y_0) \end{cases}$$

Se $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, i due piani non sono coincidenti e la loro intersezione è una retta. Tale retta sta nel piano tangente al grafico, quindi è tangente alla curva C. Proiettiamo ancora sul piano x, y e otteniamo la retta r_0 di equazione

$$\partial_x f(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)\,(y-y_0) = 0$$

che risulta quindi essere tangente alla curva di livello C_0. Il vettore $\nabla f(x_0, y_0)$ è ortogonale a r_0 e quindi a C_0 nel punto (x_0, y_0).