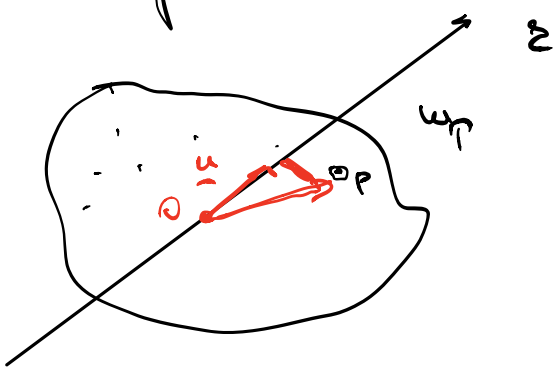
MECCANICA RAZIONALE

Ing. Civile & Ambientale
Navale

31 marzo 2021

Trasformazione di inerzia.

Sistema S : nella formulazione discreta è costituito da un insieme di punti materiali P di massa m_P



$\underline{u} = \text{versore}(\underline{z})$

distanza di P da z

$\| \underline{u} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \|$

$$I_z := \sum_{P \in S}' m_P \, \| \underline{u} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \|^2$$

(ad es : punto materiale $I_z := m z^2$)

Formulazione continua $\Sigma_P \longrightarrow \mathcal{D}_R$

e $m_P \longrightarrow \rho(x, y, z)$

I_r : è una costante dipende dalla geometria del rigido e dalla distribuzione di massa.

↳ entra in gioco nel momento angolare e nell'energia cinetica

Per il corpo rigido ?

$$I_r = \sum_{P \in R}' m_P \, \| \underline{u} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_0) \|^2$$

$$= \sum_{P \in R}' m_P \, [\underbrace{\underline{u}}_{\underline{a}} \wedge \underbrace{(\underline{x}_P - \underline{x}_0)}_{\underline{b}}] \cdot [\underbrace{\underline{u} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_0)}_{\underline{c}}]$$

usiamo identità $\underline{a} \wedge \underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b} \wedge \underline{c}$

$$= \underbrace{\underline{u}}_{a} \cdot \sum_{P \in R}' m_P \, \underbrace{(\underline{x}_P - \underline{x}_0)}_{b} \wedge \underbrace{[\underline{u} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_0)]}_{c}$$

Possiamo scrivere $I_r = \underline{u} \cdot I_0(\underline{u})$

Abbiamo definito la trasformazione di inerzia (tensore di inerzia)

$$I_0 : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$$

$$I_0(\underline{y}) = \sum_{P \in R}' m_P (\underline{x}_P - \underline{x}_0) \wedge [\underline{y} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_0)]$$

dalla geometria e distribuzione di massa del rigido.

Ci servirà per scrivere il momento angolare e l'energia cinetica del corpo rigido.

Dipende da un punto O fissato

<u>Proprietà</u>: la trasformazione di inerzia è lineare e simmetrica

<u>Dimostriamolo</u>: linearità significa che $\forall\ \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$I_0(\lambda \underline{y} + \mu \underline{z}) = \lambda I_0(\underline{y}) + \mu I_0(\underline{z})$$

— si segue direttamente dalla definizione

$$I_0(\underline{y}) = \sum_{p \in R} m_p \underbrace{(\underline{x}_p - \underline{x}_0)}_{\underline{a}} \wedge \Big[\underbrace{\underline{y}}_{\underline{b}} \wedge \underbrace{(\underline{x}_p - \underline{x}_0)}_{\underline{c}} \Big]$$

