2 conversione cinetica $\Leftrightarrow$ potenziale elastica

In questi due esercizi vediamo come l'energia cinetica di un corpo dotato di velocità, si può convertire in energia potenziale elastica di compressione di una molla e viceversa

2.1

Un dispositivo di lancio è costituito da una molla di costante $K = 30$ N/m che, compressa di 3 cm, agisce su una pallina di massa $m = 50g$ spingendola lungo un piano privo di attrito. Se la pallina parte da ferma, che velocità finale raggiunge?

In questa situazione possiamo affermare che, non essendoci attriti, tutta l'energia potenziale elastica immagazzinata nella molla a causa della compressione si trasferisce alla pallina, dotandola di velocità v.

Al solito, dividiamo il fenomeno in due parti:

1. Fase iniziale, in cui la molla è compressa di $\Delta s = 3$cm. L'energia meccanica del sistema molla+pallina è puramente potenziale elastica, visto che la pallina ha $v = 0$. Quindi:

$$E_1 = \frac{1}{2}K \cdot \Delta s^2 = 0,0135J$$

2. Fase finale, in cui la molla è tornata alle dimensioni iniziali (quindi si è "scaricata" della sua energia potenziale elastica), trasferendo l'energia alla pallina. L'energia meccanica del sistema è puramente cinetica, dovuta alla velocità assunta dalla pallina, dunque:

$$E_2 = \frac{1}{2}m \cdot v^2$$

Valendo PCEM, possiamo eguagliare le due energie, ottenendo l'equazione:

$$\frac{1}{2}K \cdot \Delta s^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

ossia

$$0,0135 = \frac{1}{2}m \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,0135}{m}} = 0,735m/s$$

2.2

Un corpo di massa $m = 2Kg$ viene accelerato sopra una superficie piana e liscia, partendo da fermo, da una forza costante di $1N$ che agisce per $\Delta t = 2$ secondi e poi lasciato libero. Al termine della superficie è presente un respingente consistente in una molla di costante $K = 100N/m$. contro il quale il corpo va ad urtare, fermandosi. Determinare la compressione Δs della molla, prima che ritorni alle dimensioni iniziali.

Se può essere agevole, si divida il fenomeno in due momenti.

Nella fase 1, è ovvio che il corpo, se parte da fermo, viene accelerato dalla forza costante F che lo spinge per 2 secondi. Al termine della spinta, il corpo ha raggiunto una certa velocità, quindi è stato dotato di energia cinetica.

Questa energia viene poi perduta nella fase 2, perchè nell'urto con la molla essa si trasferisce in lavoro di compressione, ossia viene immagazzinata in energia potenziale elastica, fornendo al dispositivo una certa compressione Δs.

Calcoliamo inizialmente l'ammontare dell'energia cinetica di cui la massa è dotata della prima fase.

Se la forza accelerante vale $F = 1\text{N}$, l'accelerazione uniforme vale, per la seconda legge della dinamica:

$$a = \frac{F}{m} = 0,5 m/s^2$$

Si può procedere ora in due modi, per calcolare l'energia cinetica:

1. la si calcola come lavoro della forza F per produrre lo spostamento s della massa, ove s è calcolato con la legge oraria del moto uniformemente accelerato, e cioè, partendo il corpo da fermo:

   $$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}0,5 \cdot 2^2 = 1m$$

   Dunque :

   $$E_c = L = F \cdot s = 1 \cdot 1 = 1J$$

2. Oppure si calcola direttamente la velocità finale raggiunta dal corpo e poi si usa la formula che dà subito l'energia cinetica. La velocità v_f raggiunta dal corpo vale:

   $$v_f = v_0 + a \cdot t = 0 + 0,5 \cdot 2 = 1m/s$$

   Quindi l'energia cinetica vale:

   $$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1J$$

Ora, nella fase 2, tutta questa energia deve trasferirsi totalmente, essendo trascurabili gli attriti, in energia potenziale elastica della molla, quindi, per il PCEM:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow 1J = \frac{1}{2}K \cdot \Delta s^2 \Rightarrow \Delta s = \sqrt{\frac{1 \cdot 2}{K}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 2}{100}} = 0,141m$$

3 Conversione potenziale el. $\Leftrightarrow$ potenziale grav.

3.1 pot.grav. $\rightarrow$ pot. elastica

E' l'esempio dei dispositivi di lancio a molla, in cui un corpo viene sparato verticalmente oppure lungo un piano inclinato da una molla.

Un dispositivo di lancio è costituito da una molla di costante $K = 10$ N/m che agisce su una pallina di massa $m = 0,1$ Kg. Se la molla viene compressa di $\Delta s = 0,02$ m, a che altezza h arriva la pallina? Quanto devo comprimere la molla se voglio che l'altezza finale sia 2 m? Che costante elastica dovrebbe avere una molla che, comprimendosi di 10 cm porta la pallina (stessa massa) esattamente a 1 m di altezza?

Qui nella fase 1 la pallina è attaccata alla molla, che compressa di 2 cm è stata caricata di energia potenziale elastica.

L'energia potenziale elastica di cui è caricata la molla a causa della compressione vale:

$$E_1 = \frac{1}{2}K\Delta s^2 = 0,1J$$

Questa energia si trasforma, grazie al PCEM che vale in quanto trascuro gli attriti, totalmente in energia potenziale gravitazionale, consentendo al corpo di giungere alla quota massima h tale che:

$$0,1 = mgh \Rightarrow h = \frac{0,1}{m \cdot g} = 0,1m$$

Se si vuole che l'altezza finale sia di $h = 2m$ la molla deve essere maggiormente compressa. In tal caso calcoliamo quanta energia potenziale gravitazionale deve avere la pallina a 2 m di quota.

$$E_p = mgh = 0,1 \cdot 9,81 \cdot 2 = 1,962J$$

Questo ammontare di energia deve essere fornita dalla compressione della molla Δs, tale che:

$$\frac{1}{2}K\Delta s^2 = 1,962J \Rightarrow \Delta s = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,962}{K}} = 0,63m$$

Infine, si può calcolare anche quale deve essere la K di una molla compressa di 10 cm che porta la pallina a 1 m di altezza.

Eguagliando le espressioni delle energie potenziali, si ha:

$$\frac{1}{2}K\Delta s^2 = mgh \Rightarrow K = \frac{2 \cdot mgh}{\Delta s^2} = 196,2N/m$$

3.2 potenziale grav. $\rightarrow$ potenziale el.

Un corpo di massa $m = 1Kg$ cadendo liberamente da un'altezza di 50 cm, di quanto comprime una molla di $K = 243$ N/m che si trova ad h=0?

In questo problema abbiamo un corpo in caduta libera che va a comprimere una molla al termine della caduta.

In situazioni del genere possiamo porre lo zero del potenziale gravitazionale nel punto in cui la molla ha la massima compressione, trascurando quindi la variazione di potenziale dovuta alla diminuzione di quota della molla.

E' ovvio che tutta l'energia potenziale gravitazionale posseduta all'inizio del moto di caduta si deve trasferire in energia potenziale elastica della molla, causandone una compressione Δs tale che:

$$mgh = \frac{1}{2}K\Delta s^2 \Rightarrow \Delta s = \sqrt{\frac{2mgh}{K}} = 0,2m$$
