FUNZIONALE GENERATORE [S.14.3]

Consideriamo

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \, \langle 0 | T\{\hat{\varphi}(x_1)\dots\hat{\varphi}(x_n)\} | 0 \rangle \, J(x_1) \dots J(x_n)$$

$$\equiv \langle 0 | T\left\{ \exp\left(i \int d^4x \, \hat{\varphi}(x) J(x) \right) \right| 0 \rangle$$

FUNZIONALE GEN. DELLE FUNZIONI DI GREEN

le J sono funzioni di prova, non operatori.
Da $Z[J]$ posso estrarre una funzione di Green a n-punti prendendo n DERIVATE FUNZIONALI

$$\boxed{\langle 0 | T\{\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)\} | 0 \rangle = \frac{1}{Z[0]} \frac{1}{i^n} \left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J(x)=0}}$$

DERIVATE FUNZIONALI:

$$\frac{\delta F[J]}{\delta J(x)} \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F[J(\cdot) + \varepsilon \, \delta(\cdot - x)] - F[J]}{\varepsilon}$$

esempio $F[J] = f(y) J(y) \to \frac{\delta F[J]}{\delta J(x)} = f(y) \, \delta(y-x)$

esempio: $F[J] = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, f(y) J(y)$

$$\frac{\delta F}{\delta J} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int dy \, f(y) \left(J(y) + \varepsilon \, \delta(y-x) \right) - \int dy \, f(y) J(y)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon f(x)}{\varepsilon} = f(x)$$

es: $F[J] = e^{\int (A + \varphi J) dy}$

$$\frac{\delta F}{\delta J(x)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{\int (A+\varphi J) dy} \left(1 + \varepsilon \varphi(x) \right) - e^{\int (A+\varphi J) dy}}{\varepsilon} = \varphi(x) \, e^{\int (A + \varphi J) dy}$$

Dall'espressione di $\langle 0 | T\{\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)\} | 0 \rangle$ con il path integral possiamo ugualmente avere:

$$Z[J] = \langle 0 | T\left\{ e^{i\int d^4x\, \varphi(x) J(x)} \right\} | 0 \rangle = N \int D\varphi \; e^{iS[\varphi] + i\int d^4x\, \varphi(x) J(x)}$$

funzioni, quindi commutano

$$Z[0] = N \int D\varphi \; e^{iS[\varphi]}$$

Infatti abbiamo

$$\frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} = N \int D\varphi \; e^{iS[\varphi] + i\int d^4x\, \varphi(x) J(x)} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)$$

Da cui

$$\boxed{\frac{1}{Z[0]} \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J(x)=0} = \frac{\int D\varphi \; e^{iS[\varphi]} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)}{\int D\varphi \; e^{iS[\varphi]}} = \langle 0 | T\{\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)\} | 0 \rangle}$$

$Z[J]$ è l'analogo della funzione di partizione in meccanica statistica e contiene in sé tutta la dinamica del sistema.

RISOLVIAMO LA TEORIA LIBERA

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\varphi(\Box + m^2)\varphi$$

$$Z_0[J] = \int D\varphi \; \exp\left\{ i\int d^4x \left(-\frac{1}{2}\varphi(\Box+m^2)\varphi + J(x)\varphi(x) \right)\right\}$$

Questo integrale non è ben definito in quanto è divergente. Per renderlo convergente possiamo aggiungere una componente immaginaria alla massa (del segno corretto!)

$$Z_0[J] = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int D\varphi \; \exp\left\{ \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\varphi(\Box+m^2)\varphi + J(x)\varphi(x) \right)\right\} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\int d^4x\,\varphi^2\right)$$

$$= \int D\varphi \; \exp\left\{ i\int d^4x \left(-\frac{1}{2}\varphi(\Box+m^2-i\varepsilon)\varphi + J(x)\varphi(x) \right)\right\}$$

Possiamo risolverlo come l'integrale Gaussiano completando il quadrato

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{p}\; \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{p}^{\,T}A\vec{p} + \vec{J}^{\,T}\cdot\vec{p}\right) = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}}\; \exp\left(\frac{1}{2}\vec{J}^{\,T}A^{-1}\vec{J}\right) \qquad , \qquad A = i(\Box + m^2 - i\varepsilon)$$

A^{-1} è l'inverso : $\quad (\Box_x + m^2 - i\varepsilon)\,\Pi(x-y) = -\delta(x-y)$

con $\quad \Pi(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2-m^2+i\varepsilon}e^{ip(x-y)}$

$$\Rightarrow \quad Z_0[J] = N\,\exp\left\{-i\int d^4x\,d^4y\;\frac{1}{2}J(x)\,\Pi(x-y)\,J(y)\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \langle 0|\,T\{\varphi(x)\varphi(y)\}\,|0\rangle = (-i)^2\frac{1}{Z_0[0]}\left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x)\,\delta J(y)}\right|_{J=0} = i\,\Pi(x-y)$$

$\equiv D_F(x-y) \quad =$ 

← Propagatore di Feynman

Calcoliamo la FUNZIONE DI GREEN A 4 PUNTI

$$\langle 0|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\}|0\rangle = (-i)^4 \frac{1}{Z_0[0]} \frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_4)}\Big|_{J=0} =$$

$$= \frac{1}{Z_0[0]} \frac{\delta^4}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_4)} N e^{-\frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\, J(x) D_F(x-y) J(y)}\Big|_{J=0} =$$

