Università degli Studi di Trieste

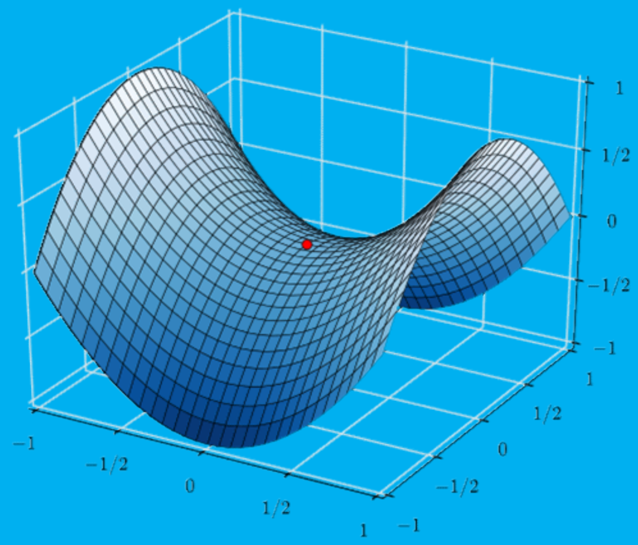
Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

INTEGRALE DI RIEMANN

Parte 6



Proprietà dell'integrale

Teorema

Siano $f, g \in \mathcal{R}(E)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1) Linearità: $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}(E)$ e

$$\int_E \alpha f + \beta g = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$$

2) Monotonia:

i) $f \geq g \implies \int_E f \geq \int_E g$

ii) $|f| \in R(E)$ e $\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|$

In particolare, se E è misurabile e $M_1 = \sup_E |f|$

$$\left| \int_E f \right| \leq M_1 |E|$$

Di conseguenza, se $|E| = 0$ si ha $\int_E f = 0$.

3) i) Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, E misurabile, f integrabile in E

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha \le f(x,y) \le \beta \quad \forall (x,y) \in E$. Allora

$$\alpha |E| \le \int_E f \le \beta |E|$$

In particolare, se $\alpha = \inf_E f$, $\beta = \sup_E f$, $|E| \ne 0$ si ha

$$\alpha \le \frac{\int_E f}{|E|} \le \beta \quad \text{(TEOREMA DELLA MEDIA)}$$

VALORE MEDIO DI f su E

ii) Se E è misurabile, compatto e connesso e se $f \in \mathcal{C}(E)$, allora $\exists\, (x_0, y_0) \in E$ tale che

$$\frac{1}{|E|} \int_E f = f(x_0, y_0)$$

4) $\quad f \cdot g \in \mathcal{R}(E)$

Proprietà degli insiemi misurabili

1) A, B misurabili $\Rightarrow A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B$ misurabili

2) A misurabile $\Rightarrow |A| \geq 0$; $\emptyset$ è misurabile e $|\emptyset| = 0$

3) A, B misurabili $\Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

4) A, B misurabili, $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$

Proposizione

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}(E)$, $F \subseteq E$, F misurabile

Allora $f \in \mathcal{R}(F)$.

Inoltre, se $f \geq 0$, $\int_F f \leq \int_E f$

Dim: Sia Q rettangolo tale che $Q \supseteq E \supseteq F$.

F misurabile $\Rightarrow \exists \int_F 1_F = \int_Q 1_F$. Posto $\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in E \\ 0 & \text{se } (x,y) \in Q \setminus E \end{cases}$

si ha, poiché $f \in \mathcal{R}(E)$, $\exists \int_E f = \int_Q \tilde{f} = \int_Q \tilde{f} \cdot 1_E \leftarrow \tilde{f} \cdot 1_E = \tilde{f}$

$\Rightarrow \exists \int_Q \tilde{f} 1_E \cdot 1_F = \int_Q \tilde{f} 1_F = \int_F f$.

PRODOTTO DI FUNZIONI INTEGRABILI SU Q QUINDI INTEGRABILE SU Q

$1_E \cdot 1_F = 1_F$ PERCHÉ $F \subseteq E$

$\tilde{f} \cdot 1_F (x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in F \\ 0 & \text{se } (x,y) \in Q \setminus F \end{cases}$

Se $f \geq 0$ si ha $\tilde{f} \geq 0$ e quindi $\tilde{f} 1_E \geq \tilde{f} 1_F$

$$\Rightarrow \int_E f = \int_Q \tilde{f} = \int_Q \tilde{f} 1_E \geq \int_Q \tilde{f} 1_F = \int_F f$$

$\tilde{f} = \tilde{f} 1_E$ MONOTONIA DELL'INTEGRALE $\tilde{f} 1_F = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in F \\ 0 & \text{se } (x,y) \in Q \setminus F \end{cases}$

Proposizione

Siano $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ limitati, $f: E_1 \cup E_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata

f integrabile su $E_1, E_2, E_1 \cap E_2 \Rightarrow f$ integrabile su $E_1 \cup E_2$.

Inoltre si ha

$$\int_{E_1 \cup E_2} f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f - \int_{E_1 \cap E_2} f$$

Sia $E = E_1 \cup E_2$, $E \subseteq Q$ rettangolo, $\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in E \\ 0 & \text{se } (x,y) \in Q \setminus E \end{cases}$

Si ha $\quad 1_E = 1_{E_1} + 1_{E_2} - 1_{E_1 \cap E_2}$

Dimostriamo che $f 1_{E_i}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in E_i \\ 0 & \text{se } (x,y) \in E \setminus E_i \end{cases}$ è integrabile su E $(i=1,2)$.

Infatti, si osservi innanzitutto che

$$\tilde{f} 1_{E_i}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in E_i \\ 0 & \text{se } (x,y) \in Q \setminus E_i \end{cases} = \begin{cases} (f \cdot 1_{E_i})(x,y) & \text{se } (x,y) \in E \\ 0 & \text{se } (x,y) \in Q \setminus E \end{cases}$$

Quindi, poiché $\exists \int_{E_i} f$, si ha

$$\exists \int_{E_i} f = \int_Q \tilde{f} 1_{E_i} = \int_E f \cdot 1_{E_i}$$

In maniera analoga si prova che

$$\exists \int_E f \cdot 1_{E_1 \cap E_2} = \int_{E_1 \cap E_2} f$$

Dalla $1_{E_1 \cup E_2} = 1_E = 1_{E_1} + 1_{E_2} - 1_{E_1 \cap E_2}$ si ha

$$f\, 1_{E_1 \cup E_2} = f \cdot 1_E = f \cdot 1_{E_1} + f \cdot 1_{E_2} - f\, 1_{E_1 \cap E_2}$$ e integrando su E

$$\exists \int_E f\, 1_{E_1 \cup E_2} = \int_E f\, 1_{E_1} + \int_E f\, 1_{E_2} - \int_E f\, 1_{E_1 \cap E}$$

(NB: l'integrale a sinistra esiste perchè esistono tutti gli integrali a destra dell'uguale)

cioè $$\exists \int_{E_1 \cup E_2} f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f - \int_{E_1 \cap E_2} f$$

La precedente Proposizione viene abitualmente usata per calcolare gli integrali in un dominio unione di un numero finito di sottodomini con intersezioni a misura nulla.

Infatti, con l'ipotesi aggiuntiva $|E_1 \cap E_2| = 0$ si ottiene

$$\int_{E_1 \cup E_2} f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$$

poiché in tal caso $\int_{E_1 \cap E_2} f = 0$.

NB: La precedente Proposizione non è invertibile.
Ad esempio:

$Q = [0,1]^2$, $Q_1 = [0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$ ($\mathbb{Q} = \{\text{razionali}\}$)

$Q_2 = Q \setminus Q_1$ ($\Rightarrow Q_1 \cap Q_2 = \emptyset \Rightarrow |Q_1 \cap Q_2| = 0$)

$\Rightarrow \exists \int_Q 1_Q$ ma $\nexists \int_{Q_1} 1_Q$ e $\nexists \int_{Q_2} 1_Q$.

Proposizione

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrabile in E con $E = E_1 \cup E_2$, E_1, E_2 misurabili

Allora f è integrabile in E_1, E_2 e $E_1 \cap E_2$ e si ha

$$\int_E f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f - \int_{E_1 \cap E_2} f$$

Dim: E_1, E_2 misurabili $\Rightarrow E_1 \cap E_2$ misurabile

$E_1, E_2, E_1 \cap E_2 \subseteq E$ e $\exists \int_E f$ per ipotesi

$$\Rightarrow \exists \int_{E_1} f, \int_{E_2} f, \int_{E_1 \cap E_2} f$$

La formula $\int_E f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f - \int_{E_1 \cap E_2} f$ segue dalla Proposizione precedente

$\square$

NB: anche in questo caso ovviamente, se $|E_1 \cap E_2| = 0$ si ha

$$\int_E f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$$

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato, misurabile, con $|E|=0$.

