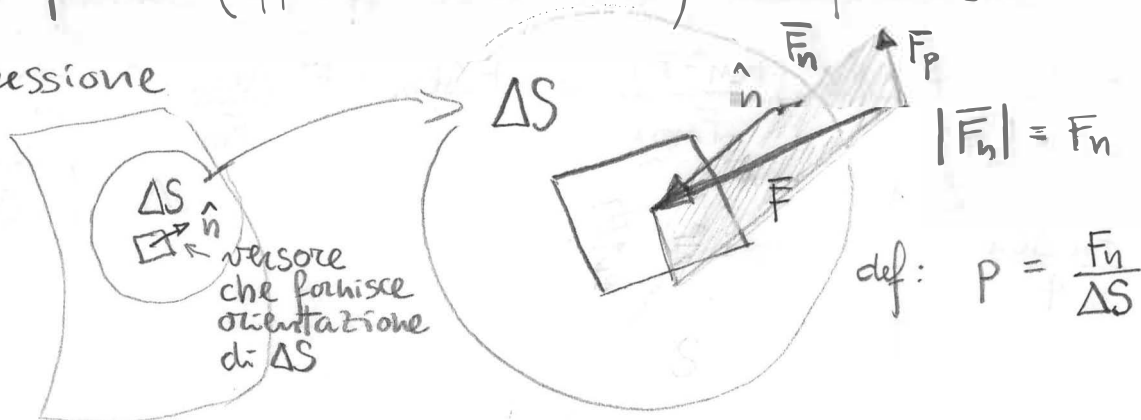


		forma propria	volume proprio
⊙ fluidi	{ liquidi	NO	SI
	{ gas	NO	NO

Noi ora studieremo i liquidi, che hanno volume proprio e sono quindi (approssimativamente) incompressibili.

⊙ pressione



unità SI : $\frac{N}{m^2} = Pa$

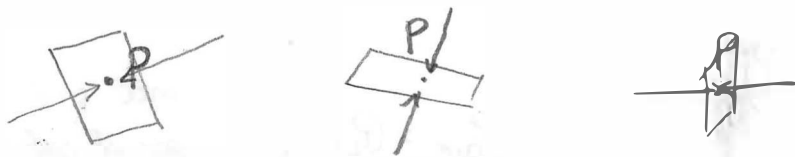
cgs : $\frac{dyne}{cm^2} = barie = 0,1 Pa$

varie $\left\{ \begin{array}{l} 1 atm = 101300 Pa = 760 mmHg = 760 Torr \\ 1 bar = 10^6 barie = 10^5 Pa \cong 1 atm \\ 1 mbar = 10^3 barie \end{array} \right.$

⊙ fluido statica : il fluido è in equilibrio
ogni volumetto del fluido è in equilibrio

⇒ sulla superficie limite di un fluido non ci sono forze tangenti (ma solo normali)

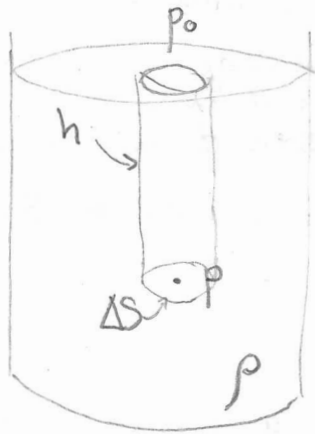
⇒ vale principio di isotropia della pressione: la pressione che si esercita su ΔS non dipende dall'orientazione di ΔS



si parla quindi di pressione in un punto

⇒ vale principio di Pascal: una variazione di pressione sulla superficie limite di un fluido chiuso si trasmette inalterata in ogni punto del fluido.

⊙ Legge di Stevino (pressione idrostatica)



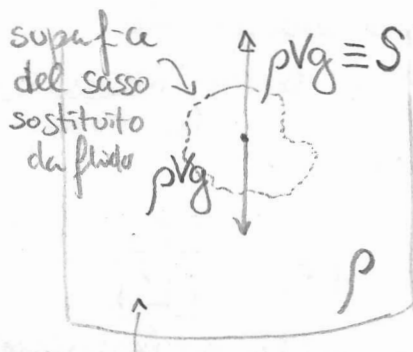
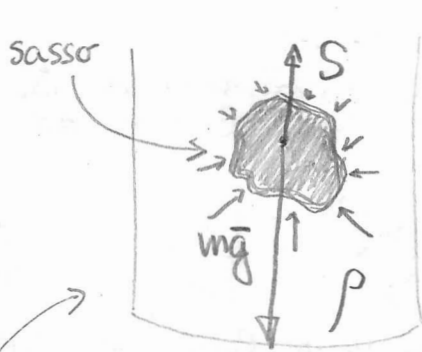
$$p = p_0 + \text{pressione dovuta al fluido sovrastante}$$

$$= p_0 + \frac{\rho V g}{\Delta S}$$

$$= p_0 + \rho \frac{\Delta S \cdot h \cdot g}{\Delta S}$$

$$p = p_0 + \rho g h$$

⊙ Principio di Archimede (← vedi pag. 21)