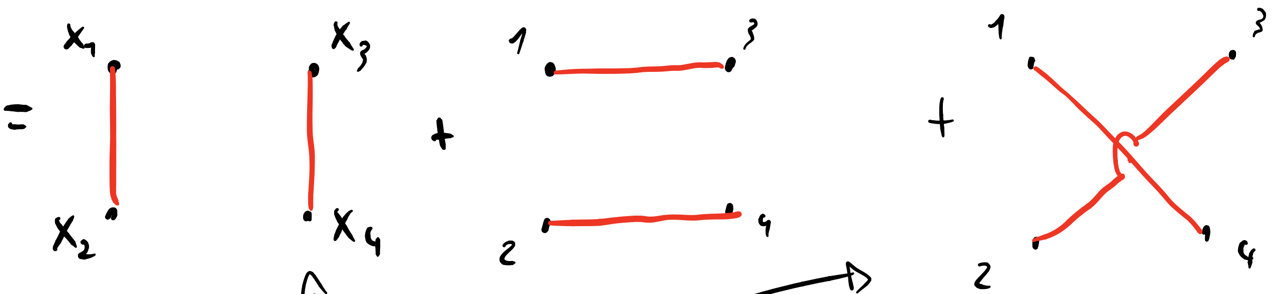
$$= \frac{\delta^3}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3}\left(- D_{4z} J_z\right) e^{-\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y}\Big|_{J=0}$$ ← Notazione semplificata

$$= \frac{\delta^2}{\delta J_1 \delta J_2}\left(-D_{43} + D_{4z} J_z D_{3w} J_w\right) e^{-\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y}\Big|_{J=0} =$$

$$= \frac{\delta}{\delta J_1}\left(D_{43} D_{2z} J_z + D_{42} D_{3w} J_w + D_{4z} J_z D_{32} \underbrace{- D_{4z} J_z D_{3w} J_w D_{2r} J_r}_{\emptyset}\right) e^{-\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y}\Big|_{J_0}$$

$$= D_{34} D_{12} + D_{24} D_{13} + D_{14} D_{23}$$

$=$



Tutti sconnessi

Nota: Nella teoria libera, funzioni di Green di un nr. dispari di campi sono NULLE:

$$\langle 0|T\{\phi_1 \phi_2 \dots \phi_{2n+1}\}|0\rangle = 0$$

INTERAZIONI [5.14.3.3]

Prendiamo $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2 + \frac{g}{3!}\varphi^3$

$$Z[J] = \int D\varphi \, e^{i\int d^4x \left[\frac{1}{2}\varphi(-\Box - m^2)\varphi + J\varphi + \frac{g}{3!}\varphi^3\right]} =$$

ASSUMENDO DI AVER REGOLARIZZATO LE DIVERGENZE

$$= \int D\varphi \, e^{i\langle \frac{1}{2}\varphi_x(-\Box - m^2)\varphi_x + J_x\varphi_x\rangle} \, e^{i\frac{g}{3!}\varphi_x^3} =$$

ESPANSIONE PERTURBATIVA

$$= \int D\varphi \, e^{i\langle \frac{1}{2}\varphi_x(-\Box - m^2)\varphi_x + J_x\varphi_x\rangle}\left[1 + i\frac{g}{3!}\langle\varphi_z^3\rangle - \frac{1}{2}\left(\frac{g}{3!}\right)^2\langle\varphi_z^3\rangle\langle\varphi_w^3\rangle + \dots\right]$$

Possiamo scriverlo in termini dello $Z_0[J]$ della TEORIA LIBERA:

$$Z[J] = Z_0[J] + i\frac{g}{3!}\int d^4z \, (-i)^3 \frac{\delta^3 Z_0[J]}{(\delta J(z))^3} - \frac{1}{2}\left(\frac{g}{3!}\right)^2\int d^4z \, d^4w \, \frac{\delta^6 Z_0[J]}{\delta J(z)^3 \, \delta J(w)^3} + \dots$$

Calcoliamo:

$\varphi_0(x)$: campo libero

$$Z_0[J] = N e^{-\frac{1}{2}\langle J_x D_{xy} J_y\rangle}$$

$$\langle 0|T\{\hat\varphi(x_1)\hat\varphi(x_2)\}|0\rangle = \frac{1}{Z[0]}(-i)^2 \left.\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1)\,\delta J(x_2)}\right|_{J=0} =$$

$$= \frac{Z_0[0]}{Z[0]}\langle 0|T\{\hat\varphi_0(x_1)\hat\varphi_0(x_2)\}|0\rangle + \frac{ig}{3!}\frac{Z_0[0]}{Z[0]}\int d^4z \, \langle 0|T\{\hat\varphi_0(x_1)\hat\varphi_0(x_2)\hat\varphi_0(z)^3\}|0\rangle + \dots$$

$$= \frac{\langle 0|T\{\hat\varphi_0(x_1)\hat\varphi_0(x_2)\, e^{i\int d^4z \frac{g}{3!}\hat\varphi_0(z)^3}\}|0\rangle}{\langle 0|T\{e^{i\int d^4z \frac{g}{3!}\hat\varphi_0(z)^3}\}|0\rangle}$$

Dove:

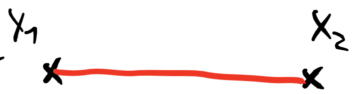
$$Z[0] = \int D\varphi \, e^{iS_0[\varphi]} \, e^{i\langle\frac{g}{3!}\varphi_z^3\rangle} = Z_0[0]\,\langle 0|T\{e^{i\frac{g}{3!}\int d^4z \, \varphi_0^3(z)}\}|0\rangle$$

