SISTEMI DINAMICI

31 marzo 2021

Sistemi dinamici discreti,

mappe iterate. Nel caso 1-dim

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-volte}}$

$x_0 \in \mathbb{R} \xrightarrow{f} x_1 \xrightarrow{f} x_2 \xrightarrow{f} x_3 \longrightarrow \cdots$

$\longrightarrow$ orbita costruita a partire da x_0

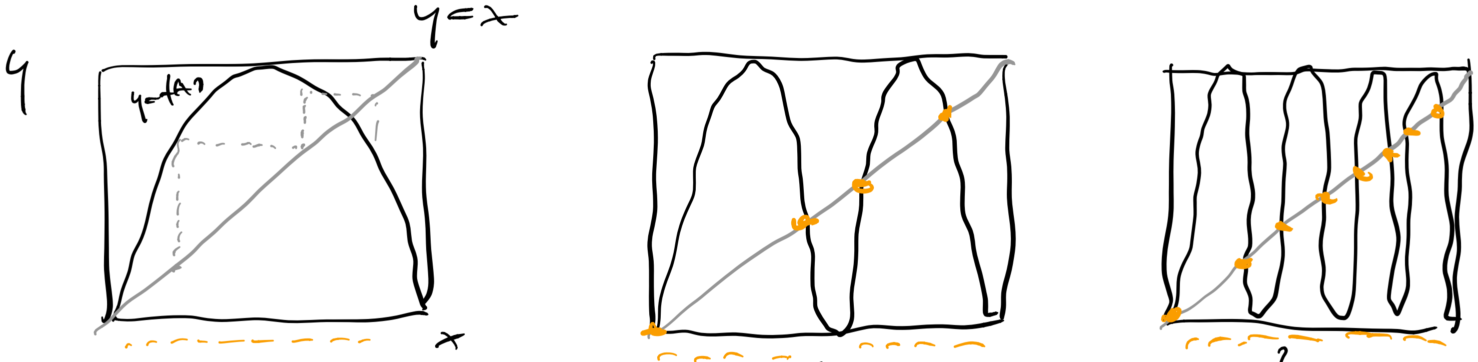
- Orbite
- Punti fissi $f(x) = x$ $\left(\begin{matrix}\text{repulsivi} \\ \text{attrattivi}\end{matrix}\right)$
- Punti periodici $f^n(x) = x$
- Biforcazioni: $f_\lambda(x)$. Un punto fisso $f_{\lambda^*}(x^*)$, risultato di stabilità strutturale quando $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$ altrimenti $\longrightarrow$ possibilità di biforcazioni

\- Caos

Modello logistico discreto

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$$

$\lambda = 4$



f_4 $\qquad$ f_4^2 $\qquad$ f_4^3

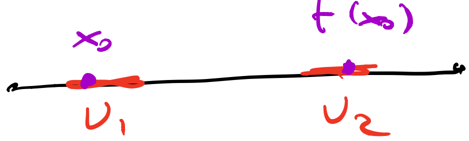
$f_4^n(x)=x$ è un punto periodico di f_4