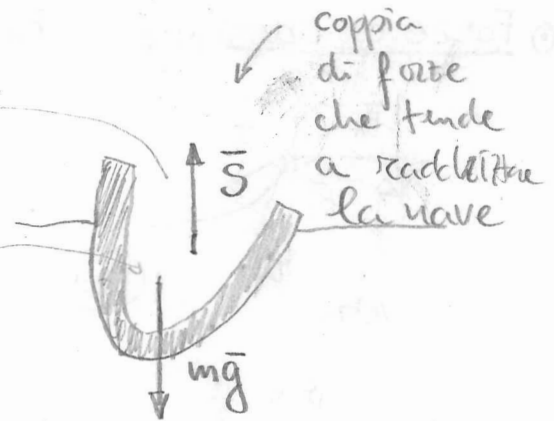
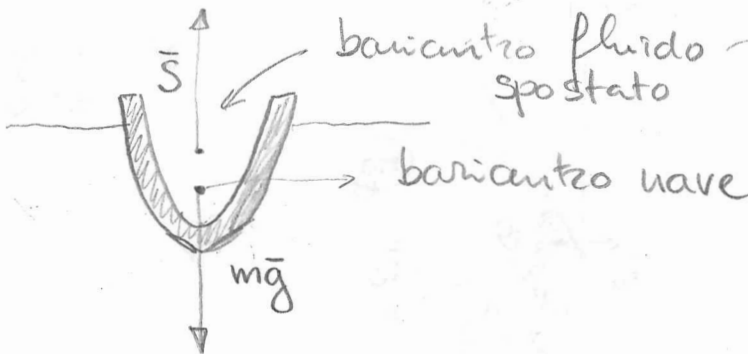


← agisce sul baricentro del fluido spostato

\bar{S} è la risultante delle forze dovute alle pressioni

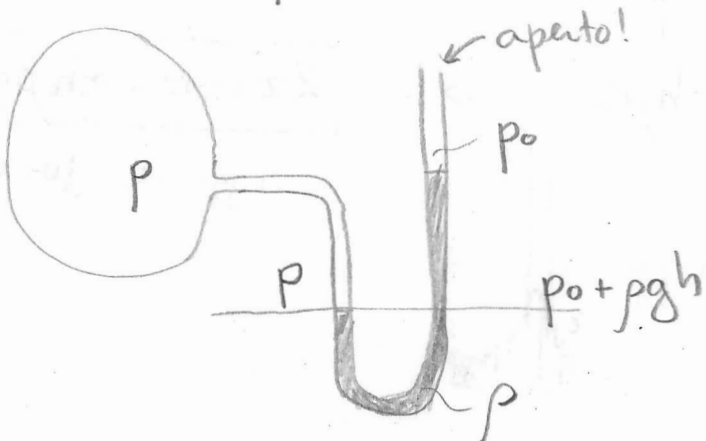
Si stima \bar{S} con un esperimento ideale...

Esempio



coppia di forze che tende a raddrizzare la nave

⊙ Misura della pressione con manometro aperto (tubo a U)

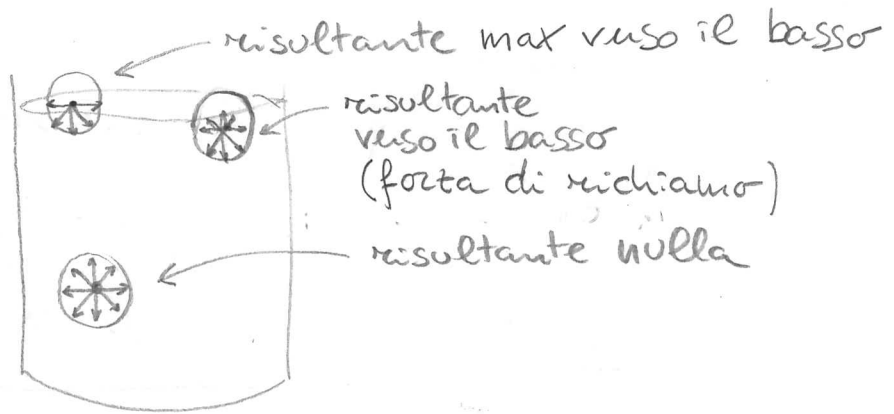


$$p = p_0 + \rho g h$$

(+ esperienza Torricelli)

Tensione superficiale

① Forze di coesione F_c hanno un certo raggio d'azione:



I liquidi tendono spontaneamente a minimizzare la superficie libera. Aumentare la superficie libera costa lavoro contro forze di richiamo. Definisco

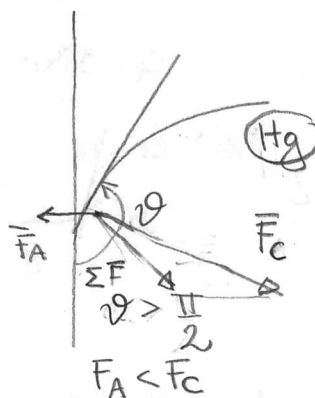
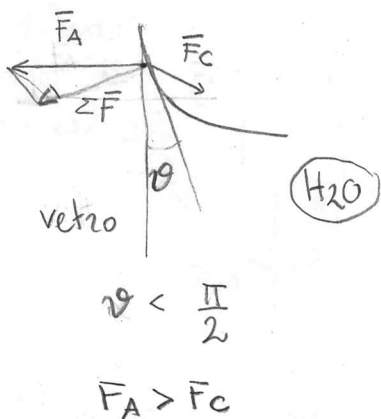
tensione superficiale

$$\tau = \frac{L}{\Delta S} \leftarrow \text{lavoro necessario per aumentare di } \Delta S \text{ la superficie libera del liquido}$$

dimensioni $[\tau] = \frac{[L]}{[L^2]} = \frac{[F][L]}{[L^2]} = \frac{[F]}{[L]} \quad \frac{N}{m}$