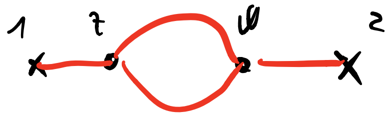
$$\langle 0| T\{ e^{i\int d^4z \, \frac{g}{3!}\hat{\varphi}_0(z)^3} \}|0\rangle = $$  $+$  $+ \dots$

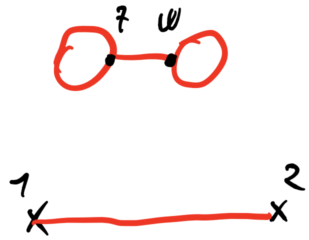
Diagrammi vuoto-vuoto

$\propto g^2 D_{zz} D_{zw} D_{ww}$

$$\langle 0| T\{ \hat{\varphi}_0(x_1)\, \hat{\varphi}_0(x_2)\, e^{i\int d^4z \, \frac{g}{3!}\hat{\varphi}_0(z)^3} \}|0\rangle =$$

$=$ 

$+$ 

$+$ 

$+ \dots$

$\propto D_{12}$

$\propto g^2 D_{1z} D_{2w} D_{zw}^2$

$\propto g^2 D_{12} D_{zz} D_{zw} D_{ww}$

$\downarrow$

sconnesso

I diagrammi vuoto-vuoto si cancellano con $\dfrac{1}{Z[0]}$

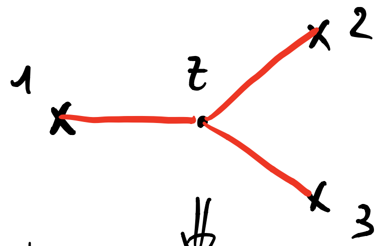
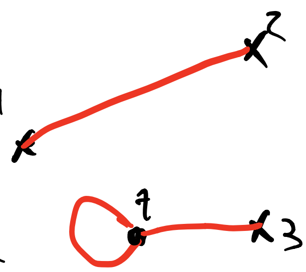
FUNZIONE A 3 PUNTI

$$\langle 0|T\{\hat\varphi(x_1)\hat\varphi(x_2)\hat\varphi(x_3)\}|0\rangle = \frac{\langle 0|T\{\hat\varphi_0(x_1)\hat\varphi_0(x_2)\hat\varphi_0(x_3)e^{i\int d^4z\,\frac{g}{3!}\hat\varphi_0(z)^3}\}|0\rangle}{\langle 0|T\{e^{i\int d^4z\,\frac{g}{3!}\hat\varphi_0(z)^3}\}|0\rangle} =$$

$$\langle 0|T\{\hat\varphi_0(x_1)\hat\varphi_0(x_2)\hat\varphi_0(x_3)e^{i\int d^4z\,\frac{g}{3!}\hat\varphi_0(z)^3}\}|0\rangle =$$

$$= \underbrace{\langle 0|T\{\varphi_1^0\varphi_2^0\varphi_3^0\}|0\rangle}_{=0} + i\int d^4z\, g\,\langle 0|T\{\varphi_1^0\varphi_2^0\varphi_3^0\varphi_z^0\varphi_z^0\varphi_z^0\}|0\rangle + O(g^2)$$

$\to$ vedi Nota sopra

$=$  $+$ ( $+$ permutazioni) $+ \dots$

$\Downarrow$ UNICO DIAGRAMMA CONNESSO A QUEST'ORDINE

$\Downarrow$ DISCONNESSI

FUNZIONE DI GREEN CONNESSA

$$G^c_{123} = ig\int d^4z\, D_{1z}D_{2z}D_{3z} + O(g^2)$$

$\Downarrow$ LSZ

$$i\mathcal{M} = ig$$ $\leftarrow$ REGOLA DI FEYNMAN

INTERAZIONI - 2 ← non nel programma

Consideriamo la Lagrangiana $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\varphi(\Box+m^2)\varphi - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4$

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi \, \exp\left\{ i\int d^4x \left[-\frac{1}{2}\varphi(\Box+m^2)\varphi + J\varphi - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \right] \right\} =$$ [assumendo di regolarizzare la teoria per levare le divergenze.]

$$= \int \mathcal{D}\varphi \, \exp\left\{ i\int d^4x \left[-\frac{1}{2}\varphi(\Box+m^2)\varphi + J\varphi \right\} \exp\left\{ i\int d^4x \left(-\frac{\lambda}{4!}\right)\varphi^4 \right] \right\} =$$

espansione perturbativa

$$= \int \mathcal{D}\varphi \, \exp\left\{ i\int d^4x \left[-\frac{1}{2}\varphi(\Box+m^2)\varphi + J\varphi \right\} \times$$

$$\times \left[1 - i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z \, \varphi(z)^4 + \frac{1}{2}\left(i\frac{\lambda}{4!}\right)^2 \int d^4z \, d^4w \, \varphi^4(z)\varphi^4(w) + \ldots \right] =$$

$$= Z_0[J] - \frac{i\lambda}{4!}\int d^4z \, (-i)^4 \frac{\delta^4 Z_0[J]}{\delta J(z)^4} + \frac{1}{2}\left(\frac{i\lambda}{4!}\right)^2 \int d^4z \, d^4w \, (-i)^8 \frac{\delta^8 Z[J]}{\delta J(z)^4 \delta J(w)^4} + \ldots$$

dove $Z_0[J]$ è il funzionale generatore della teoria libera

Calcoliamo $\langle 0 | T\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)\} | 0 \rangle$ al primo ordine in λ.

$$\langle 0 | T\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)\} | 0 \rangle = (-i)^4 \frac{1}{Z_0[0]} \frac{\delta^4 Z[J]}{\delta J(x_1)\ldots\delta J(x_4)}\bigg|_{J=0}$$

Il termine $Z_0[J]$ ci da il risultato della teoria libera ottenuto prima.