$\lambda \underline{y} + \mu \underline{z}$

Simmetria: $\underline{y} \cdot I_0(\underline{z}) = \underline{z} \cdot I_0(\underline{y})$

usiamo: $\underline{a} \wedge [\underline{b} \wedge \underline{c}] = (\underline{a} \cdot \underline{c})\underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b})\underline{c}$

$$= \sum_{p \in R} m_p \Big[\|\underline{x}_p - \underline{x}_0\|^2 \underline{y} - \big((\underline{x}_p - \underline{x}_0) \cdot \underline{y} \big) (\underline{x}_p - \underline{x}_0) \Big]$$

questo significa

$$\underline{z} \cdot I_0(\underline{y}) = \sum_{p \in R} m_p \Big[\|\underline{x}_p - \underline{x}_0\|^2 (\underline{z} \cdot \underline{y}) +$$

$$- \big((\underline{x}_p - \underline{x}_0) \cdot \underline{y} \big) \big((\underline{x}_p - \underline{x}_0) \cdot \underline{z} \big) \Big]$$

$$= \underline{y} \cdot I_0(\underline{z})$$

$\blacksquare$

Quindi la trasformazione di inerzia è lineare e simmetrica $\Rightarrow$ fissato un riferimento ortogonale & solidale al rigido $(O, \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$, I_O è rappresentato da una matrice simmetrica

Se $\underline{y} = y_1 \underline{u}_1 + y_2 \underline{u}_2 + y_3 \underline{u}_3$

$$I_O(\underline{y}) = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

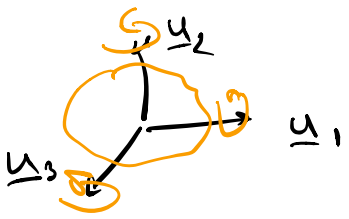
Per una matrice simmetrica

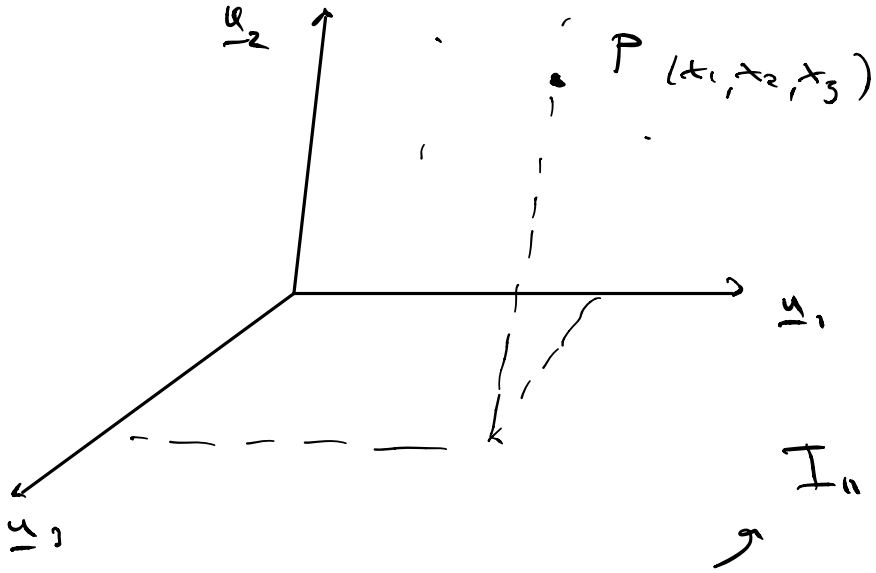
$$I_{jk} = \underline{u}_j \cdot I_O(\underline{u}_k) \qquad j,k = 1,2,3$$

$$I_{jj} = \underline{u}_j \cdot I_O(\underline{u}_j) = I_{\underline{u}_j}$$

momento di inerzia rispetto all'asse $\underline{u}_j$

I_{11}, I_{22}, I_{33}





$$\underline{x}_P = x_{P,1}\,\underline{u}_1 + x_{P,2}\,\underline{u}_2 + x_{P,3}\,\underline{u}_3$$

massa m_P

$$I_{11} = \sum_{P \in S}' m_P \left(x_{P,2}^2 + x_{P,3}^2 \right)$$

$I_{\underline{u}_1}$

$$I_{22} = \sum_P m_P \left(x_{P,1}^2 + x_{P,3}^2 \right)$$

$$I_{33} = \sum_P m_P \left(x_{P,1}^2 + x_{P,2}^2 \right)$$

Andiamo a vedere gli elementi fuori dalla diagonale. Notiamo che se $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono due vettori ortogonali ($\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$)