Quali funzioni sono integrabili su E?

Proposizione

$f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f limitata, $|E|=0 \Rightarrow \exists \int_E f = 0$

Dim: L'insieme D dei punti discontinuità di f ha misura nulla poichè $D \subseteq E$ e $|E|=0$. E misurabile $\Rightarrow |\mathcal{F}r(E)|=0$
$\Rightarrow \exists \int_E f$. Si ha $\int_E f = 0$ per una proprietà degli integrali.

Proposizione

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile in E e sia $g: E \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata tale che $E_1 = \{(x,y) \in E : f(x,y) \neq g(x,y)\}$ abbia misura nulla.

$$\Rightarrow \quad \exists \int_E g = \int_E f$$

Dim: Definiamo $E_2 = E \setminus E_1$ e $h(x,y) = f(x,y) - g(x,y)$

Sia $Q \supseteq E$ un rettangolo.

Poniamo poi $h_1 = h|_{E_1}$, $h_2 = h|_{E_2}$ (restrizioni di h a E_1 e E_2 rispettivamente)

Poiché $|E_1| = 0$ ed h_1 è limitata (poiché f e g lo sono), $\exists \int_{E_1} h_1 = 0$.

Poiché $f(x,y) = g(x,y)$ $\forall (x,y) \in E_2$, si ha $h_2(x,y) = 0$ $\forall (x,y) \in E_2$

$$\Rightarrow \tilde{h}_2(x,y) = \begin{cases} h_2(x,y) & \text{se } (x,y) \in E_2 \\ 0 & \text{se } (x,y) \in Q \setminus E_2 \end{cases} = 0$$

$$\Rightarrow \exists \int_{E_2} h_2 = \int_Q \tilde{h}_2 = 0$$

Inoltre $E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow |E_1 \cap E_2| = 0$, quindi $\exists \int_{E_1 \cap E_2} h = 0$.

Per una Proposizione precedente

$$\exists \int_E h = \int_{E_1} h + \int_{E_2} h - \int_{E_1 \cap E_2} h = \int_{E_1} h_1 + \int_{E_2} h_2 - \int_{E_1 \cap E_2} h = 0 + 0 + 0 = 0.$$

f, h integrabili $\Rightarrow g = f + h$ integrabile e si ha

$$\int_E g = \int_E f + \int_E h = \int_E f$$

Università degli Studi di Trieste

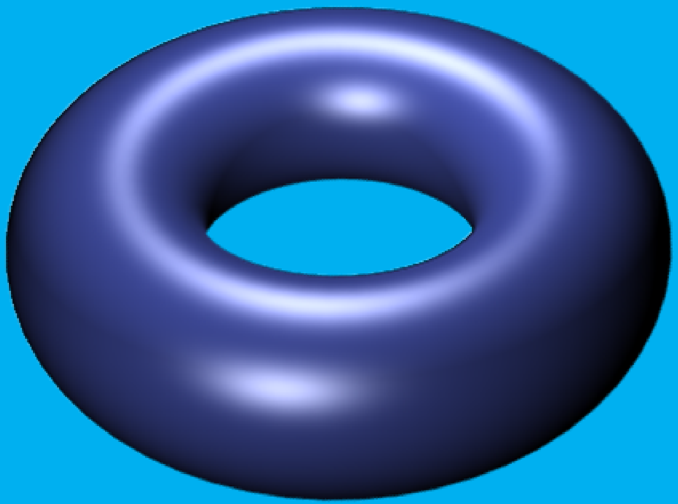
Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

INTEGRALE DI RIEMANN

Parte 7



Teorema Siano $E \subseteq \mathbb{R}^2$, E aperto, $T : E \to T(E) \subseteq \mathbb{R}^2$ biunivoca,

$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, tale che

i) $T \in \mathcal{C}^1(E)$

ii) J_T matrice jacobiana di T è tale che $\underbrace{\det J_T(u,v)}_{\text{JACOBIANO}} \neq 0$ in E

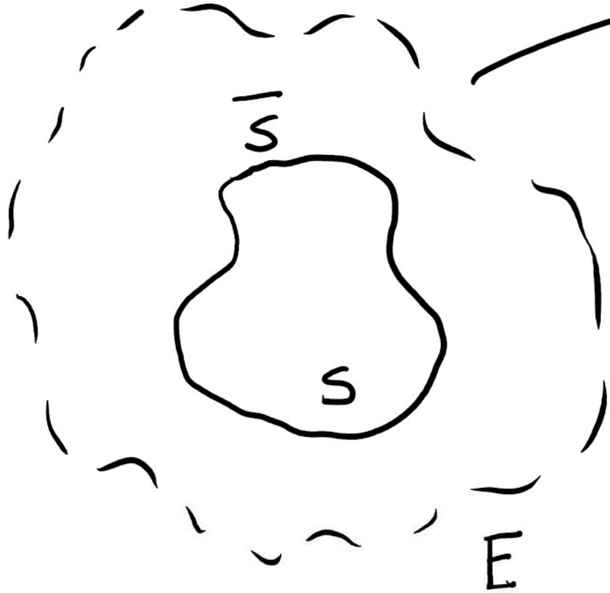
Sia $S \subseteq E$ tale che $\overline{S} \subseteq E$. Allora

a) S è misurabile $\Longleftrightarrow$ $T(S)$ è misurabile

b) Se S è misurabile e $f \in \mathcal{C}(T(\overline{S}))$ si ha

$$\iint_{T(S)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S \underbrace{f\big(x(u,v), y(u,v)\big)}_{(f \circ T)(u,v)} \underbrace{\left|\det J_T(u,v)\right|}_{\text{valore assoluto}} du\,dv$$

T



$T : E \subseteq \mathbb{R}^2 \to T(E) \subseteq \mathbb{R}^2$ biunivoca

$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$

$T \in \mathscr{C}^1(E)$

$\det J_T(u,v) \neq 0$ in E

S misurabile

$f \in \mathscr{C}(T(\bar{S}))$

E aperto

$\bar{S} \subseteq E$

$$\Rightarrow \iint_{T(S)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(x(u,v), y(u,v))\,|\det J_T(u,v)|\,du\,dv$$

NB: Nei casi pratici E e $T(E)$ sono spesso aperti misurabili

Se è così e se T e le sue derivate sono continue e limitate in E

a) vale sotto l'ipotesi più debole $S \subseteq E$

b) vale se f è continua e limitata in $T(S)$

Si può anche ammettere che biunivocità di T e iii) siano valide su E eccetto un insieme di misura nulla.

In tal caso è ancora vero che $S \subseteq E$ misurabile $\Rightarrow T(S)$ misurabile e la formula con gli integrali resta valida.

Coordinate polari

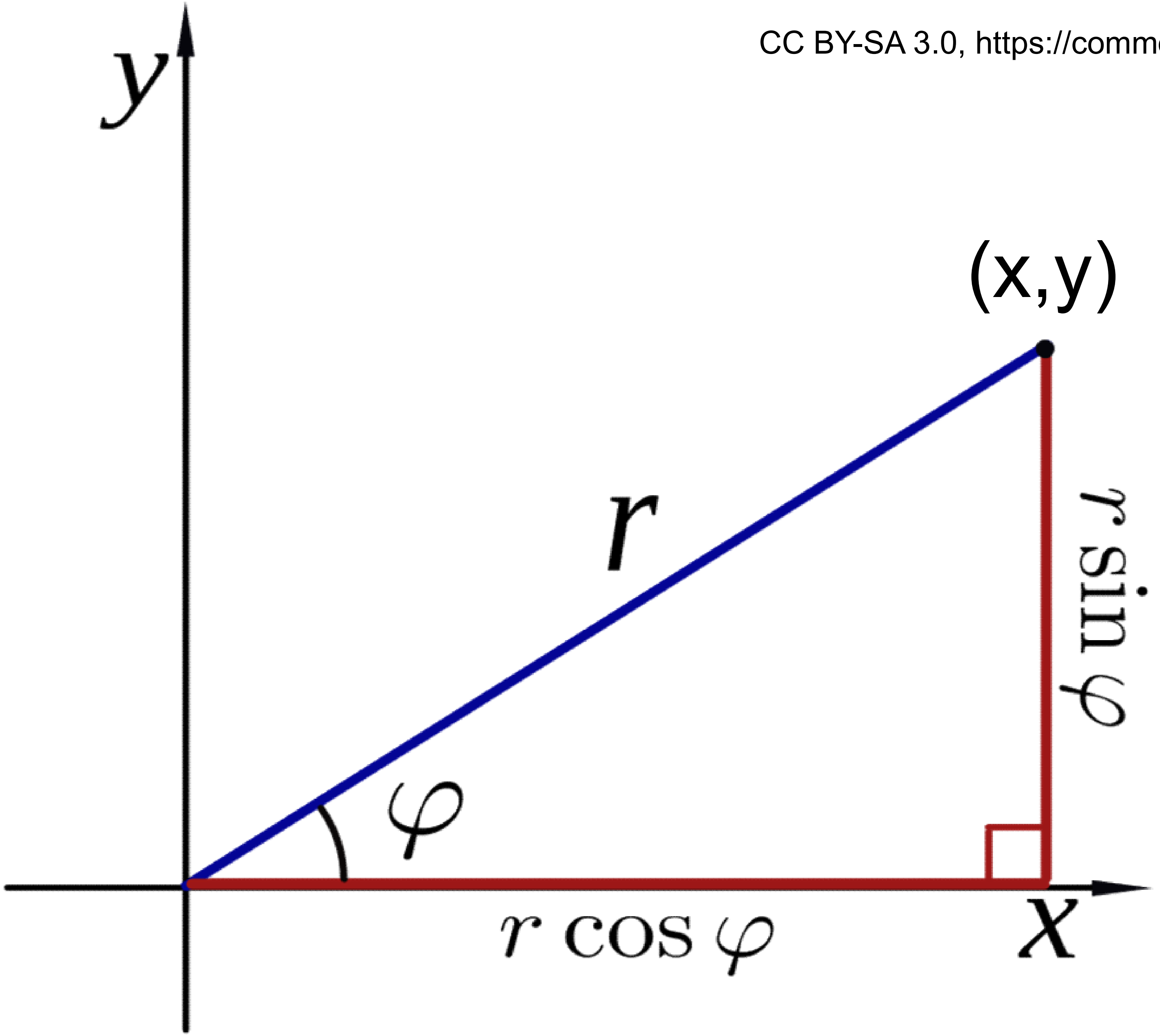
$$T: (\rho,\vartheta) \longrightarrow (\underbrace{\rho\cos\vartheta}_{x(\rho,\vartheta)}, \underbrace{\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta}_{y(\rho,\vartheta)})$$