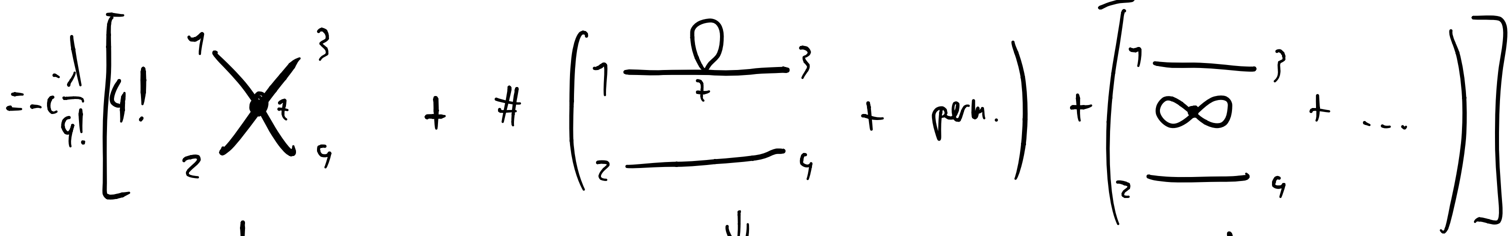
Il nuovo termine è:

provare a casa

$$- \frac{i\lambda}{4!} (-i)^4 (-i)^4 \frac{1}{Z_0[0]} \int d^4 z \; \frac{\delta^8 Z_0[J]}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_3 \delta J_4 (\delta J_z)^4}\Bigg|_{J=0} = [\dots]$$

$$-\frac{i\lambda}{4!}\Big[4!\, D_{1z}D_{2z}D_{3z}D_{4z} + \#\left(D_{1z}D_{2z}D_{zz}D_{34} + \text{perm.}\right) +$$
$$+ \left(D_{34}D_{12} + D_{24}D_{13} + D_{14}D_{23}\right) D_{zz}D_{zz}\Big] =$$

$$= -\frac{i\lambda}{4!}\Big[4! \; \dots$$



unico connesso

sconnessi

vuoto vuoto

$$G_c^{(4)}(1,2,3,4) = -i\lambda \int d^4 z \; D_{1z}D_{2z}D_{3z}D_{4z}$$

REGOLA DI Feynman.

$\downarrow$ LSZ

$$iM = -i\lambda$$

"elemento di matrice di scattering"

Per ottenere elementi di matrice S ci interessano solo le funzioni di <u>Green connesse</u>

FUNZIONALE GENERATORE DELLE FUNZIONI DI GREEN CONNESSE

Definiamo $W[J]$ da $\quad W[J] = -i \log Z[J]$

$$Z[J] = e^{iW[J]} = 1 + \underbrace{iW[J]}_{\text{connessi}} + \underbrace{\frac{1}{2} i^2 W[J]^2}_{\text{connessi in 2 pezzi}} + \dots$$

la sua espansione di Taylor è in termini delle funzioni di Green connesse

$$iW[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \; J(x_1) \dots J(x_n) \; G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$$

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{-i\,\delta}{\delta J_1} \right) \dots \left(\frac{-i\,\delta}{\delta J_n} \right) iW[J] \Big|_{J=0}$$

$Z[0] = e^{iW[0]}$ ← somma di diagrammi connessi vuoto-vuoto

$W[J] = W[0] + W'[J]$ ← tutto il resto.

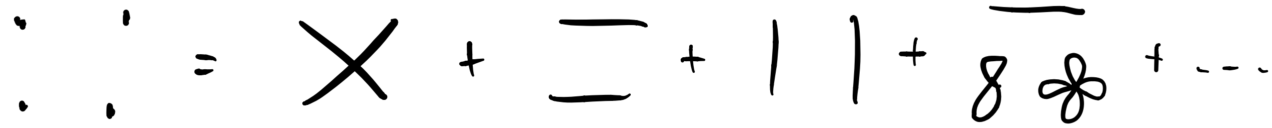
$$Z[J] = e^{iW[0]} e^{iW'[J]} = Z[0] \, e^{iW'[J]}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Per la teoria libera abbiamo } \quad Z_0[J] = \exp\left\{ -\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y \right\} \\ \text{Per la teoria libera } \quad iW_0[J] = -\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y + \text{const} \\ \Rightarrow \quad G_c^{(2)}(x,y) = D_F(x-y) \quad , \quad G_c^{(n>2)} = 0 \end{array}}$$

Dimostriamolo in generale:

$$G(x_1,\dots,x_n) = G_c(x_1,\dots,x_n) + \sum_{\substack{\text{MODI DI}\\ \text{SCOMPORRE } n \text{ PUNTI}\\ \text{IN SOTTOINSIEMI}}} G_c(\dots)\,G_c(\dots)\dots G_c(\dots)$$

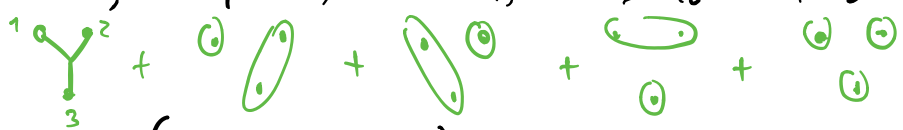
e.g.