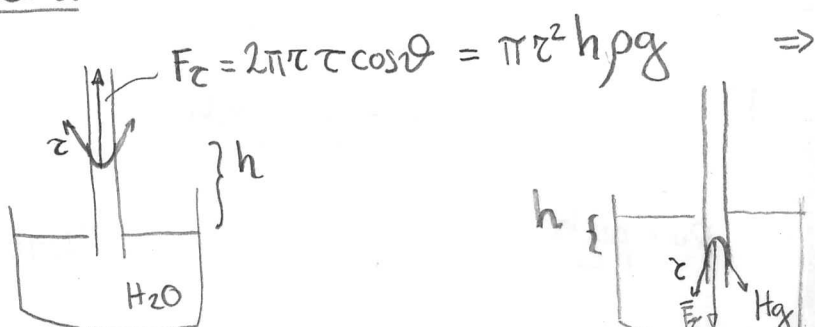
τ è una F per unità di lunghezza su una lamina liquida
 τ diminuisce - al crescere della temperatura
 - in presenza di tensioattivi

② Forze di adesione F_A può essere $\geq F_c$



$\theta = \text{angolo di contatto}$

③ Capillari



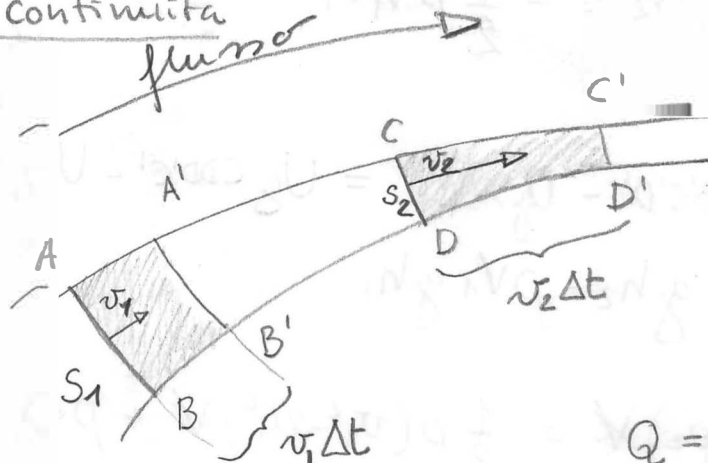
$$2\tau \cos\theta = rh\rho g$$

Legge di Jurin

fluido ideale $\left\{ \begin{array}{l} \text{incomprimibile} \\ \text{non viscoso} \end{array} \right. \left(\begin{array}{l} \rho = \text{cost} \\ \text{no attrito} \end{array} \right)$

che si muove con flusso $\left\{ \begin{array}{l} \text{stazionario} \\ \text{irrotazionale} \end{array} \right. \left(\begin{array}{l} \text{in ciascun punto} \\ \vec{v} \text{ costante nel tempo} \\ \text{(un mulinello non gira)} \end{array} \right)$

Equazione di continuità



$$Q = \frac{Sv\Delta t}{\Delta t} = Sv$$

(portata, $\frac{m^3}{s}$)

Q deve essere costante perché il flusso è stazionario

(il volume che attraversa AB in Δt deve essere lo stesso che attraversa CD in Δt)

$$S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t$$

$$Q_{AB} = Q_{CD}$$

$$\boxed{S_1 v_1 = S_2 v_2}$$

Teorema di Bernoulli

Considero il fluido in ABCD. Dopo Δt si trova in A'B'C'D'.
 Applico a questo moto:

$$L = \Delta K$$

$$L_p + L_g = \Delta K$$

$$L_p = \Delta K + \Delta U_g$$

L_p = lavoro ^{fatto} sul fluido dalle forze dovute alla pressione

L_g = lavoro fatto sul fluido dalla gravità = $-\Delta U_g$

Calcolo i tre termini, uno alla volta

$$\begin{aligned} L_p &= F_1 \cdot \Delta x_1 - F_2 \cdot \Delta x_2 = \\ &= p_1 S_1 \cdot v_1 \Delta t - p_2 S_2 \cdot v_2 \Delta t \\ &= (p_1 - p_2) S_1 v_1 \Delta t \end{aligned}$$

Per valutare ΔK e ΔU_g , ricordo che il flusso è stazionario.
 Pertanto le differenze tra stato finale ed iniziale sono dovute esclusivamente alla sostituzione di ABCD con A'B'C'D',
 equivalente alla sostituzione di ABB'A' con CDD'C'

$$\Delta K = K_{A'B'C'D'} - K_{ABCD} = K_{CDD'C'} - K_{ABB'A'}$$

$$= \frac{1}{2} \rho V_2 v_2^2 - \frac{1}{2} \rho V_1 v_1^2 \quad \text{con } V_1 = S_1 v_1 \Delta t$$

$$V_2 = S_2 v_2 \Delta t$$

$$\Delta U_g = U_{g, A'B'C'D'} - U_{g, ABCD} = U_{g, CDD'C'} - U_{g, ABB'A'}$$

$$= \rho V_2 g h_2 - \rho V_1 g h_1$$

e $v_1 = v_2 = \frac{S_1 v_1 \Delta t}{S_2 v_2 \Delta t} = v$

Quindi: $(p_1 - p_2)V = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)V + \rho g (h_2 - h_1)V$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$$