NB: Poiché $\rho > 0$ e $\vartheta \in \,]0, 2\pi[$,
$\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta = 0 \iff \vartheta = \pi$,
ma allora
$\rho\cos\vartheta = \rho\cos\pi = -\rho < 0$

$$T: \,]0,+\infty[\times]0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\}$$

$$J_T(\rho,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ \mathrm{sen}\,\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{pmatrix} \Rightarrow \det J_T(\rho,\vartheta) = \rho$$

CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1443285



$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$\Rightarrow$ Se $f : A = T(E) \to \mathbb{R}$, A limitato e misurabile,

f continua e limitata su A

$\Rightarrow$ si può applicare il teorema precedente e si ha

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{T^{-1}(A)} f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta$$

JACOBIANO

NB: A può essere qualunque sottoinsieme limitato e misurabile di $\mathbb{R}^2$. Infatti $\iint_A f$ non cambia togliendo da A la sua intersezione con $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ che ha misura nulla.

Esempi

1) $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$ $\quad A = \{(x,y) \mid 0 < y < \sqrt{3}x,\ 1 < x^2+y^2 < 4\}$

f è continua in $\overline{A}$ $\Rightarrow$ f è limitata su $\overline{A}$ (e su A) per il teorema di Weierstrass, essendo continua

$\Rightarrow$ f è limitata e continua su A

A è misurabile poichè $Fr(A)$ è misurabile e $|Fr(A)| = 0$

$\Rightarrow$ f è integrabile su A.

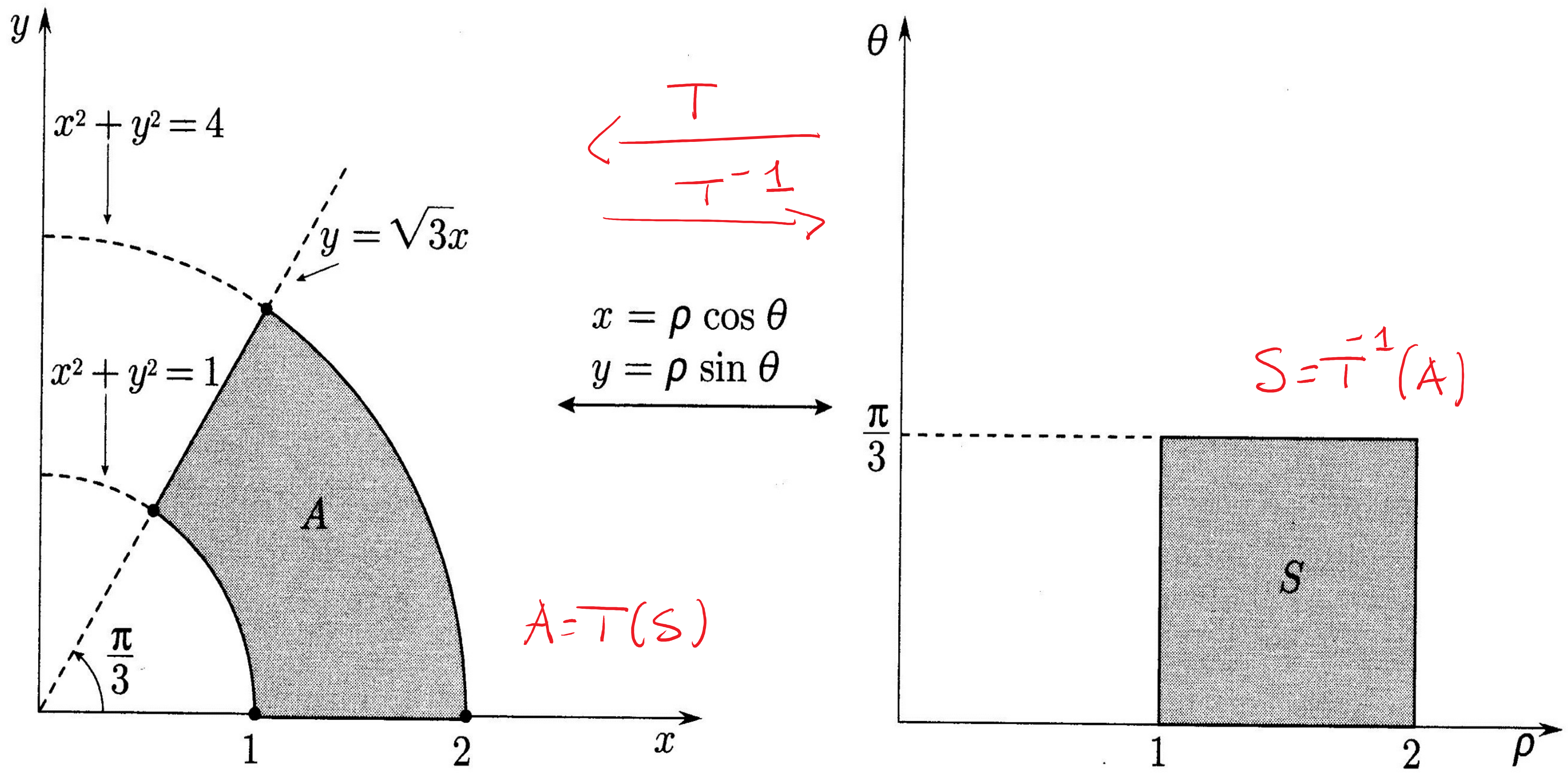


Figura 5.10. Il rettangolo S è trasformato nel segmento di corona circolare dal cambiamento a coordinate polari.

Passiamo a coordinate polari

$$S = T^{-1}(A) = \left\{ (\rho, \vartheta) : 0 < \vartheta < \frac{\pi}{3},\ 1 < \rho < 2 \right\}$$

$$f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta) = \frac{1}{1+\rho^2}$$

$$\Rightarrow \int_A f(x,y) = \iint_S f(\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta = \int_0^{\pi/3} d\vartheta \int_1^2 \frac{\rho}{1+\rho^2}\,d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{6}\log\frac{5}{2}$$

$$t = 1+\rho^2 \Rightarrow dt = 2\rho\,d\rho$$

$$\frac{\rho}{1+\rho^2}\,d\rho \rightarrow \frac{1}{2}\,\frac{1}{t}\,dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{\rho}{1+\rho^2}\,d\rho = \frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\log t$$

$$\Rightarrow \int \frac{\rho}{1+\rho^2}\,d\rho = \frac{1}{2}\log(1+\rho^2)$$

2) $f(x,y) = (x^2 - y^2)\log\left(1 + (x+y)^4\right)$

$A = \{(x,y) : x > 0,\ 0 < y < 2 - x\}$

Come prima A è aperto, f è continua e limitata su A (per il teor. di Weierstrass su $\overline{A}$) e A è misurabile ($\Leftarrow |Fr(A)| = 0$)

$\Rightarrow$ f è integrabile su A.