1) $G(x) = G^c(x)$

2) $G(x_1,x_2) = G^c(x_1,x_2) + G^c(x_1)\,G^c(x_2) \rightarrow G^c(x_1,x_2) = G(x_1,x_2) - G(x_1)\,G(x_2)$

3) $G(x_1,x_2,x_3) = G^c_{123} + G^c_1\,G^c_{23} + G^c_2\,G^c_{13} + G^c_3\,G^c_{12} + G^c_1\,G^c_2\,G^c_3$



$$= G^c_{123} + G_1 G_2 G_3 + \left(G_1 G_{23} + \text{perm}\right) - 3\,G_1 G_2 G_3$$

$$\rightarrow G^c_{123} = G_{123} - \left(G_1 G_{23} + \text{perm}\right) + 2\,G_1 G_2 G_3$$

Confrontiamo con quanto si ottiene da $Z[J] = e^{W[J]}$

$$G^c_{12..n} = \frac{\partial}{12..n}\left(\ln Z\right)\Big|_{J=0} = \left(\ln Z\right)_{12..n}\Big|_{J=0}$$

NOTAZIONE: $X_1 = \dfrac{\delta X}{\delta J(x_1)}$

1) $G^c_1 = (\ln Z)_1 = \dfrac{1}{Z}\,Z_1\Big|_{J=0} = \dfrac{1}{Z[0]}\,\dfrac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)}\Big|_{J=0} = G_1$

2) $G^c_{12} = \left(\dfrac{Z_1}{Z}\right)_2\Big|_{J=0} = \dfrac{Z_{12}}{Z} - \dfrac{Z_1 Z_2}{Z^2}\Big|_{J=0} = G_{12} - G_1 G_2$

3) $G^c_{123} = \dfrac{Z_{123}}{Z} - \dfrac{Z_{12}}{Z}\dfrac{Z_3}{Z} - \dfrac{Z_{13}}{Z}\dfrac{Z_2}{Z} - \dfrac{Z_1}{Z}\dfrac{Z_{23}}{Z} + 2\,\dfrac{Z_1}{Z}\dfrac{Z_2}{Z}\dfrac{Z_3}{Z} = G_{123} - \left(G_1 G_{23} + \text{perm}\right) + 2\,G_1 G_2 G_3$

$\Rightarrow$ CORRETTO

Interazioni & Regole di Feynman dal PI

$$\mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{L}_0(\varphi) + \mathcal{L}_{int}(\varphi)$$

NOTAZIONE

$$\langle \cdot \rangle = \int d^4x \, \cdot(x)$$

$$Z[J] = \int D\varphi \; e^{i\int d^4x \left[\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + J\varphi\right]}$$

Ricordiamo che $-i \dfrac{\delta}{\delta J(y)} e^{i\int d^4x \, J(x)\varphi(x)} = \varphi(y) \, e^{i\int d^4x \, J(x)\varphi(x)}$

È vero che in generale, per una funzione arbitraria di φ:

$$F(\varphi) \, e^{i\langle J\varphi\rangle} = F\left(-i\frac{\delta}{\delta J}\right) e^{i\langle J\varphi\rangle}$$

$$Z[J] = \int D\varphi \; e^{i\langle \mathcal{L}_I(-i\frac{\delta}{\delta J})\rangle} \, e^{i\langle \mathcal{L}_0 + J\varphi\rangle}$$

indip. da φ

teoria libera

$$= e^{i\langle \mathcal{L}_I(-i\frac{\delta}{\delta J})\rangle} \int D\varphi \; e^{i\langle \mathcal{L}_0 + J\varphi\rangle} = e^{i\langle \mathcal{L}_I(-i\frac{\delta}{\delta J})\rangle} Z_0[J]$$

$$= e^{i\langle \mathcal{L}_I(-i\frac{\delta}{\delta J})\rangle} Z_0[0] \; e^{-\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y}$$

Espandiamo in th. delle perturbazioni $e^{i\langle \mathcal{L}_I\rangle}$ attorno a 1

$$e^{i\langle \mathcal{L}_I(-i\frac{\delta}{\delta J})\rangle} \simeq 1 + i\langle \mathcal{L}_I\left(-i\frac{\delta}{\delta J}\right)\rangle + \dots$$

$$Z[J] = Z_0[J]\left\{1 + Z_0[J]^{-1}\left[e^{i\langle \mathcal{L}_I(-i\frac{\delta}{\delta J})\rangle} - 1\right] Z_0[J]\right\}$$

Il funzionale gen. delle funzioni di Green CONNESSE mi dà:

$$Z_0[J] = Z_0[0]\, e^{-\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y}$$

$$iW[J] = \log Z[J] = \text{cost} - \frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y +$$

$$+ \log\left(1 + i Z_0[J]^{-1} \langle \mathcal{L}_I\left(-i\frac{\delta}{\delta J}\right) \rangle Z_0[J]\right)$$

$$iW[J] \simeq \text{Cost} - \frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y + i\left(e^{-\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y}\right)^{-1} \langle \mathcal{L}_I\left(-i\frac{\delta}{\delta J}\right) \rangle e^{-\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y}$$

Connected Green functions are obtained by:

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{-i\delta}{\delta J_1}\right) \cdots \left(\frac{-i\delta}{\delta J_n}\right) iW[J]\Big|_{J=0}$$

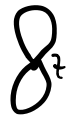
Feynman rules are given by tree-level connected Green functions.

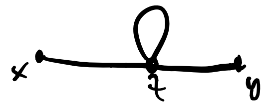
$\Rightarrow$ Each $\frac{\delta}{\delta J_1}$ must act on a term $\sim D_{zy} J_y$ where z is the coordinate of the interaction Lagrangian. So each $\frac{\delta}{\delta J(z)}$ inside $\mathcal{L}_I\left(-i\frac{\delta}{\delta J}\right)$ must bring down a $D_{zy} J_y$ from the exponent.