$$\underline{u} \cdot I_O(\underline{v}) = \sum_{P \in R}' m_P \Big[\|\underline{x}_P - \underline{x}_O\|^2 \underbrace{(\underline{u} \cdot \underline{v})}_{=0} + \left((\underline{x}_P - \underline{x}_O) \cdot \underline{u} \right) \left((\underline{x}_P - \underline{x}_O) \cdot \underline{v} \right) \Big]$$

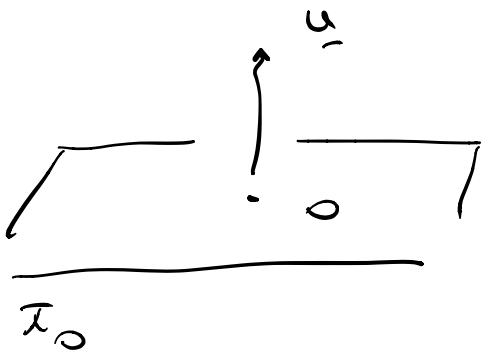
$$= - \sum_{P \in R}' m_P \Big[\underbrace{(\underline{x}_P - \underline{x}_O) \cdot \underline{u}}_{\underline{u}_1} \Big] \Big[\underbrace{(\underline{x}_P - \underline{x}_O) \cdot \underline{v}}_{\underline{u}_2} \Big]$$

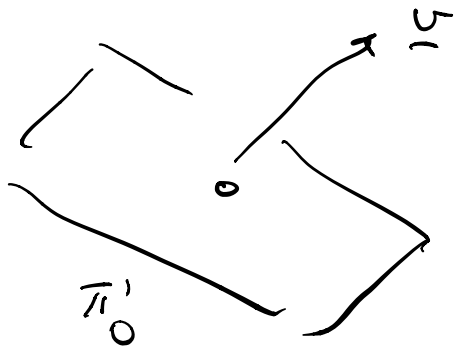
lo chiamiamo momento deviatore

rispetto alla coppia di piani π_0, π_0'

π_0 : piano per O e ortogonale a $\underline{u}$

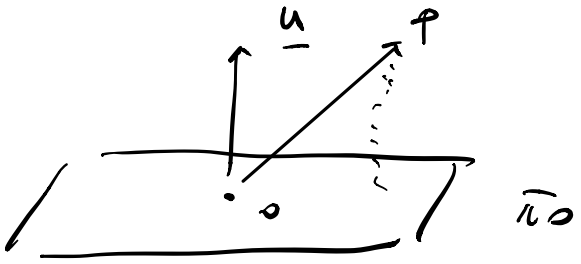
π_0' : piano per O e ortogonale a $\underline{v}$





[vedremo: momenti deviatori sono responsabili dei fenomeni di deviazione dell'asse di rotazione]

Geometricamente



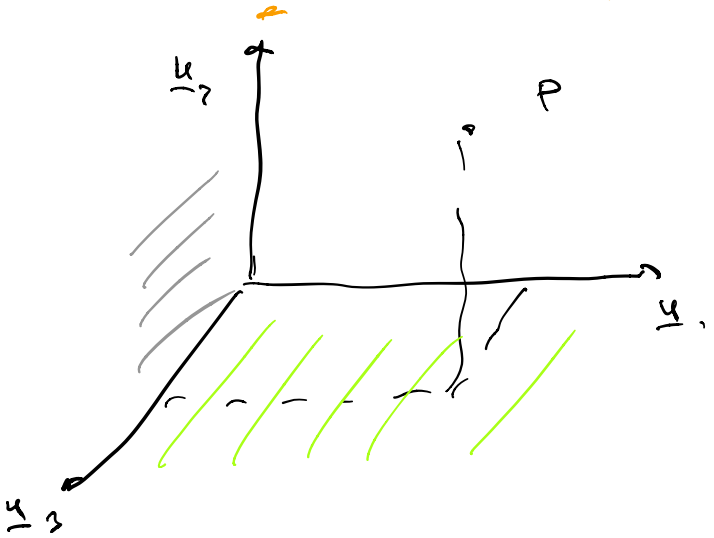
$\underline{u} \cdot (\underline{x}_P - \underline{x}_O)$

misura la distanza (col segno) di P dal piano π_0

(→ proiezione di OP su $\underline{u}$)