Poniamo $u = x + y$ $\quad v = x - y$ $\Rightarrow x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$

cioè $T(u,v) = \left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right)$

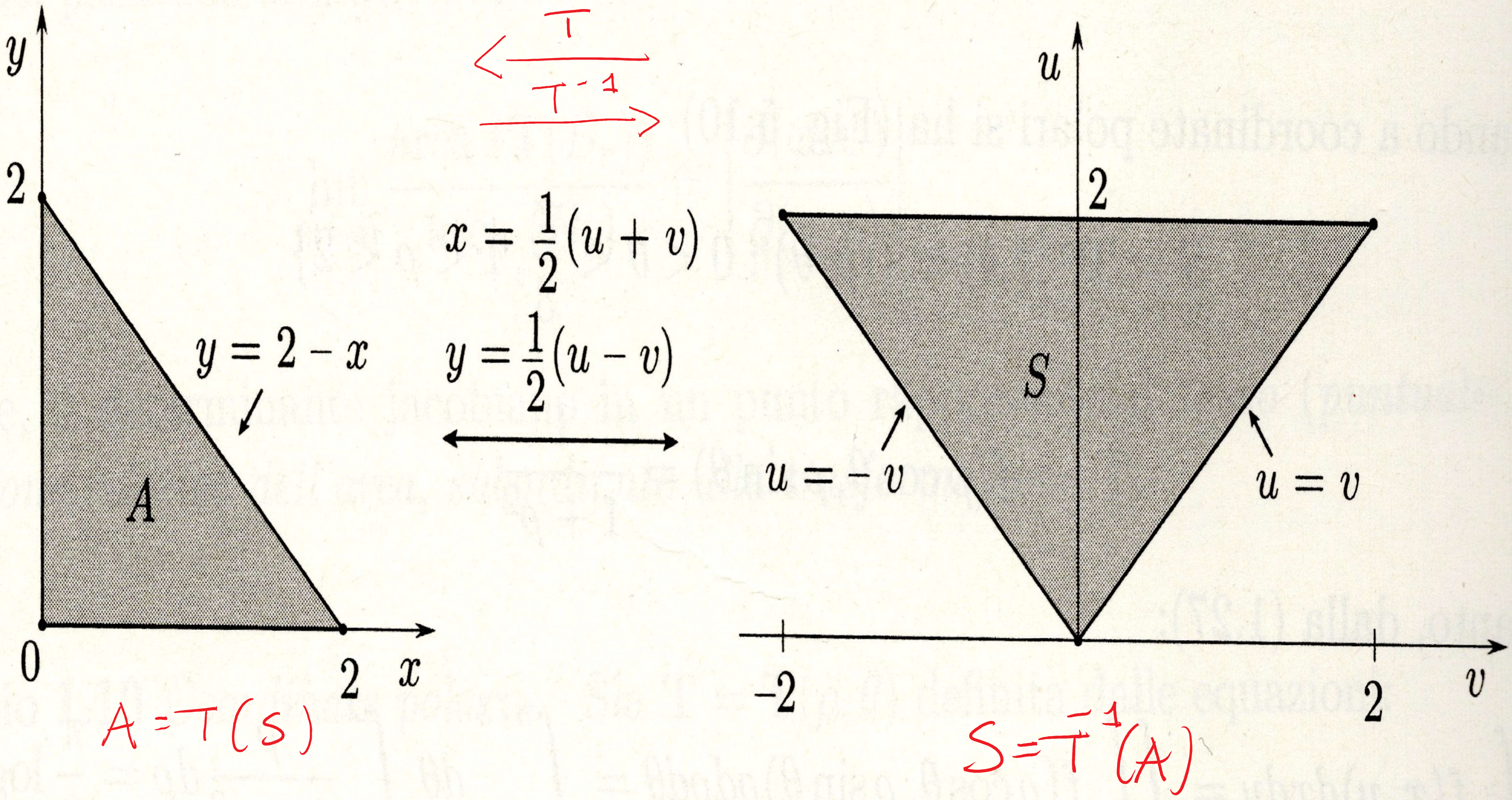


Figura 5.11. S è trasformato in A dalla (1.28).

2) $f(x,y) = (x^2 - y^2)\log(1 + (x+y)^4)$

$A = \{(x,y) : x > 0 \,,\, 0 < y < 2 - x\}$

Come prima A è aperto, f è continua e limitata su A (per il teor. di Weierstrass su $\overline{A}$) e A è misurabile ($\Leftarrow |Fr(A)| = 0$)

$\Rightarrow$ f è integrabile su A.

Poniamo $u = x+y \quad v = x-y \Rightarrow x = \dfrac{u+v}{2} \,,\, y = \dfrac{u-v}{2}$

cioè $T(u,v) = \left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\right)$

$$J_T(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \det J_T(u,v) \right| = \frac{1}{2} \neq 0 \ \forall (u,v)$$

$$\Rightarrow S = T^{-1}(A) = \{ (u,v) \mid v < u < 2,\ u > -v \}$$

Infatti: $x > 0 \iff u + v > 0$, $y < 2 - x \iff x + y = u < 2$

$y > 0 \iff u - v > 0 \iff u > v$

$$(f \circ T)(u,v) = u \cdot v \cdot \log(1 + u^4)$$

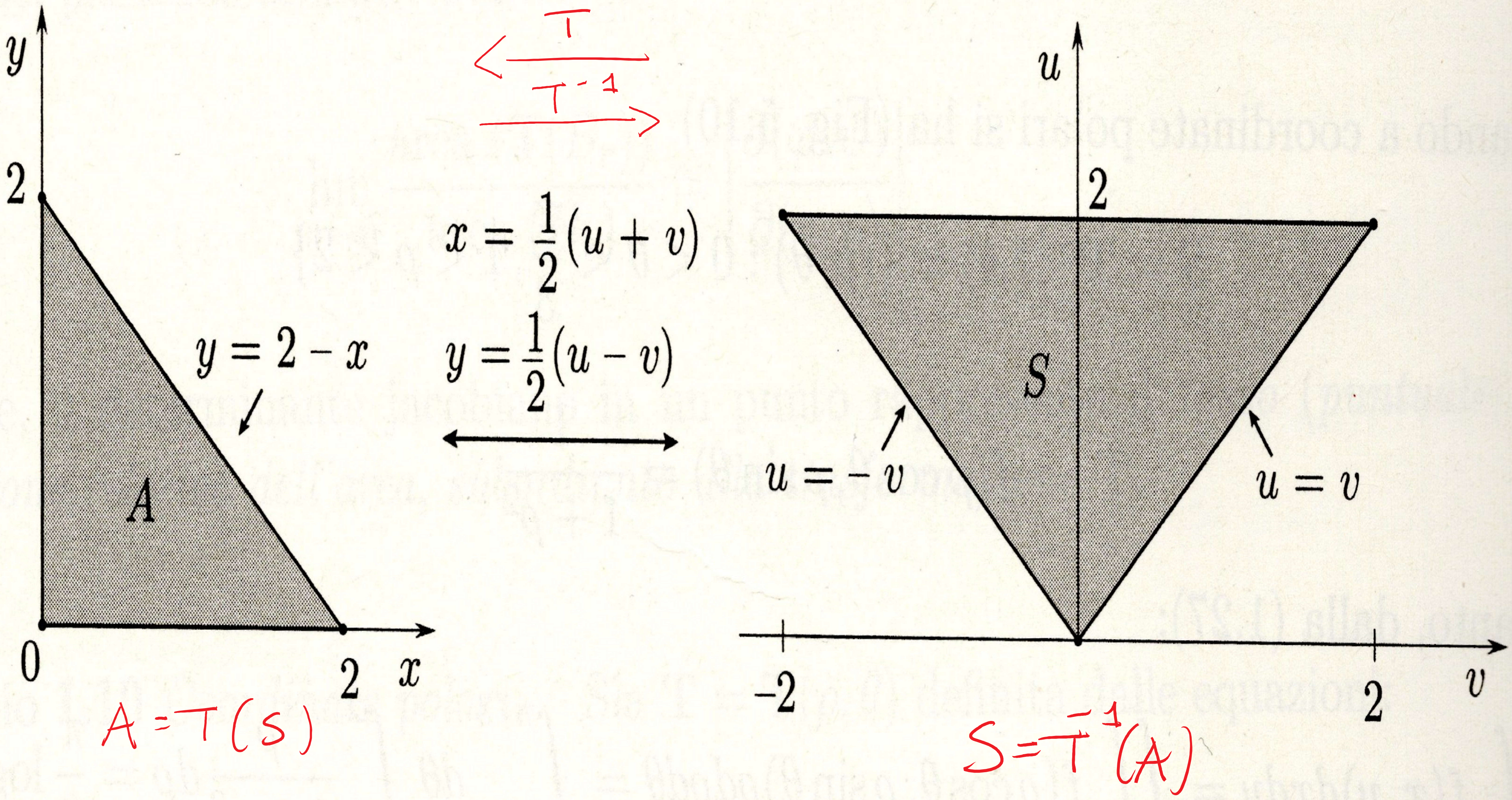


Figura 5.11. S è trasformato in A dalla (1.28).