Example: $\mathcal{L}_I(\varphi) = -\frac{\lambda}{4!}\varphi^4$

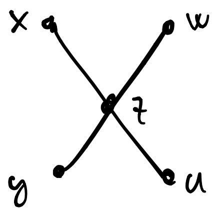
$$iW[J] = -\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y + i\left(e^{-\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y}\right)^{-1}\int d^4z\, \frac{(-\lambda)}{4!}\left(\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4 e^{-\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y} + \dots$$

$$= -\frac{1}{2} J_x D_{xy} J_y - i\frac{\lambda}{4!}\Big(3 D_{zz}^2 - 6 D_{zz} D_{xz} D_{yz} J_x J_y +$$





$$+ D_{zx} D_{zy} D_{zw} D_{zu} J_x J_y J_w J_u\Big) + O(\lambda^2)$$



$$G_c^{(4)}(1,2,3,4) = (-i)\frac{\delta}{\delta J_1}(-i)\frac{\delta}{\delta J_2}(-i)\frac{\delta}{\delta J_3}(-i)\frac{\delta}{\delta J_4}\, iW[J]\Big|_{J=0} =$$

$$= -i\frac{\lambda}{4!}\, 4!\, D_{1z} D_{2z} D_{3z} D_{4z} = -i\lambda\left(D_{1z} D_{2z} D_{3z} D_{4z}\right)$$

Elemento di matrice S da LSZ (fisso Z=1 a livello albero)

$$S_{if} = i(2\pi)^4\delta^4(q_1+q_2+q_3+q_4)\, M = i^4 \int d^4x_1 \dots d^4x_4\, e^{-i(q_1x_1+\dots+q_4x_4)}$$

$$(\Box_1+m^2)\dots(\Box_4+m^2)\, G_c^{(4)}(1,2,3,4) =$$

$$= \cancel{i^4}\,\cancel{(-i)^4} \int d^4z\,(-i\lambda)\, e^{-i(q_1+q_2+q_3+q_4)z} = -i\lambda\,(2\pi)^4\,\delta^4(q_1+q_2+q_3+q_4)$$

$$\Rightarrow \boxed{iM = -i\lambda}$$

$$(\Box_x+m^2) D_{xy} = -i\delta^4(x-y)$$

$$S_{i\to f} = {}_{out}\langle p_1,\dots,p_n | q_1, q_2, \dots, q_m\rangle_{in} = \left(iZ^{-1/2}\right)^{n+m}\int\prod_{i=1}^{m} d^4x_i \prod_{j=1}^{n} d^4y_j\, e^{i(p_j y_j - q_i x_i)}$$

$$\times (\Box_{x_1}+m^2)\dots(\Box_{y_n}+m^2)\,\langle 0|T\{\varphi(x_1)\dots\varphi(y_n)\}|0\rangle$$

$$+ \text{(termini sconnessi)}$$

In generale

Un'interazione $S_I = \int d^4z \; g \; \varphi^n(z) \, \chi^m(z)$

genererà un termine per $W[J]$:

$$iW \ni i \left(e^{-\frac{1}{2}\left(J_x^\varphi D^\varphi_{xy} J_y^\varphi + (\varphi \to \chi)\right)}\right)^{-1} \left\langle \mathcal{L}_I\left(-i\frac{\delta}{\delta J^\varphi}, -i\frac{\delta}{\delta J^\chi}\right)\right\rangle \left(e^{-\frac{1}{2}\left(J_x^\varphi D^\varphi_{xy} J_y^\varphi + (\varphi \to \chi)\right)}\right)$$

$$= i g (i)^{n+m} \int d^4z \prod_{i=1}^{n} \int d^4x_i \prod_{j=1}^{m} d^4y_j \, D^\varphi_{zx_i} J^\varphi_{x_i} D^\chi_{zy_j} J^\chi_{y_j} + \dots$$ termini con meno potenze di J

La funzione di Green

$$G^{(n+m)} = \langle 0 | T\{\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \chi(y_1) \dots \chi(y_m)\} | 0 \rangle = (-i)^{n+m} \left(\frac{\delta}{\delta J^\varphi}\right)^n \left(\frac{\delta}{\delta J^\chi}\right)^m W[J] \Big|_{J=0} =$$

$$= \int d^4z \; i g \; n! m! \prod_{i=1}^{n} D^\varphi_{zi} \prod_{j=1}^{m} D^\chi_{zj}$$

ELEMENTO DI MATRICE S $\Rightarrow$ $M(\varphi^n, \chi^m) = i g \, n! m!$ $\leftarrow$ REGOLA DI FEYNMAN

Lo stesso risultato si ottiene facendo:

$$M(\varphi^n, \chi^m) = \left(\frac{\delta}{\delta \varphi}\right)^n \left(\frac{\delta}{\delta \chi}\right)^m S_I$$

Nello spazio dei momenti:

Prendiamo la trasformata di Fourier

$$\varphi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \tilde{\varphi}(p)\, e^{-ipx}$$

Nel caso di interazioni derivative:

$$\partial_\mu \varphi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, (-ip_\mu)\, \tilde{\varphi}(p)\, e^{-ipx}$$