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{cost.}$$

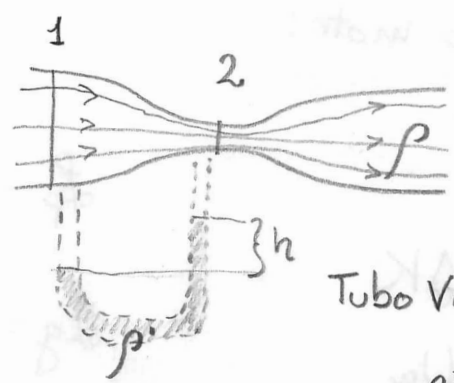
↑ densità di en. cinetica
 ↑ densità di en. pot. gravitazionale
 ↑ densità di energia dovuta alla pressione

$$1 \text{ Pa} = \frac{1 \text{ N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

Applicazioni

→ Effetto Venturi

(stenosi - aneurisma)



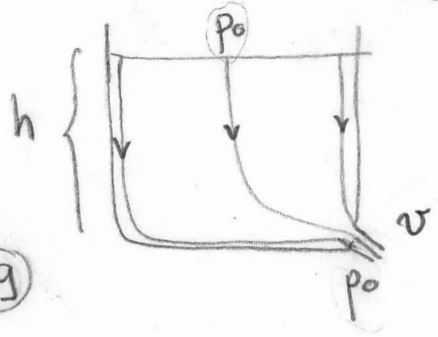
$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} > v_1$$

$$p_2 < p_1$$

Tubo Venturi:

$$v_1^2 = \frac{2 \rho' g h}{\rho \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)} = C \cdot h$$

→ Teorema Torricelli

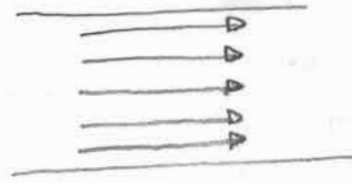


$$p_0 + \rho g h = p_0 + \frac{1}{2} \rho v^2$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

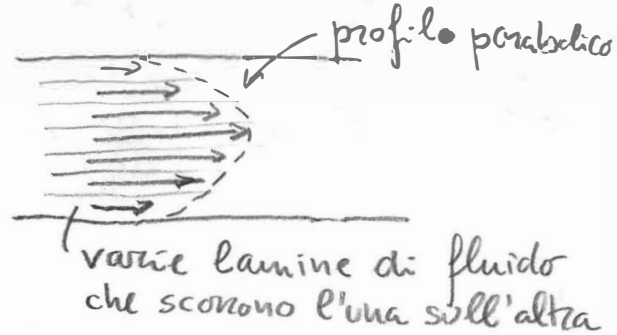
Finora abbiamo studiato i fluidi ideali, in particolare

- no attrito ($\eta = 0$)
- moto stationario
- la velocità è la stessa su tutta la sezione della condotta



In una migliore approssimazione di un fluido reale, supponiamo ora

- attrito ($\eta \neq 0$)
- moto stationario
- moto laminare con velocità massima al centro e decrescente verso le pareti della condotta



Questa approssimazione è ragionevole a bassa velocità. Per fluidi che si muovono a velocità elevate si hanno turbolente. (moto turbolento).

Legge di Poiseuille

Per un fluido "reale" in moto stationario, laminare e non turbolento, si ha:

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{l}$$



$\frac{dp}{dl}$, gradiente di pressione

si ricordi
 $[\eta] = [M][L^{-1}][t^{-1}]$
 vedi pag. 20

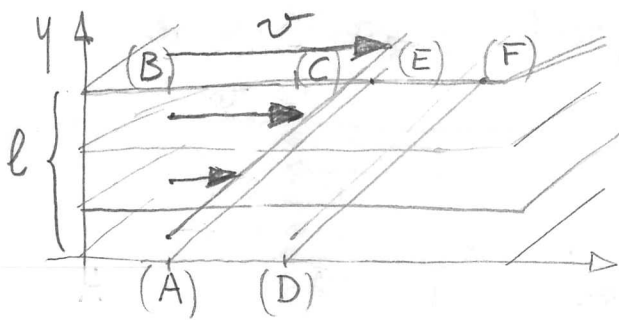
Δp
 differenza di pressione dovuta all'attrito
 (necessaria per compensarlo)

Per la velocità media v_m vale ancora $Q = S v_m$
 La legge di Poiseuille vale finché $v_m < v_c$ (velocità critica)

$$v_c = N_R \frac{\eta}{\rho r}$$

con N_R = numero di Reynolds
 adimensionale
 in questo contesto $N_R \sim 1200$

Definizione di viscosità



lamine piane di liquido che scorrono l'una sull'altra
 $A = \text{area delle lamine}$