$$\Rightarrow \int_A f(x,y) = \iint_S \frac{1}{2} f\left(x(u,v), y(u,v)\right) =$$

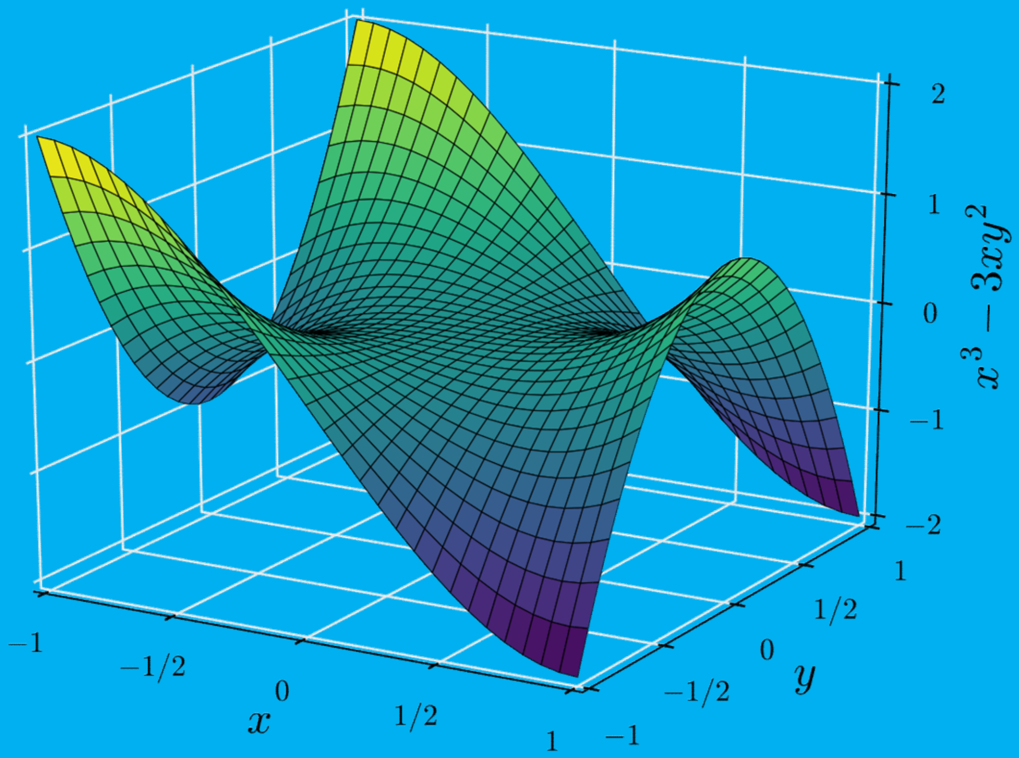
$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\int_{-u}^{u} v \, dv \right) u \log(1+u^4) \, du = 0.$$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

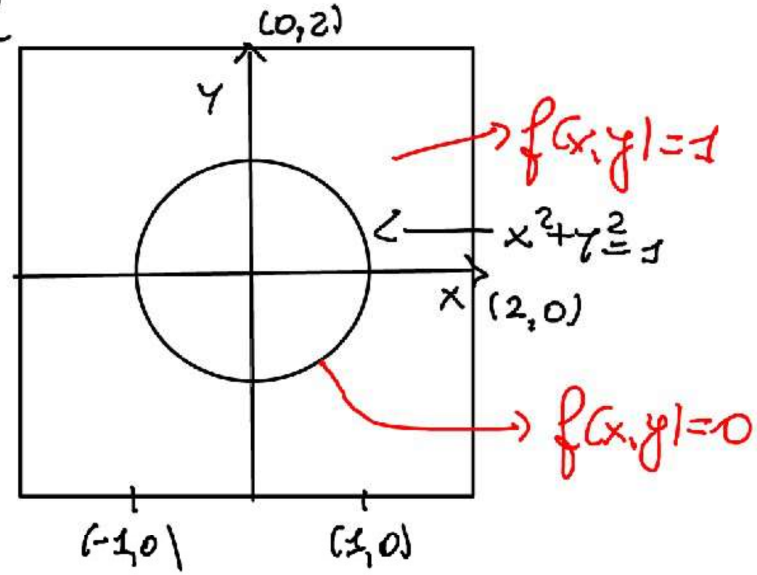
Docente: Renato Pelessoni



INTEGRALE DI RIEMANN
Parte 8

3) $Q = [-2,2] \times [-2,2]$ $\quad f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x^2+y^2=1 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



f è integrabile su Q? $\displaystyle\int_Q f = ?$

f è integrabile su Q perché limitata e generalmente continua: è infatti discontinua su $P = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$ che è unione di 2 grafici di funzioni integrabili:

$x \longrightarrow \sqrt{1-x^2}$ e $x \longrightarrow -\sqrt{1-x^2}$, quindi di misura nulla.

Per applicare la formula di riduzione dobbiamo verificare che, $\forall y \in [-2,2]$, $\exists \int_{-2}^{2} f(x,y)\, dx$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1,1] \wedge \left(y = \sqrt{1-x^2} \vee y = -\sqrt{1-x^2} \right) \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi(x) = f(x,y)$ è discontinua in al più 2 punti

$$\Rightarrow \exists \int_{-2}^{2} f(x,y)\, dx = x \Big|_{-2}^{2} = 4 \quad \forall y \in Y \Rightarrow \int_E f = \int_{-2}^{2} 4\, dy = 16$$

Si poteva procedere anche diversamente (e molto più facilmente...)

Sia $g(x,y)=1 \quad \forall (x,y) \in Q$

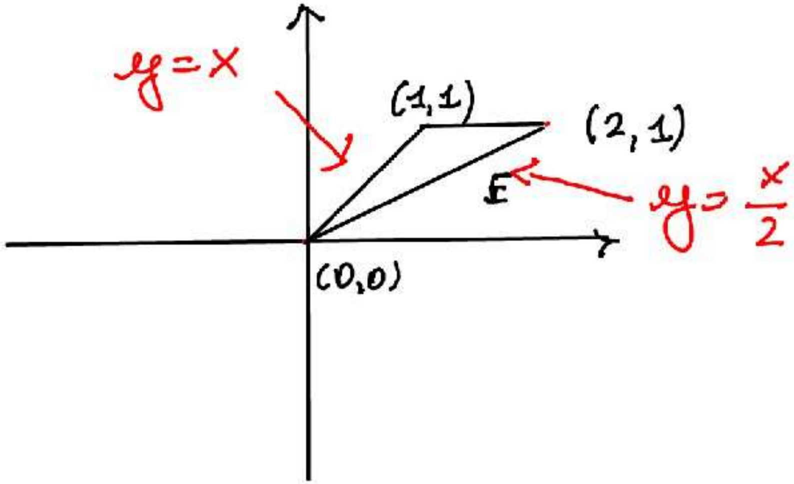
$$\{(x,y)\in Q \mid g(x,y)\neq f(x,y)\} = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$$

che ha misura nulla

$$\Rightarrow \exists \int_Q f = \int_Q g = \int_Q 1 = m(Q) = 4\cdot 4 = 16$$

4) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ E = triangolo di vertici $(0,0), (1,1), (2,1)$

Calcolare $\int_E f$



E è normale rispetto entrambi gli assi

$E = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1,\ y \le x \le 2y\}$

$E = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ \frac{x}{2} \le y \le \varphi(x)\}$ $\quad \varphi(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ 1 & \text{se } x \in [1,2] \end{cases}$

PREFERIBILE

CONTINUA

$$\Rightarrow \int_E \sqrt{x+y} = \int_0^1 dy \int_y^{2y} \sqrt{x+y}\,dx = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+y)^{3/2}\Big|_{x=y}^{x=2y} dy =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (3y)^{3/2} - (2y)^{3/2} dy = \frac{2}{3}$$