f_4^n $\quad 2^n$ punti fissi, ovvero 2^n intervalli in tutto I

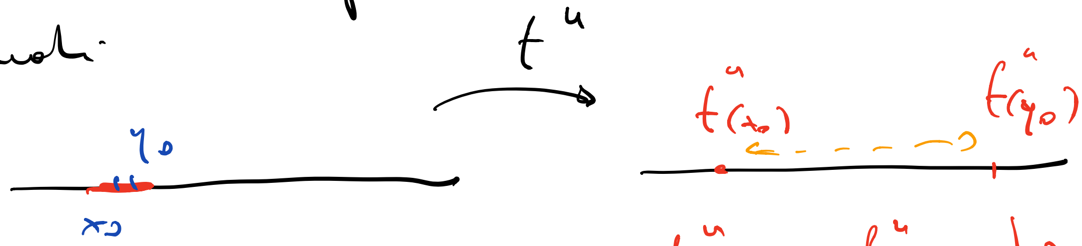
<u>Caos</u>

- punti periodici sono densi in I
- transitività

$f^n(x_0)$ per qualche n



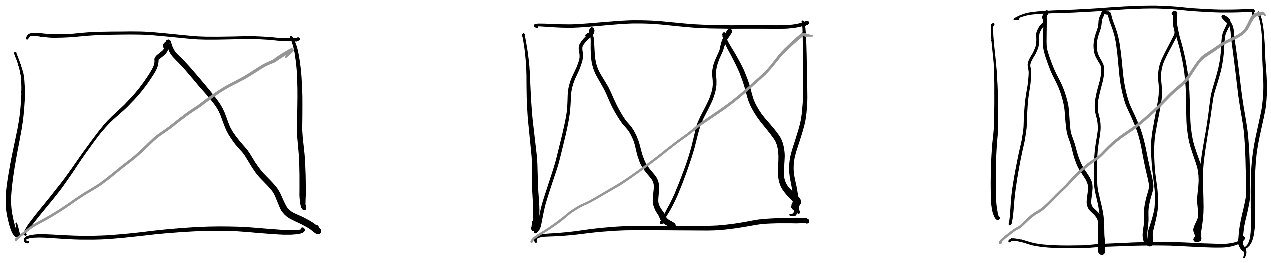
• Sensibilità rispetto alle condizioni iniziali



$$|f^n(x_0) - f^n(y_0)| \geq \beta$$

Mappa a Tenda

$$T(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2-2x & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



T $\qquad$ T^2 $\qquad$ T^3

T^n ha 2^n punti fissi

T : punti fissi sono densi

è transitiva

e sensibile alle condizioni iniziali

T è "simile" a f_4

Ricordiamo $f: I \to I$, $g: J \to J$ sono coniugate se $\exists\, h$ omeomorfismo $h: I \to J$ t.c. il diagramma

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & I \arrow[d, "h"] \\ J \arrow[r, "g"'] & J \end{tikzcd}$$

commuti

$$h \circ f(x) = g \circ h(x)$$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] \arrow[d] & I \arrow[r] \arrow[d, "h"] & I \arrow[d] \\ J \arrow[r] & J \arrow[r] & J \end{tikzcd}$$

f e g coniugate $\to$ sono nella stessa "classe"

In particolare

<u>Teorema</u>: $f: I \to I$, $g: J \to J$ coniugate da $h: I \to J$. Allora se f è caotica in I, g è caotica in J

<u>Dim</u> $U \subset J$ aperto e $h^{-1}(U) \subset I$

- Siccome f è caotica, i punti periodici sono densi in I. Quindi possiamo trovare un punto periodico $x \in h^{-1}(U)$ per f. Chiamiamo n il periodo. Allora

$$g^n(h(x)) = h(f^n(x)) = h(x)$$

$h(x)$ punto periodico di g

Allora punti periodici di g sono densi in J.

- Prendiamo U e V aperti di J.

Transitività di f: $\exists\, x_1 \in h^{-1}(U)$ e $m > 0$ tali che $f^m(x_1) \in h^{-1}(V)$

Tuttavia $h(x_1) \in U$ e quindi

$$g^m(h(x_1)) = h(f^m(x_1)) \in V$$

Quindi g è transitiva.

- Sia β la costante di transitività di f. Denotiamo $I = [\alpha_0, \alpha_1]$

Possiamo assumere $\beta < \alpha_1 - \alpha_0$

Per ogni $x \in [\alpha_0, \alpha_1 - \beta]$, consideriamo

$$|h(x+\beta) - h(x)|$$

è una funzione continua su $[\alpha_0, \alpha_1 - \beta]$ ed è positiva. Allora ha un minimo, che chiamiamo β'. Allora h prende intervalli di lunghezza β in I e li manda in intervalli di lunghezza almeno β' in J. Possiamo usare β' come costante di sensibilità per g. ∎

Spesso compattezza è un concetto troppo forte; ma possiamo accontentarci di un risultato più debole:

diremo che h è una

semi-compattazione se invece di essere 1 a 1, è al più n a 1 e soddisfa le stesse proprietà.

Anche una semi-coniugazione preserva il comportamento caotico (su intervalli di lunghezza finita) con la differenza che doppia cicli in cicli senza conservare il periodo minimo.

Seconda parte

Teorema: la funzione logistica $f_4(x) = 4x(1-x)$ è caotica

Dim: Costruiamo la semi-coniugazione

Prendiamo $h(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos \pi x)$

(è 2 a 1 in $[0,1]$, tranne che per $x = \frac{1}{2}$ dove $h(\frac{1}{2}) = 1$)

è continua

$$h(T(x)) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos 4\pi x) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi[-2x+2])) & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \cos 4\pi x\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(2\cos^2 2\pi x - 1\right)$$

$$= 1 - \cos^2 2\pi x =$$

$$= 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\pi x\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\pi x\right)$$

$$= f_4\left(h(x)\right)$$

$\blacksquare$

Abbiamo visto: semi-coniugazione tra f_4 e T mostra che f_4 è caotica.