AD fermo
 BC v risp. AD

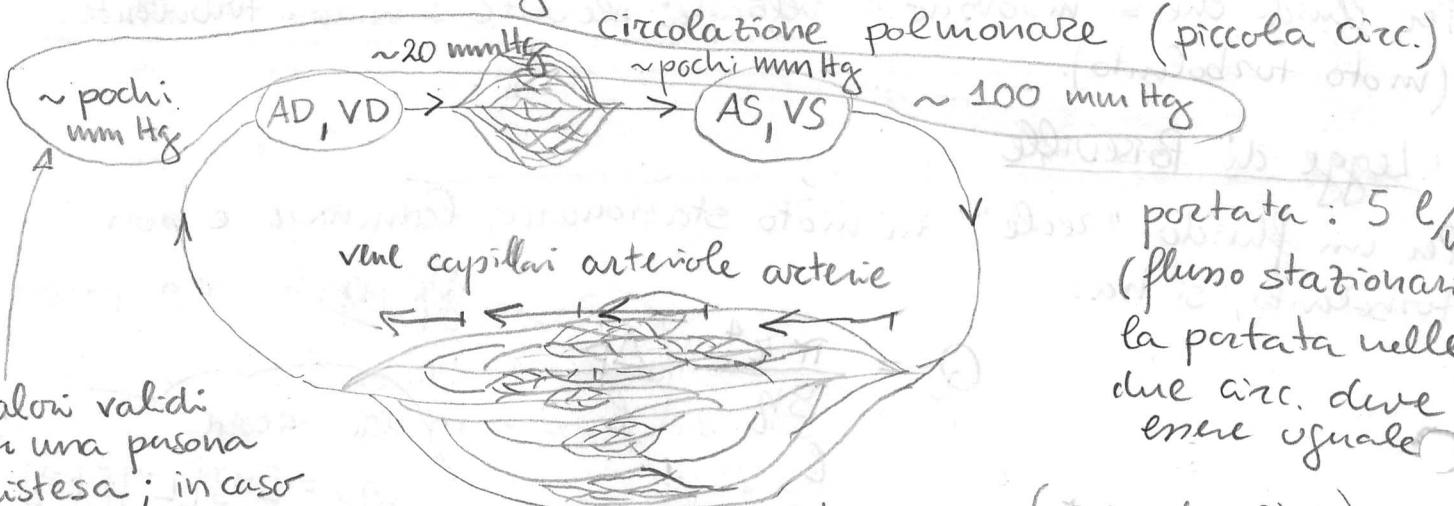
ipotesi:
 $\frac{dv}{dy} = \text{cost} = \frac{v}{l}$

altra ipotesi: $F \propto \left(\frac{dv}{dy}\right) A$ (proporzionale)

In effetti: $F = \eta \left(\frac{dv}{dy}\right) A$

Nel caso specifico: $\frac{F}{A} = \eta \frac{v}{l}$

Circolazione del sangue



carico di scivolamento

portata: 5 l/min
 (flusso stazionario)
 la portata nelle due circ. deve essere uguale

valori validi per una persona distesa; in caso contrario conta anche ρgh , parzialmente neutralizzato dall'azione di valvole venose

La perdita di pressione è dovuta alla resistenza dei vasi sanguigni; da Poiseuille:

$$\Delta p = \frac{8\eta l}{\pi r^4} Q$$

\downarrow
R

analogia con legge Ohm*

$$\Delta V = RI$$

\downarrow \downarrow
 Δp Q

Resistente in serie $R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_N$

in parallelo $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$

questa analogia venā introdotta a fine corso

Ad esempio il letto arteriolare è fatto da N_a arteriole

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_{N_a}}$$

se $\frac{1}{R_1} \approx \frac{1}{R_2} \approx \dots \approx \frac{1}{R_{N_a}} \equiv \frac{1}{R_a}$ allora ho N_a addendi uguali a $\frac{1}{R_a}$

$$= N_a \cdot \frac{1}{R_a} = \frac{N_a}{R_a} \quad \text{Quindi } R_{eq} = \frac{R_a}{N_a}$$

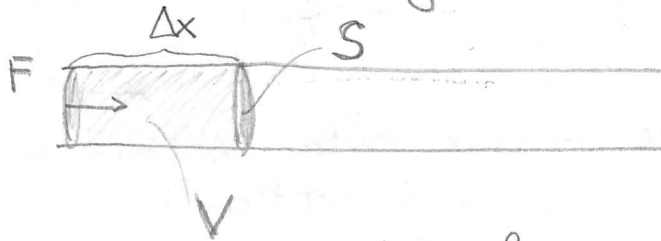
Allo stesso modo per il letto capillare (fatto da N_c capillari):

$$R_{eq} = \frac{R_c}{N_c}$$

Lavoro e potenza cardiaca

Consideriamo per ora solo il ventricolo sinistro (il v. dx contribuisce con un ulteriore 20% in più).