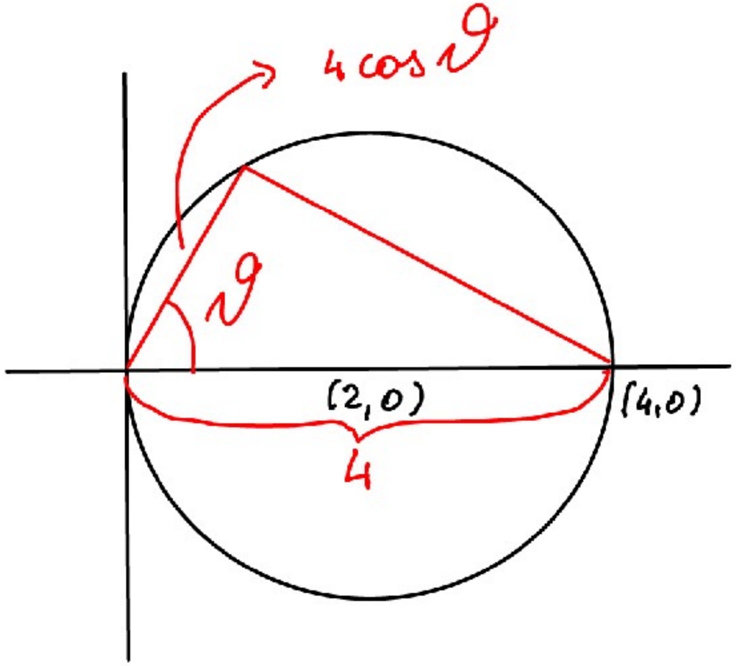
5) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-4x<0\}$ $\quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Calcolare $\int_E f(x,y)$

$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2+y^2-4<0\}$

$x = \rho\cos\vartheta, \quad y = \rho\,\text{sen}\,\vartheta$

$E' = \{(\rho,\vartheta) : -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2},\ 0 < \rho < 4\cos\vartheta\}$



$$\int_E \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{4\cos\vartheta}\rho^2\,d\rho\right)d\vartheta =$$

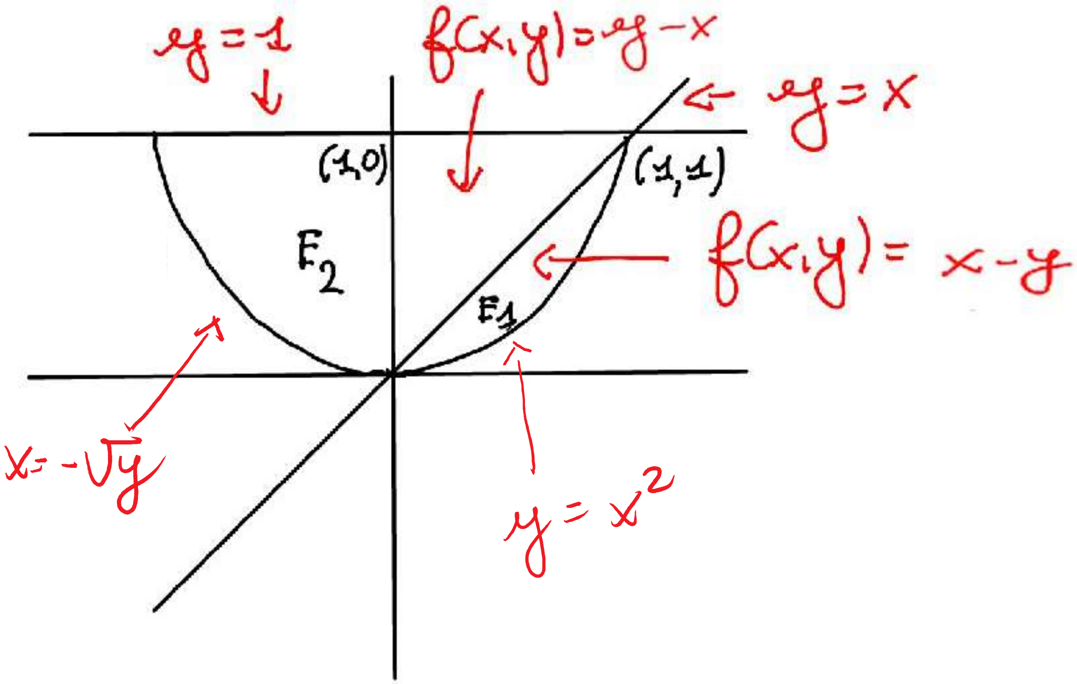
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=4\cos\vartheta} d\vartheta = \frac{64}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\vartheta\,d\vartheta = \frac{64}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\vartheta\cdot\cos\vartheta\,d\vartheta \overset{\text{PER PARTI}}{=}$$

$$= \underbrace{\frac{64}{3}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos^2\vartheta}_{=0}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{64}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\,\mathrm{sen}^2\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta = \frac{128}{3}\,\frac{\mathrm{sen}^3\vartheta}{3}\Bigg|_{\vartheta=-\pi/2}^{\vartheta=\pi/2} = \frac{256}{9}$$

NB: si potrebbe usare in parte la simmetria, che verrà introdotta in seguito.

6) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1],\ \ x^2 \leq y < 1\}$

$f(x,y) = |y-x|$ Calcolare $\int_E f$



$E_1 = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}$

$E_2 = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1,\ -\sqrt{y} \leq x \leq y\}$

$$\int_E f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$$

$$\int_{E_1} f = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} (x-y)\, dy \right) dx = \dots = \frac{1}{60}$$

$$\int_{E_2} f = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{y} y - x \, dx \right) dy = \dots = \frac{49}{60}$$

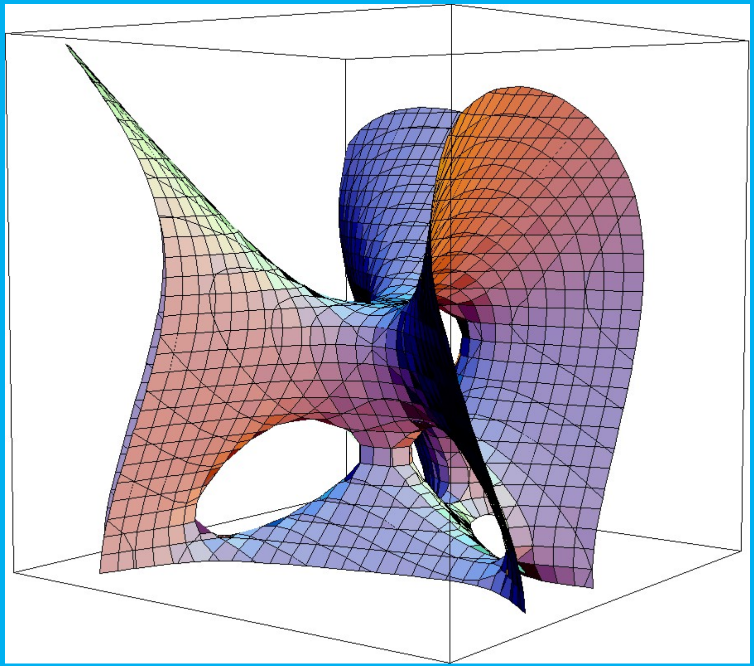
$$\Rightarrow \int_E f = \frac{1}{60} + \frac{49}{60} = \frac{5}{6}$$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni



INTEGRALE DI RIEMANN
Parte 9

Integrali e simmetrie

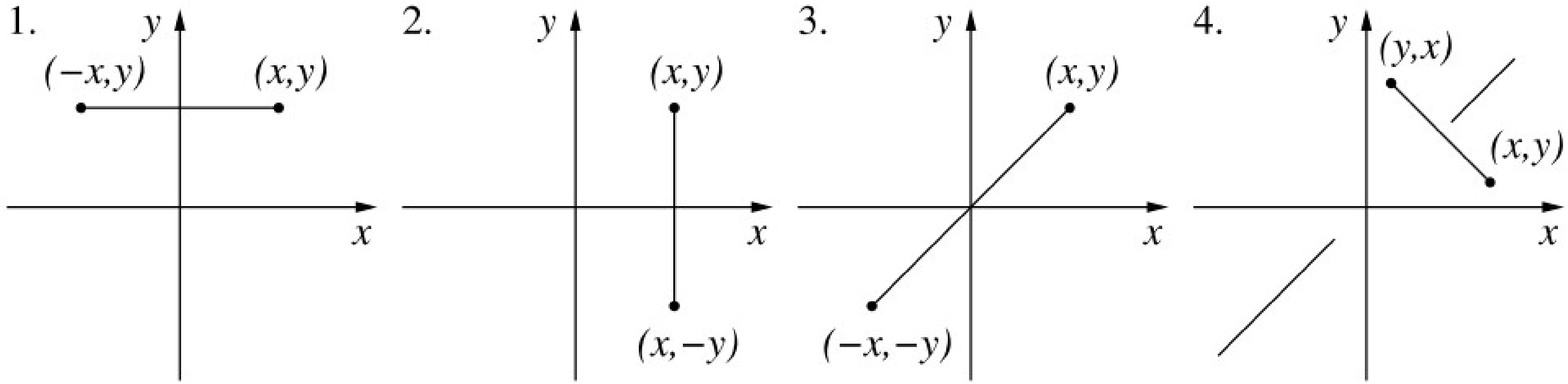
Consideriamo le seguenti simmetrie $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, per le quali si ha
$S(S(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$

a) Riflessione rispetto l'asse delle y: $S(x, y) = (-x, y)$

b) Riflessione rispetto l'asse delle x: $S(x, y) = (x, -y)$

c) Riflessione rispetto l'origine: $S(x, y) = (-x, -y)$

d) Riflessione rispetto la retta $y = x$: $S(x, y) = (y, x)$



1.
y
(−x,y)
(x,y)
x
2.
y
(x,y)
(x,−y)
x
3.
y
(x,y)
(−x,−y)
x
4.
y
(y,x)
(x,y)
x

Def.: Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia S una simmetria a), b), c) o d)

D è SIMMETRICO RISPETTO S (S-SIMMETRICO) se

$$(x,y) \in D \iff S(x,y) \in D$$

Esempio: $[-1,1] \times [-1,1]$ è simmetrico rispetto le simmetrie a), b), c), d)

$[0,1] \times [0,1]$ è simmetrico rispetto rispetto $y = x$

$[0,1] \times [1,2]$ non è simmetrico rispetto a), b), c), d).