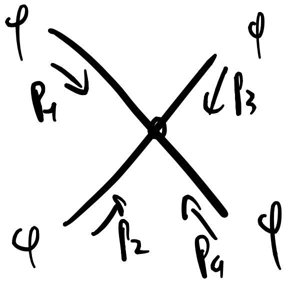
Esempio: $\quad S_I = \int d^4x\, g\, \varphi^2 (\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi)$

$$S_I = \int d^4x \int \frac{d^4p_a}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_b}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_c}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_d}{(2\pi)^4}\, e^{-i(p_a+p_b+p_c+p_d)x}\, \tilde{\mathcal{L}}_I(p_a, p_b, p_c, p_d)$$

$$= \int \frac{d^4p_a}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_b}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_c}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_d}{(2\pi)^4}\, (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_a+p_b+p_c+p_d)\, \tilde{\mathcal{L}}_I(p_a, p_b, p_c, p_d)$$

dove $\quad \tilde{\mathcal{L}}_I = g\, \tilde{\varphi}(p_a)\, \tilde{\varphi}(p_b)\, (-ip_c^\mu)\, \tilde{\varphi}(p_c)\, (-ip_{d\mu})\, \tilde{\varphi}(p_d)$

REGOLA DI FEYNMAN NELLO SPAZIO DEI MOMENTI



$$= i \frac{\delta}{\delta\varphi(p_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta\varphi(p_4)}\, \tilde{\mathcal{L}}_I$$

$$= ig\, 2 \cdot 2\, (-1) \left[p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_4 + p_2 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_4 + p_3 \cdot p_4 \right]$$

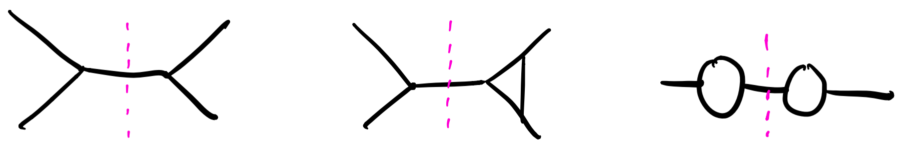
Diagrammi Irriducibili a una Particella

⇒ 1-particle irreducible (1PI)

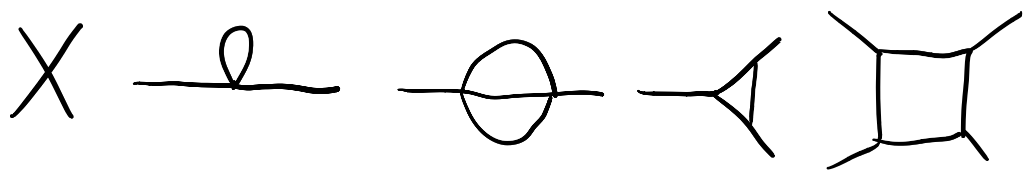
Def: diagrammi connessi che non possono essere divisi in due parti sconnesse tagliando un propagatore interno

Esempi:

Non 1PI:

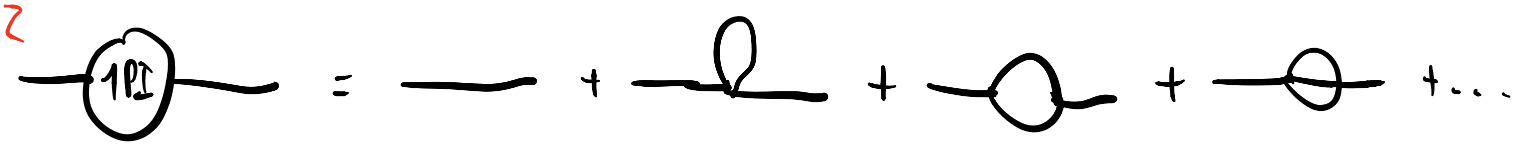


1PI:

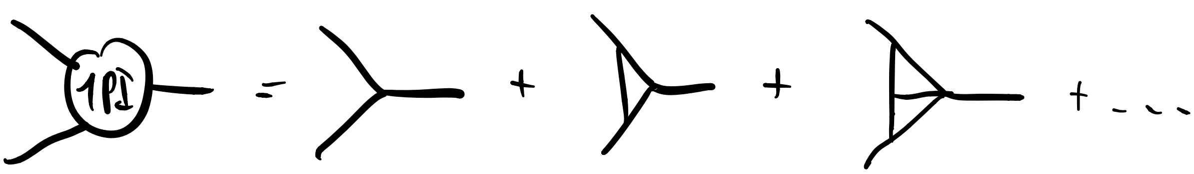


Possiamo organizzare i diagrammi 1PI in insiemi "blocchi" con un dato numero n di gambe esterne:

$n=2$



$n=3$

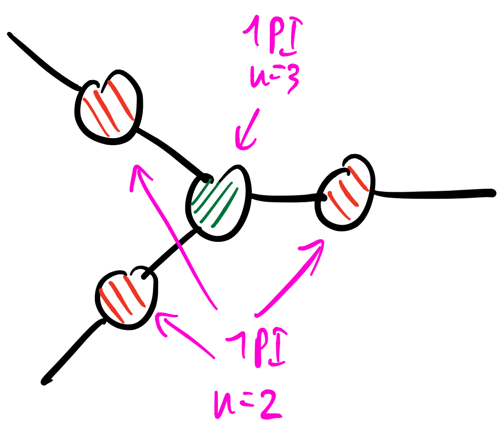


etc..