Modello super-semplificato: in 1 contrazione il v. sx immette nell'aorta un volume di sangue V , che sposta il sangue



presente di Δx , con $V = S \cdot \Delta x$; $L = F \cdot \Delta x = p \cdot S \cdot \Delta x = pV$

Come nella dimostrazione del teorema di Bernoulli (pag. 33), bisognerebbe sottrarre il lavoro all'altro estremo della grande circolazione, ma il sangue rientra nell'atrio dx a $p \sim 0$ e quindi anche questo lavoro è nullo. Quindi

$$\left. \begin{array}{l} \text{v. sx} \rightarrow L = pV \\ \text{v. dx} \rightarrow L' = p'V \end{array} \right\} L_{TOT} = (p + p')V$$

Sostituendo:

$$\begin{array}{l} p \sim 100 \text{ Torr} \\ p' \sim 20 \text{ Torr} \\ V \sim 60 \text{ cm}^3 \\ 1 \text{ pulsazione/s} \end{array} \quad \begin{array}{l} L_{TOT} \sim 1 \text{ J} \\ P \sim 1 \text{ W} \end{array}$$

Modello più accurato: (vedi libro)

- suddivide la contrazione in 4 fasi, ma solo 1 contribuisce a L , come sopra. L viene fatto in tempo 3 volte minore $\Rightarrow P \times 3$
- una fase di contrazione isometrica comporta lavoro interno (calore) (42)

c'è un ulteriore contributo dovuto alla velocità con cui il sangue si muove v a ρv^2 (fattore cinetico).

In situazioni non-paolo - cre è trascurabile

- il rendimento del cuore è circa il 10%

In conclusione il cuore dissipa circa 200 kcal al giorno

Viscosità del sangue

Il sangue non rispetta esattamente la legge di Poiseuille (per tanto ^{si dice che} non è un liquido newtoniano). Molte delle anomalie del suo comportamento possono essere spiegate dal fatto che contiene eritrociti e molecole proteiche di dimensioni non trascurabili. Ad esempio

→ la viscosità del sangue cresce rapidamente con il valore di ematocrito (% volume eritrociti)

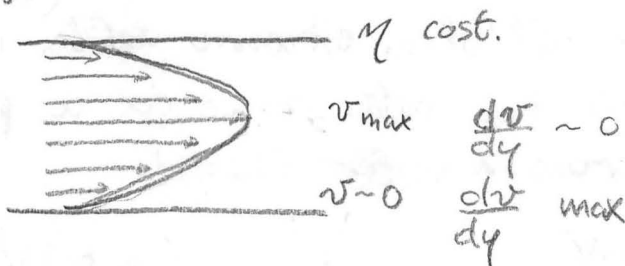
→ η assume valori piccoli nei capillari di raggio r piccolo:

$$\eta(r) = \frac{\eta_{as}}{\left(1 + \frac{d}{r}\right)^2}$$

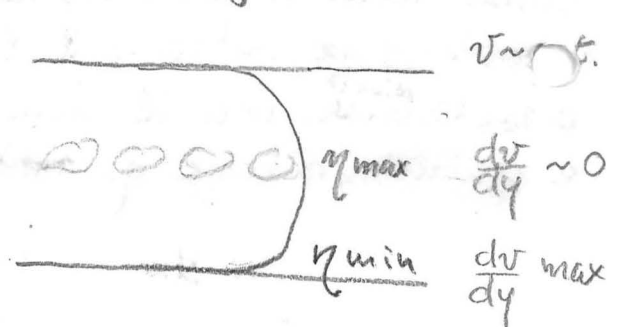
η per r grandi
diametro eritrociti (6-9 μm)

→ η non è costante in una data sezione, a causa dell'accumulo assiale degli eritrociti

fluido "reale"



sangue

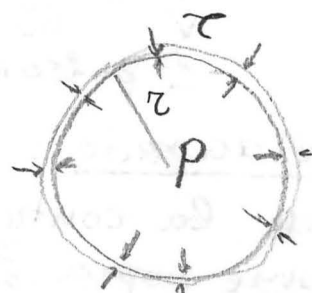


l'accumulo assiale (si veda a pag. 41)

gli eritrociti diminuisce l'attivo $\sim \eta \left(\frac{dv}{dy}\right)$

Legge di Laplace

Si considera una bolla di raggio r (lamina sferica di liquido)



$$P = \frac{4\tau}{r}$$

43) Relazione tra tensione sup τ e sovrappressione P dentro alla bolla

Dimostrazione

Immagino che la bolla aumenti il suo raggio di Δr .

Per la def. di τ (pag. 37) questo costa un lavoro

$$L = \tau \cdot [4\pi(r + \Delta r)^2 - 4\pi r^2] \times 2$$

← perché ci sono 2 superfici
limite, una esterna ed
una interna

$$\stackrel{!}{=} \tau \cdot [4\pi r^2 + 8\pi r \Delta r + \underbrace{4\pi \Delta r^2}_{\text{trascurabile}} - 4\pi r^2] \times 2$$

$$\cong \tau \cdot 16\pi r \Delta r$$

Tale lavoro deve essere fornito dalla pressione p .