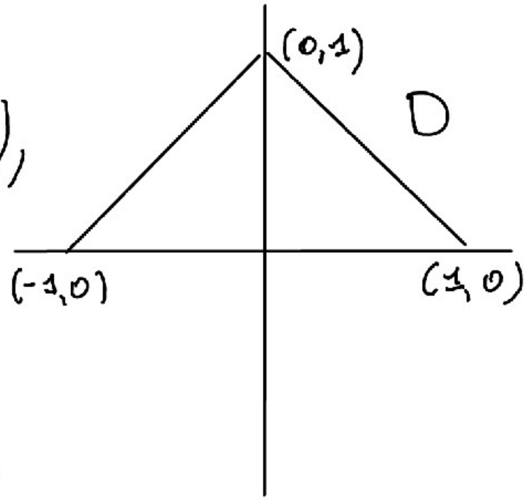
Sia S una delle simmetrie viste e sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ S-simmetrico

Diremo che $f: D \to \mathbb{R}$ è

1) S-pari se $f(S(x,y)) = f(x,y) \quad \forall (x,y) \in D$

2) S-dispari se $f(S(x,y)) = -f(x,y) \quad \forall (x,y) \in D$

Esempio



D, triangolo di vertici $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, è simmetrico rispetto $S(x,y)=(-x,y)$.

$f(x,y)=x^2y\,\mathrm{sen}\,x$ è S-dispari:

$$f(S(x,y))=f(-x,y)=x^2y\,\mathrm{sen}(-x)=$$

$$=-x^2y\,\mathrm{sen}\,x=-f(x,y)$$

Se $D\subseteq\mathbb{R}^2$ è S-simmetrico e $f:D\to\mathbb{R}$ è S-dispari (e si può applicare il teorema del cambio di variabili) allora $\int_D f=0$

Esempi

1) $f(x,y) = (x^2+y^2)\arctan(x+y)$, $D = \{(x,y) \mid x^2+3y^2 \le 1\}$

D è S-simmetrico rispetto $S(x,y) = (-x,-y)$
(simmetria rispetto l'origine):

$S(x,y) \in D \iff (-x,-y) \in D \iff (-x)^2 + 3(-y)^2 \le 1$

$\iff x^2+3y^2 \le 1 \iff (x,y) \in D$

f ē $\mathcal{S}$-dispari:

$$f(-x,-y) = \left((-x)^2 + (-y)^2\right) \arctan(-x-y) =$$

$$= -(x^2+y^2)\arctan(x+y) = -f(x,y)$$

$$\Rightarrow \int_D f = 0$$

2) $f(x,y) = 3 + x \log(1+x^2+y^2)$, $D = [-1,1] \times [0,3]$

f non è S-dispari rispetto a), b), c), d), ma

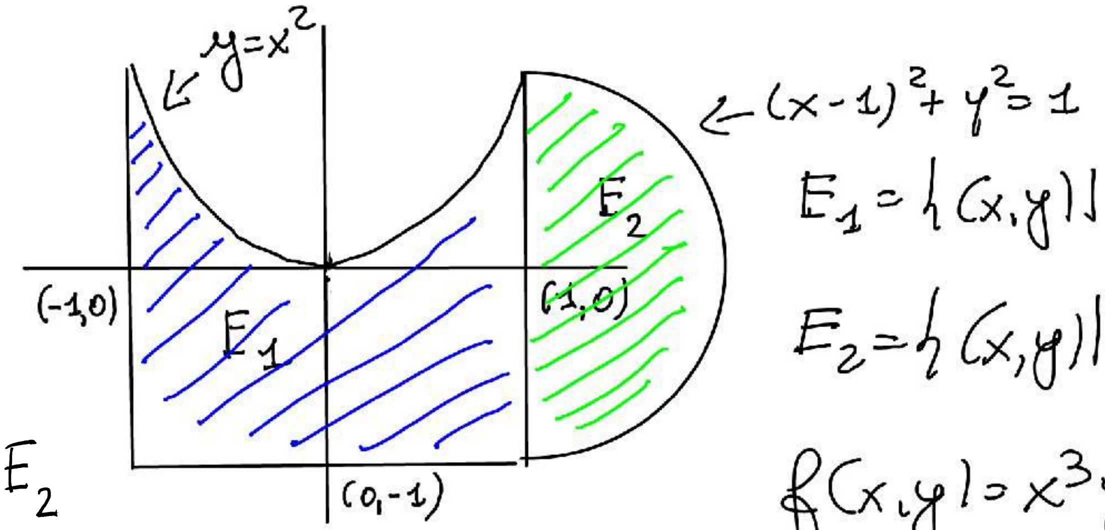
$g(x,y) = x \log(1+x^2+y^2)$ è S-dispari rispetto

$S(x,y) = (-x,y)$ (simmetria rispetto all'asse y)

D è S-simmetrico

$$\Rightarrow \int_D f = \int_D 3 \, dx\, dy + \int_D g(x,y)\, dx\, dy = 3 \cdot \text{area}(D) = 3 \cdot 6 = 18$$

3)



$$E_1 = \{(x,y) \mid -1 \leq y \leq x^2,\ x \in [-1,1]\}$$

$$E_2 = \{(x,y) \mid 1 \leq x,\ (x-1)^2+y^2 \leq 1\}$$

$$f(x,y) = x^3 y^5$$

$$E = E_1 \cup E_2$$

E, E_1, E_2 misurabili perchè hanno frontiera di misura nulla.

$$|E_1 \cap E_2| = |\{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x_1 = 1,\ y \in [-1,1]\}| = 0$$

$$\Rightarrow \int_E f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$$

E_1 simmetrico rispetto $S(x,y)=(-x,y)$ (asse y)

f S-dispari : $f(S(x,y)) = f(-x,y) = (-x)^3 y^5 = -x^3 y^5 = -f(x,y)$

$\Rightarrow \int_{E_1} f = 0$

E_2 simmetrico rispetto $S(x,y)=(x,-y)$ (asse x)

f S-dispari : $f(S(x,y)) = f(x,-y) = x^3(-y)^5 = -f(x,y)$

$\Rightarrow \int_{E_2} f = 0$

$\Rightarrow \int_E f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f = 0$

Più in generale si ha

E dominio di integrazione

E' simmetrico di E rispetto la simmetria S

$\Rightarrow E' = \{ S(x,y) \mid (x,y) \in E \} = S(E)$

a) f S-pari $\Rightarrow \int_E f = \int_{E'} f$

b) f S-dispari $\Rightarrow \int_E f = -\int_{E'} f$

$\Rightarrow$ a) f S-pari $\Rightarrow$ $$\int_{E \cup E'} f = \int_E f + \int_{E'} f = 2\int_E f = 2\int_{E'} f$$

b) f S-dispari $\Rightarrow$ $$\int_{E \cup E'} f = \int_E f + \int_{E'} f = 0$$

Il risultato si ottiene tramite cambiamento di variabili
$\Rightarrow$ Devono essere soddisfatte le ipotesi del relativo teorema.