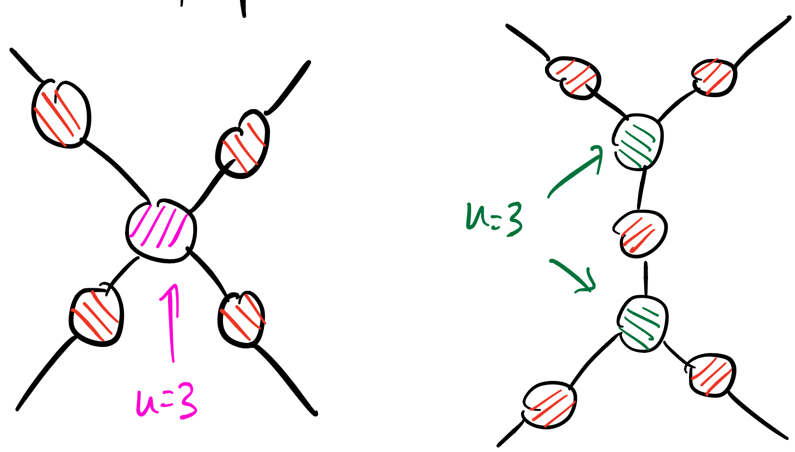
⇒ Ogni diagramma **CONNESSO** può essere costruito come un **diagramma ad albero** (ovvero senza loop chiusi) ai cui **VERTICI** e **PROPAGATORI** abbiamo i **BLOCCHI 1PI** a n punti.

Funzione di Green connessa a

3 punti:



4 punti



Sarebbe molto utile avere un funzionale generatore per diagrammi 1PI.

AZIONE EFFETTIVA [Se.4.1, W.16.1]

$$Z[J] = \langle 0|0\rangle_J = \int D\varphi \, e^{iS[\varphi] + i\langle J\varphi\rangle} = e^{iW[J]}$$

$W[J]$: generatore delle funz. di Green connesse.
Abbiamo già visto che

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = -i\frac{1}{Z}\frac{\delta Z}{\delta J} = \langle 0|\varphi(x)|0\rangle_J \equiv \Phi \quad \text{CAMPO CLASSICO}$$

$$\boxed{\Phi(J) \equiv \frac{\delta W[J]}{\delta J}}$$

Prendiamo la trasformata di Legendre di $W[J]$:

$$\Gamma(\Phi) = W[J] - \int d^4x \, \Phi(x) J(x) \quad \leftarrow \text{AZIONE EFFETTIVA}$$

dove $J(x) = J(\Phi(x))$ si ottiene invertendo $\Phi(J)$

L'AZIONE EFFETTIVA è il funzionale generatore dei diagrammi 1PI.

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi(x)} = \int d^4y \left(\underbrace{\frac{\delta W}{\delta J(y)} - \Phi(y)}_{=0} \right) \frac{\delta J(y)}{\delta\Phi(x)} - J(x) = -J(x)$$

when $J=0$: $\frac{\delta\Gamma}{\delta\Phi}=0$ $\to$ equazione del moto di Φ con azione Γ. Per questo si chiama azione effettiva: include tutte le correzioni quantistiche.

Tutte le ampiezze di scattering (a tutti gli ordini) possono essere calcolate come somma dei diagrammi connessi al LIVELLO ALBERO ottenuti da $\Gamma(\Phi)$ invece che $S(\varphi)$.

DIMOSTRAZIONE

Definiamo il funzionale generatore partendo da $\Gamma(\varphi)$ invece che $S(\varphi)$:

$$e^{iW_\Gamma[J]} = \int D\varphi\, e^{\frac{i}{\lambda}\left(\Gamma(\varphi) + \int d^4x\, \varphi(x) J(x)\right)}$$

dove "λ" gioca il ruolo di $\hbar$ per contare i loop.

Il contributo a livello albero è dato dal limite $\lambda \to 0$ (ovvero il limite classico). Dal principio di fase stazionaria:

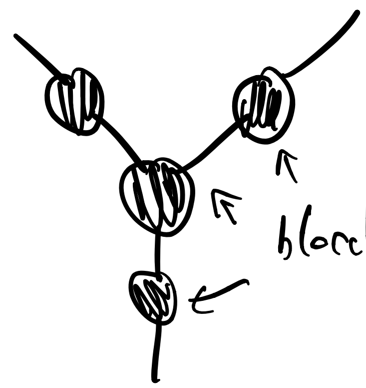
$$\lim_{g\to 0} e^{iW_\Gamma[J]} = \exp\left(\frac{i}{\lambda} W_\Gamma^{(0)}(J)\right) = \exp\left[\frac{i}{\lambda}\left(\Gamma(\Phi) + \int d^4x\, \Phi(x) J(x)\right)\right]$$

dove $\Phi(x)$ estremizza l'azione $\Gamma(\Phi)$: $\left.\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi}\right|_{\varphi=\Phi} + J(x) = 0$

$$\Rightarrow W_{\Gamma}^{(0)}(J) = \Gamma(\Phi) + \int d^4x \, \Phi(x) J(x) = W[J]$$

questa è proprio la relazione per il funzionale generatore di TUTTE le FUNZIONI DI GREEN CONNESSE calcolate con $S(\varphi)$.

$$i W[J] = \int_{\substack{\text{diagrammi} \\ \text{connessi al livello} \\ \text{albero}}} D\phi \; e^{i\Gamma(\phi) + i\langle J\phi \rangle}$$



$\Rightarrow$ Il problema è che non conosciamo $\Gamma(\Phi)$ a tutti gli ordini

Γ si può ottenere direttamente da $S(\varphi)$ calcolando tutti i diagrammi 1PI:

$$e^{i\Gamma[\varphi_0]} = \int_{1PI} D\varphi \; e^{iS(\varphi_0 + \varphi)}$$

Data una configurazione classica φ_0, qui integriamo su tutte le correzioni quantistiche.

Per configurazioni $\varphi_0(x) \equiv \varphi_0$: indip. da x

$$\Gamma[\varphi_0] = -\underset{\text{volume}}{V_4} \; V_{eff}(\varphi_0) \leftarrow \text{POTENZIALE EFFETTIVO}$$