Se immaginiamo la superficie interna della bolla suddivisa in tanti elementi ΔS_i , $S = \sum_i \Delta S_i$, su ognuno agisce una forza $F_i = p \Delta S_i$ che compie un lavoro $\Delta L_i = p \Delta S_i \Delta r$,

quindi

$$L = \sum_i \Delta L_i = \sum_i p \Delta S_i \Delta r = p \Delta r \sum_i \Delta S_i = p \Delta r S$$

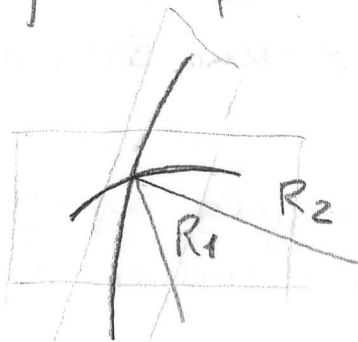
$$\stackrel{!}{=} p \Delta r 4\pi r^2$$

Uguagliando le due espressioni per L ottengo

$$p = \frac{4\tau}{r}$$

Per superfici di forma qualsiasi:

vedi * → (45)



$$p = \tau \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Tale formula può essere usata per i vasi sanguigni:

$R_1 \rightarrow R$ raggio del vaso sanguigno

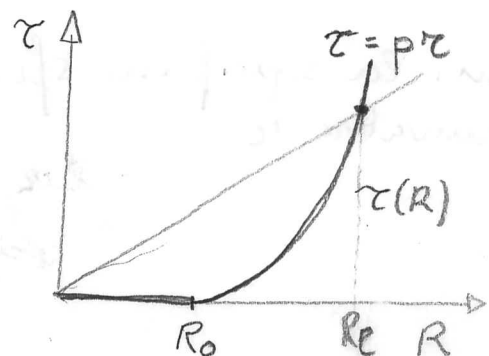
$R_2 \rightarrow \infty$ (è un cilindro)

$\tau \rightarrow \tau(R)$ tensione elastica del vaso, dipende da R

$p \rightarrow$ pressione trasmurale

$$p = \frac{\tau(R)}{R}$$

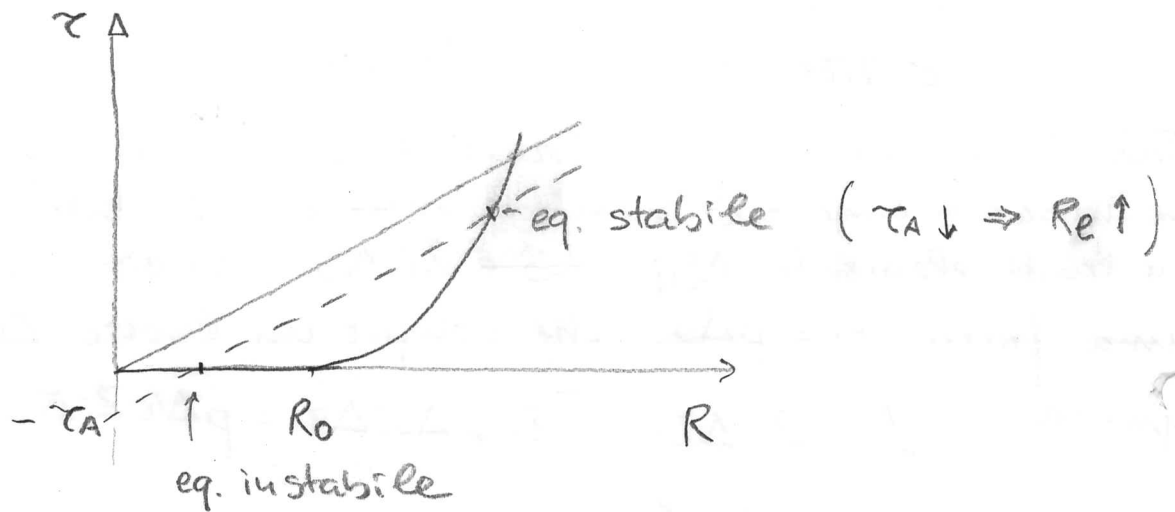
$R_e =$ raggio di equilibrio



Infine, se oltre alla tensione elastica τ ho una tensione attiva τ_A (dovuta alla contrazione della muscolatura), si ha:

$$\tau + \tau_A = pR$$

$$\tau = pR - \tau_A$$

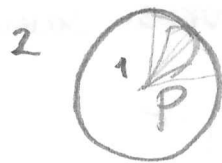


($\tau_A \downarrow \Rightarrow R_e \downarrow \Rightarrow$ rischio chiusura del vaso)

* Nota da pag. (44)

Abbiamo visto che nel caso di una lamina sferica di liquido vale $p = \frac{4\tau}{r}$.

Se invece abbiamo una singola superficie che separa il mezzo 1 dal mezzo 2, p si riduce di un fattore 2:

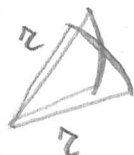


$$p = \frac{2\tau}{r}$$

Il fattore 2 può essere visto come

$$p = \frac{\tau}{r} + \frac{\tau}{r}$$

in cui la superficie sferica è caratterizzata da due raggi di curvatura r



1 gas

- Un gas è costituito da un grande numero ($\sim 10^{23}$) di atomi (σ molecole). Si può descrivere il comportamento
 - a livello microscopico \rightarrow teoria cinetica dei gas
 - a livello macroscopico \rightarrow specificando p, V, p, t
 \uparrow temperatura (in $^{\circ}\text{C}$)
- Gas perfetto: - le molecole non interagiscono (si urtano in modo perfettamente elastico)
 - sono puntiformi (occupano una frazione trascurabile del volume del contenitore)

○ Leggi dei gas perfetti (per una certa massa di gas all'equilibrio)