Sia ad esempio $S(u,v) = (\underbrace{v}_{x(u,v)}, \underbrace{u}_{y(u,v)})$ (simmetria rispetto $y=x$)

$S^{-1} = S$, $E' = S(E)$, $E = S(E')$ $\leftarrow$ NELL'ENUNCIATO DEL TEOREMA $T=S$

$$J_S(u,v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det J_S(u,v) = -1 \neq 0 \ \forall (u,v)$$

$$\Rightarrow \iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{E'} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \underbrace{1}_{|\det J_S(u,v)|}\,du\,dv =$$

$$= \int_{E'} f(v,u)\, du\, dv$$

$\Rightarrow$ Se f ē S-pari, cioē $f(u,v) = f(v,u)$ $\forall (u,v)$, si ha

$$\iint_E f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{E'} f(x,y)\, dx\, dy$$

Se invece f ē S-dispari, cioē $f(u,v) = -f(v,u)$ $\forall (u,v)$, si ha

$$\iint_E f(x,y)\, dx\, dy = -\iint_{E'} f(x,y)\, dx\, dy$$

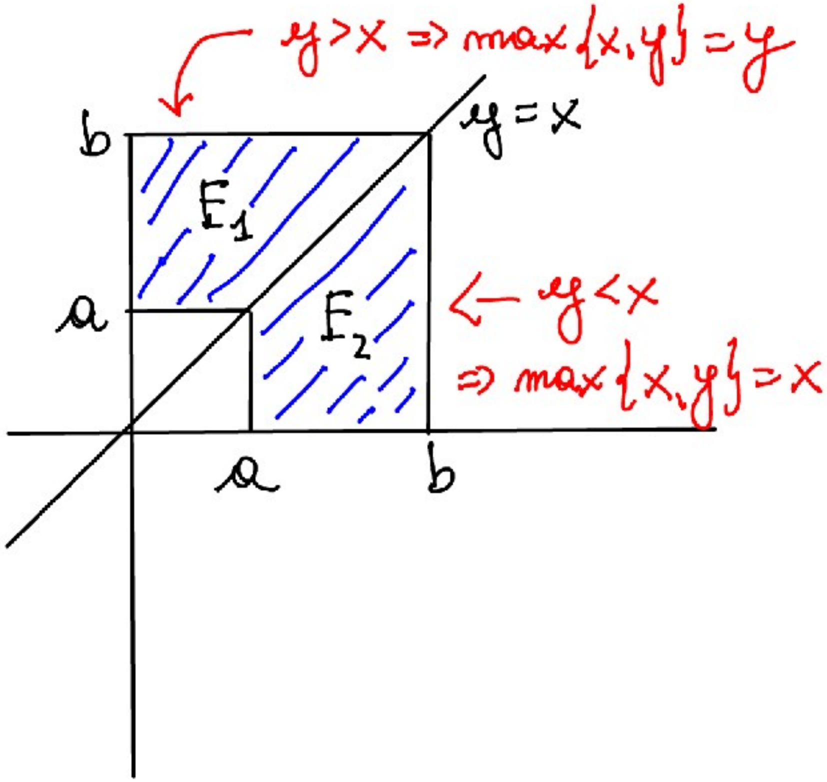
Quindi, se f è S-dispari e E è S-simmetrico, cioè $E = E'$, si ha $\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = -\iint_E f(x,y)\,dx\,dy$

$$\Rightarrow \iint_E f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

Esempio

$f(x,y) = \max\{x,y\}$ $\qquad E = \{(x,y) \mid a \le \max\{x,y\} \le b,\ xy > 0\}$

con $0 < a < b$



$E_1 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le y,\ a \le y \le b\}$

$E_2 = \{(x,y) \mid 0 \le y \le x,\ a \le x \le b\}$

$E = E_1 \cup E_2$

E_2 è il simmetrico di E_1 rispetto la simmetria $S(x,y) = (y,x)$ (rispetto $y=x$)

$$S(E_1) = \{(y,x) \mid (x,y) \in E_1\} = \{(y,x) \mid 0 \leq x \leq y,\ a \leq y \leq b\} =$$

$$= \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq x,\ a \leq x \leq b\} = E_2$$

$f(x,y) = \max\{x,y\}$ è S-pari.

$$f(y,x) = \max\{y,x\} = \max\{x,y\} = f(x,y)$$

$$\Rightarrow \int_{E_1} f = \int_{E_2} f \quad \text{e} \quad \int_E f = 2\int_{E_1} f = 2\int_{E_2} f$$

$$\int_{E_1} f = \int_a^b \left(\int_0^y y \, dx \right) dy = \int_a^b \left(y \int_0^y 1 \, dx \right) dy =$$

$$= \int_a^b y^2 \, dy = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

$$\Rightarrow \int_E f = \frac{2}{3} \left(b^3 - a^3 \right)$$

Integrazione per sostituzione in $\mathbb{R}$ e cambio di variabili

$f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua

$T: [\alpha,\beta] \subseteq \mathbb{R} \to [a,b]$ di classe $\mathcal{C}^1$ e biettiva

$$\int_{T([\alpha,\beta])} f(x)\,dx = \int_{[\alpha,\beta]} f(T(u))\,|T'(u)|\,du$$

jacobiano di T

Ricordiamo che una funzione continua su un intervallo è iniettiva $\Leftrightarrow$ è strettamente monotona

$\Rightarrow T'(u) \neq 0 \quad \forall u \in]\alpha, \beta[$

Se T è strettamente crescente $T([\alpha,\beta]) = [T(\alpha), T(\beta)]$
e $|T'(u)| = T'(u)$

Se T è strettamente decrescente $T([\alpha,\beta]) = [T(\beta), T(\alpha)]$
e $|T'(u)| = -T'(u)$

$\Rightarrow$ Se T è strettamente crescente

$$\int_{T(\alpha)}^{T(\beta)} f(x)\,dx = \int_{T([\alpha,\beta])} f = \int_{[\alpha,\beta]} f(T(u))\,T'(u)\,du = \int_{\alpha}^{\beta} f(T(u))\,T'(u)\,du$$

Se T è strettamente decrescente

$$\int_{T(\alpha)}^{T(\beta)} f(x)\,dx = -\int_{T(\beta)}^{T(\alpha)} f(x)\,dx = -\int_{T([\alpha,\beta])} f = -\int_{[\alpha,\beta]} f(T(u))\,(-T'(u))\,du = \int_{\alpha}^{\beta} f(T(u))\,T'(u)\,du$$

Nella formula del cambio di variabili $|\det J_T(u,v)|$ rappresenta un fattore di scala con cui vengono trasformate le misure (aree, volumi)

TRASFORMAZIONE AFFINE

Ad esempio, sia $f(x) = 1$ e $T(u) = Mu + b$ con $x, u \in \mathbb{R}^2$, M matrice 2×2 e $b \in \mathbb{R}^2$, con $\det M \neq 0$.

$$\Rightarrow J_T(u) = M \quad \text{e} \quad \det J_T(u) \neq 0 \quad \forall u$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{T(E)} 1}_{|T(E)|} = \underbrace{\int_E 1 \, |\det M|}_{|\det M| \, |E|}$$

$$|T(E)| = |\det M| \, |E|$$

Ad esempio, nelle traslazioni $M = I$ matrice identica e $\det M = 1$

$$\Rightarrow |T(E)| = |E|$$

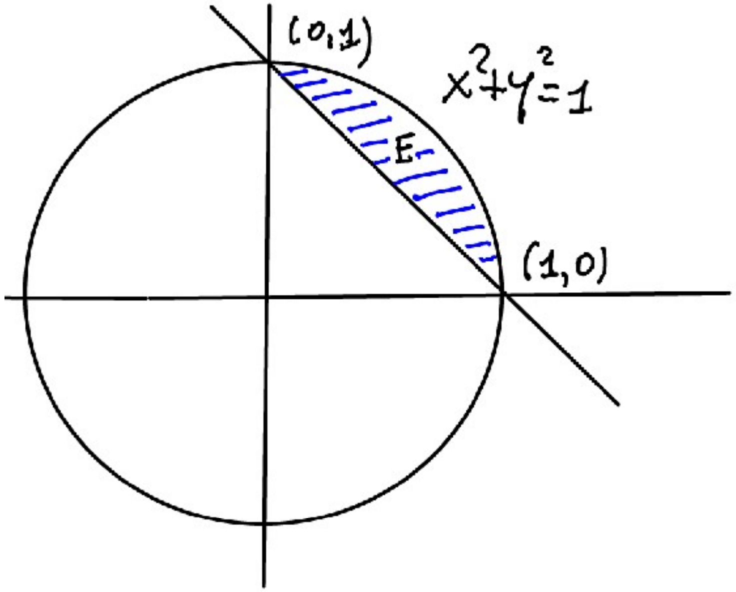
Calcolo di aree con l'integrale di Riemann

Se un insieme E è misurabile, la sua misura può essere interpretata come area e può essere calcolata come $\int_E 1$

Esempi

1) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \, , \, 1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$

E è normale



$$|E| = \iint_E 1\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2} - 1 + x\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

2) Calcolare la misura dell'area della regione di piano

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x \le e,\ \ln x \le y \le e^x\}$$

$$|E| = \int_1^e dx \int_{\ln x}^{e^x} dy = \int_1^e (e^x - \ln x)\, dx = e^x - x\ln x + x \Big|_1^e =$$

$$= e^e - e - 1$$