Gli elementi di I_{ijk} fuori dalla diagonale sono i momenti deviatori rispetto ai piani coordinati normali

a $\underline{u}_j$ e $\underline{u}_k$



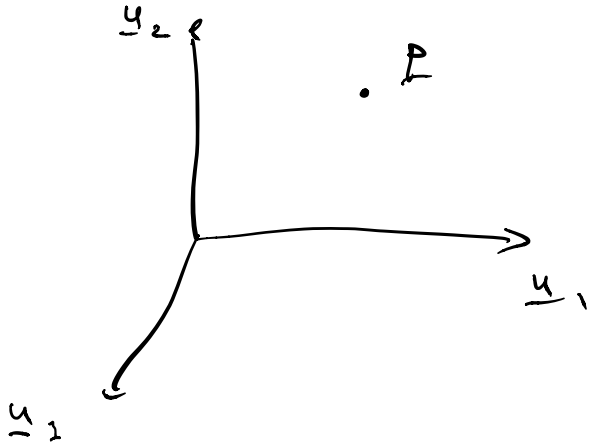
$$I_{12} = -\sum_p m_p x_{p,1} x_{p,2}$$

$$I_{23} = -\sum_p m_p x_{p,2} x_{p,3}$$

$$I_{13} = -\sum_p m_p x_{p,1} x_{p,3}$$

Abbiamo calcolato tutti I_{jk}

Seconda parte

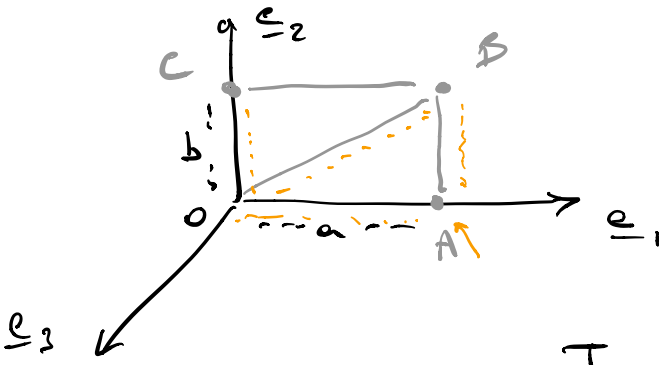


$$I_{11} = \sum_p m_p (x_{p,2}^2 + x_{p,3}^2)$$

$\vdots$

$$I_{12} = -\sum_p{}' m_p x_{p,1} x_{p,2}$$

Esempio Trovatura indeformabile



masse aste siano trascurabili rispetto alle masse dei nodi m_A, m_B, m_C

$$I_{11} = m_A(0) + m_B(b^2) + m_C(b^2)$$

$$I_{22} = m_A (a^2) + m_B (a^2) + m_C (0)$$

$$I_{33} = m_A (a^2) + m_B (a^2+b^2) + m_C (b^2)$$

$$= (m_A + m_B) a^2 + (m_B + m_C) b^2$$

$$= I_{11} + I_{22}$$

$$I_{12} = -\left[m_A \underbrace{(a \cdot 0)}_{=0} + m_B (a \cdot b) + m_C \underbrace{(b \cdot 0)}_{=0} \right]$$

$$= - m_B \, a \cdot b$$

$$I_{13} = I_{23} = 0 \quad \longrightarrow \quad x_{P,3} = 0$$

$$A, B, C \in (\underline{e}_1, \underline{e}_2)$$

<u>Rigido piano</u>: se chiamiamo $\underline{u}_3$ l'asse ortogonale al piano, tutti i punti del rigido hanno coordinate $(x_1, x_2, 0)$