• t cost \Rightarrow $pV = \text{cost.}$

• gas riscaldato a p cost \Rightarrow $V(t) = V_0 (1 + \alpha t)$ (Gay-Lussac)

V_0 a 0°C

t in $^{\circ}\text{C}$

gas riscaldato a V cost \Rightarrow $p(t) = p_0 (1 + \beta t)$ (II Gay-Lussac)

Inoltre per i gas perfetti $\alpha = \beta = \frac{1}{273,15} \text{ } ^{\circ}\text{C}^{-1}$,

• Eq. di stato dei gas perfetti:

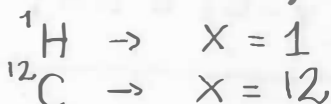
$$pV = p_0 V_0 (1 + \alpha t)$$

dim: $\begin{matrix} p_0 V_0 \\ p' V \\ p, V \end{matrix} \begin{matrix} \downarrow 0^{\circ} \\ \downarrow 0^{\circ} \\ \downarrow t \end{matrix}$ (trasf. isoterma) Boyle $p_0 V_0 = p' V$
(" isocora) I Gay-Lussac $p = p' (1 + \alpha t)$

Mettendo insieme: $pV = p_0 V_0 (1 + \alpha t)$

○ Legge di Avogadro per i gas perfetti

mole di una sostanza \rightarrow indica la quantità di materia corrisponde a X g di una sostanza, ove X è il suo numero di massa (atomica, molecolare). Es



Una mole $\rightarrow 6,022 \cdot 10^{23}$ unità elementari (particelle) di quella sostanza.

Avogadro capì che nelle stesse condizioni di p e t , V uguali di gas perfetti diversi contengono lo stesso numero di molecole.

Inoltre a $t = 0^\circ\text{C}$, $p = 1 \text{ atm}$ $\Rightarrow V_0 = 22,41 \text{ l} = 22,41 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$
 Riparto allora dalla eq. di stato dei gas perfetti:

$$\begin{aligned}
 pV &= p_0 V_0 (1 + \alpha t) \\
 &= p_0 V_0 \left(\frac{273,15^\circ\text{C} + t}{273,15^\circ\text{C}} \right) \\
 &= \frac{p_0 V_0 T}{273,15 \text{ K}} \rightarrow t + 273,15^\circ\text{C} \rightarrow \text{Kelvin}
 \end{aligned}$$

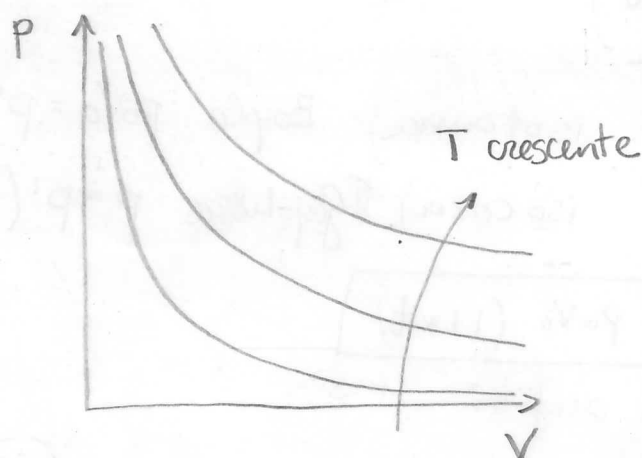
Se considero $p_0 = 1 \text{ atm} \Rightarrow \frac{p_0 V_0}{273,15 \text{ K}}$ per 1 mole $\rightarrow R$

quindi per 1 mole
 n moli

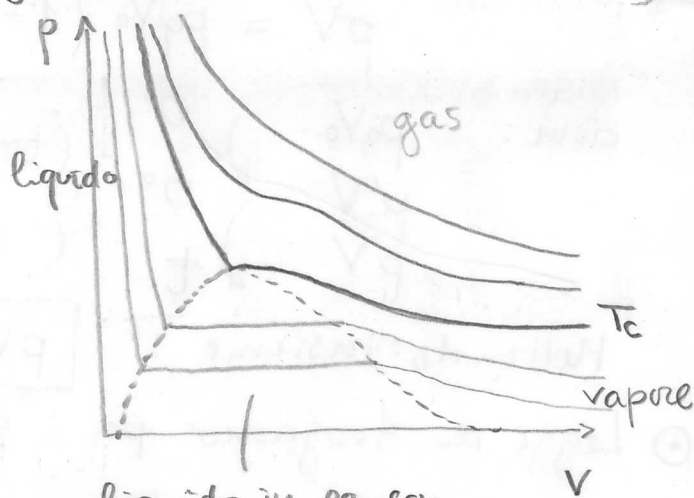
$$\begin{aligned}
 pV &= RT \\
 pV &= nRT
 \end{aligned}$$

con $R = \frac{1 \text{ atm} \cdot 22,41 \text{ l}}{273,15 \text{ K}} = 0,082 \frac{\text{l atm}}{\text{K mol}^{-1}}$
 $= \frac{101300 \text{ Pa} \cdot 22,41 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{273,15 \text{ K}} = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{K mol}^{-1}}$

gas perfetto



gas reale



liquido in eq. con il vapore saturo

Eq. di stato per i gas reali (Van der Waals)
 int. tra molecole vol. proprio molecolare

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = nRT$$