Introduciamo una misura quantitativa di caos: <u>esponente di Liapunov</u>

Idea: il tasso di attrazione e repulsione di traiettorie vicine è esponenziale

Consideriamo: $x_{n+1} = f(x_n)$ e

prendiamo due dati iniziali

x_0 , $x_0 + \varepsilon$

Definiamo : esponente di Liapunov

$$\lambda = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \frac{1}{N} \log \frac{|f^N(x_0+\varepsilon) - f^N(x_0)|}{\varepsilon}$$

$$\left(\lim_{\substack{N \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \frac{|f^N(x_0+\varepsilon) - f^N(x_0)|}{\varepsilon} = \lim_{N \to \infty} e^{\lambda N} \right)$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log \left| \frac{d f^N}{dx}(x_0) \right| =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log |(f^N)'(x_0)|$$

Prendiamo la derivata (der. funzione composta)

$$(f^N)'(x_0) = (f(f^{N-1}(x)))'(x_0) =$$

$$= [f'(f^{N-1})]_{(x_0)} \, (f^{N-1})'(x_0)$$

$$= f'(f^{N-1})_{(x_0)} \, [f'(f^{N-2})]_{(x_0)} \, (f^{N-2})'_{(x_0)}$$

$\vdots$

$$= f'(\underbrace{f^{N-1}(x_0)}_{x_{N-1}}) \cdot f'(\underbrace{f^{N-2}(x_0)}_{x_{N-2}}) \cdot$$

$$f'(\underbrace{f^{N-3}(x_0)}_{x_{N-3}}) \cdots f'(\underbrace{f(x_0)}_{x_1})\, f'(x_0) =$$

$$= \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i)$$

Quindi

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \left| (f^N)'(x_0) \right| =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \left| \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \right|$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log \left| f'(x_i) \right|$$

Notiamo che $\lambda = \lambda(x_0)$ dipende dalla condizione iniziale

<u>Esempio</u> Prendiamo un k-ciclo stabile.

(x_0 stabile se $|f'(x_0)| < 1$; allo stesso modo diciamo che un k-ciclo è stabile se $|(f^k)'(x_0)| < 1$)

Allora se $|(f^k)'(x_0)| < 1$,

$$\log |(f^k)'(x_0)| < \log 1 = 0$$

Allora $\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \log|f'(x_i)|$

$$= \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\log|f'(x_i)|$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i =$$

sequenza periodica periodo p

$$= \frac{1}{n}\left(\left\lfloor \frac{n}{p}\right\rfloor \sum_{i=1}^{p} x_i + \sum_{j=1}^{n \bmod p} x_j\right)$$

prendo $n\to\infty$

$$= \underbrace{\frac{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}{\frac{n}{p}}}_{\to 1}\sum_{i=1}^{p} \frac{x_i}{p} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n \bmod p} x_j}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

\# finito di termini

$\xrightarrow[n\to\infty]{} \quad \sum_{i=1}^{p} \frac{x_i}{p}$

$$\lambda = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} \log|f'(x_i)| =$$

$$= \frac{1}{k}\log|(f^k)'(x_0)| < 0$$

se $|(f^k)'(x_0)| = 0$, allora $\lambda = \ln 0 = -\infty$

chiamiamo il ciclo superstabile

Mappa a Tenda:

$$T(x) = \begin{cases} 2xr & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2r(1-x) & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

Allora $|T'(x)| = 2r \quad \forall x \in [0,1]$

tranne che $x = \frac{1}{2}$. Per $x_i \neq \frac{1}{2}$

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln|T'(x_i)| =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln 2r$$

$$= \lim_{N\to\infty} \ln 2r \, \frac{1}{N} \, N = \ln 2r > 0$$

$\Sigma \ln 2r = \ln 2r \, \Sigma$ per $r > \frac{1}{2}$

Per $r > \frac{1}{2}$ $(r=1)$, l' esponente di Liapunov è positivo

$$e^{\lambda N} \qquad (\lambda = \ln 2)$$