Quindi: $I_{33} = I_{11} + I_{22}$

$$I_{13} = I_{23} = 0$$

quindi rispetto a O

$$I_O = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{pmatrix}$$

matrice di inerzia piana

Se sappiamo I_O, possiamo calcolare il momento di inerzia per qualsiasi asse r_O passante per O, oppure i momenti desiderati rispetto ad una coppia di piani per O

$$I_{r_O} = \underline{u} \cdot I_O(\underline{u})$$

$\underline{u}$ = versore di r

$$I_{\pi_O \pi'_O} = \underline{u} \cdot I_O(\underline{v})$$

$\underline{u}, \underline{v}$ versori ortogonali a π_O, π'_O

Prendi rigido, scegli O e calcola la matrice $I_O = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \text{vers } r_O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ | \\ | \end{pmatrix}_{\text{vers } r_O} = I_{r_O}$$

Nell'esempio precedente, prendiamo un punto $Q = (a, a, a)$ e chiediamoci momento di inerzia rispetto alla retta OQ

Ne calcoliamo il versore:

$$\underline{u} = \frac{\underline{x}_Q - \underline{x}_O}{\| \underline{x}_Q - \underline{x}_O \|} = \frac{(a, a, a)}{\sqrt{a^2 + a^2 + a^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$I_{\overline{OQ}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} (1, 1, 1) \begin{pmatrix} I_{11} + I_{12} \\ I_{12} + I_{22} \\ I_{11} + I_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \left(2 I_{11} + 2 I_{12} + 2 I_{22} \right)$$

$$= \frac{2}{3} \left(b^2 (\omega_B + \omega_C) + a^2 (\omega_A + \omega_B) - \omega_B a b \right)$$

Ad es coppia di piani $\underline{n}_1$, $\underline{n}_2$

$$I_{n_1 n_2} = \underline{n}_1 \cdot \left(\quad \right) \cdot \underline{n}_2$$

<u>Commento</u>: dalla definizione si può calcolare la traccia di I_O

$$Tr(I_O) = I_{11} + I_{22} + I_{33} =$$

$$= 2 \sum_p m_p \left(x_{p_1}^2 + x_{p_2}^2 + x_{p_3}^2 \right)$$

$$= 2 \sum_p m_p \, \| \underline{x}_p - \underline{x}_0 \|^2 = 2 \, J_0$$

momento polare

Rappresentazione geometrica della trasformazione di inerzia

↳ <u>Ellissoide di inerzia</u>

Prendiamo $O \in R$ fissato. Prendiamo c un numero positivo e andiamo a considerare il luogo dei punti P tali che

$$\| \underline{x}_p - \underline{x}_0 \|^2 = \frac{c}{I_{z_{OP}}}$$

momento di inerzia rispetto alla retta passante per O e P

$I_{z_{OP}}$ è sempre positivo

$$\left(I_z = \sum m \, \| \cdot \|^2 \right)$$

Riscriviamola in forma analitica

Poniamo $\underline{x}_p - \underline{x}_0 = \underline{x}$, quindi

$$\underline{u} = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} = \text{vers } \underline{x}$$

Allora

$$\underline{x} \cdot I_0(\underline{x}) = \|x\| \, u \cdot I_0(\|x\| \, \underline{u})$$

$$(\underline{x} = \|x\| \, \underline{u})$$

$$= \|x\|^2 u \cdot I_0(\underline{u})$$

linearità

$$= \|x\|^2 \, I_{\Sigma_{0P}} = \|\underline{x}_p - \underline{x}_0\|^2 \, I_{\Sigma_{0P}}$$

$$\underline{u} \cdot I_0(\underline{u}) = I_{\underline{u}}$$

$$= C$$

usando $\|\underline{x}_p - \underline{x}_0\|^2 = \dfrac{C}{I_{\Sigma_{0P}}}$

Quindi

$$\left\{ P : \|\underline{x}_P - \underline{x}_0\|^2 = \frac{C}{I_{z_{0P}}} \right\} =$$

$$= \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\underline{x}) = \underline{x} \cdot I_0(\underline{x}) = C \right\}$$

<u>Def</u> Chiamiamo $f(\underline{x}) = \underline{x} \cdot I_0(\underline{x})$

$$\left(\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \quad e \quad (\ \ )\begin{pmatrix} I_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ \ \end{pmatrix} = f(\underline{x}) \right)$$

la forma quadratica associata a I_0. Esplicitamente

$$f(\underline{x}) = \underline{x} \cdot I_0(\underline{x}) = \sum_{i,j=1}^{3} x_i I_{ij} x_j$$

$$= I_{11} x_1^2 + I_{22} x_2^2 + I_{33} x_3^2 +$$

$$+ 2 I_{12} x_1 x_2 + 2 I_{13} x_1 x_3 + 2 I_{23} x_2 x_3$$

Allora:

<u>Proposizione</u> (escludendo asse)

la forma quadratica $f(\underline{x})$ è definita positiva;

$$\begin{cases} f(\underline{x}) = \underline{x} \cdot I_0(\underline{x}) \geq 0 & \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \\ f(\underline{x}) = 0 \iff \underline{x} = 0 \end{cases}$$

<u>Dim</u> $\underline{x} \cdot I_0(\underline{x}) = \underbrace{\|\underline{x}\|^2}_{\geq 0} \underbrace{I_{\mathcal{E}_{OP}}}_{\geq 0}$

Viceversa quando $\underline{x} = \underline{0}$ allora $\|\underline{x}\| = 0$

Terza parte

$$\left\{ P : \|\underline{x}_P - \underline{x}_0\|^2 = \frac{c}{I_{\mathcal{E}_{OP}}} \right\}$$

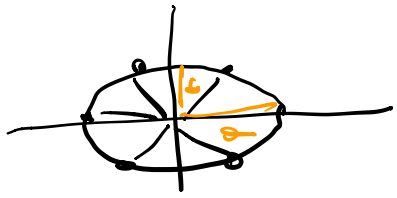
$$= \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\underline{x}) = \underline{x} \cdot I_0(\underline{x}) = c \right\}$$

$$f(\underline{x}) = I_{11} x_1^2 + I_{22} x_2^2 + I_{33} x_3^2 + 2 I_{12} x_1 x_2 + 2 I_{13} x_1 x_3 + 2 I_{23} x_2 x_3$$

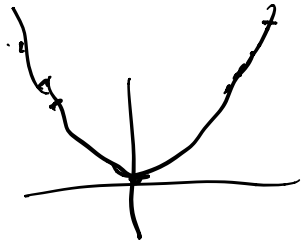
<u>Proposizione</u> $\forall c > 0$, il luogo geometrico $f(\underline{x}) = c$ è un ellissoide di centro O, chiamato l'ellissoide di inerzia del rigido relativo ad O

Dim per costruzione: è una quadrica, polinomio di 2° grado, di centro O, i cui punti sono a distanza fissata da O.

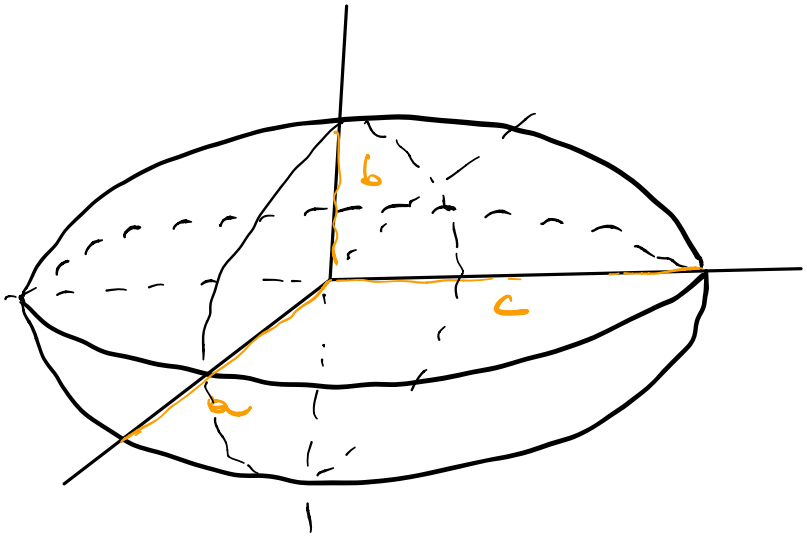
[come in 2D



distanza fissata



]

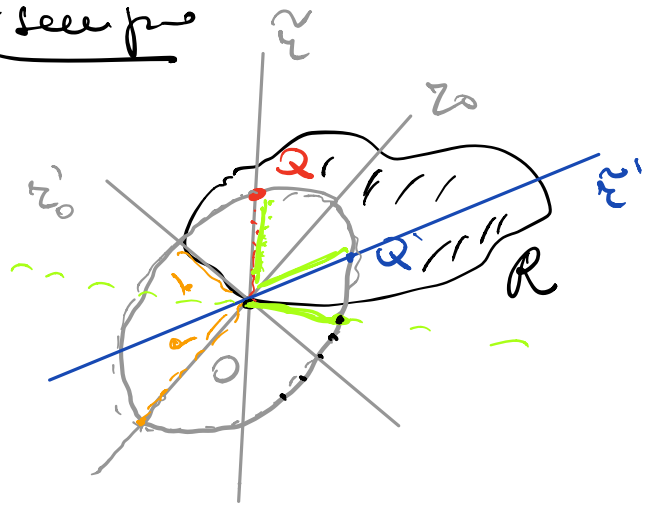


Nel caso rigido piano $\longrightarrow$ ellisse di inerzia

$$\underline{x} = (x_1, x_2) \quad , \quad I_O = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} \end{pmatrix}$$

$$f(\underline{x}) = \underline{x} \cdot I_0(\underline{x}) = I_{11} x_1^2 + I_{22} x_2^2 + 2 I_{12} x_1 x_2$$

Esempio



$$f(\underline{x}) = \underline{x} \cdot I_0(\underline{x}) = 1$$

$$\|\underline{x}_P - \underline{x}_0\|^2 = \frac{1}{I_{r_0 P}}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_{r_0}}}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{I_{r_0'}}}$$

Q' simmetrico rispetto a Q $\quad I_{\tilde{r}} = I_{\tilde{r}'}$

$I_{\tilde{r}}$ si può determinare graficamente $\quad I_{\tilde{r}} = \dfrac{1}{\overline{OQ}^2}$

$$b \le \overline{OQ} \le a$$

quindi $\quad \dfrac{1}{a^2} = I_{r_0} \le I_{\tilde{r}} \le I_{r_0'} = \dfrac{1}{b^2}$

Assi principali di inerzia

Un ellissoide può essere messo in forma canonica

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

(come per l'ellisse $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$)

$\underline{x} \cdot I_O(\underline{x}) = 1 \rightarrow J_1 x_1^2 + J_2 x_2^2 + J_3 x_3^2 = 1$

$\uparrow$

$$I_O = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$ è diagonale

1. $I_O(\underline{i}) = J_1 \underline{i}$, chiamo $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$

$I_O(\underline{j}) = J_2 \underline{j}$

$I_O(\underline{k}) = J_3 \underline{k}$

$\forall$ versore $\underline{u}$ di un asse di simmetria

$I_O \cdot \underline{u} = \lambda \underline{u} \rightarrow \underline{u}$ autovettore

λ autovalore

Assi principali di inerzia relativi a O

= assi di simmetria dell'ellissoide

= autovettori I_O

= assi tc i momenti deviatori si annullano