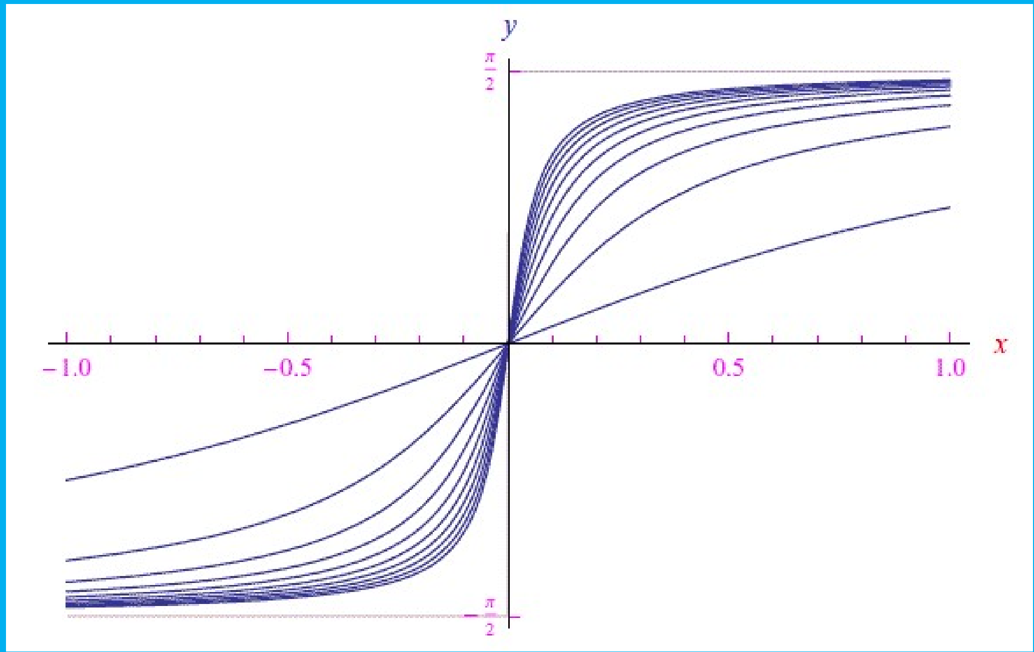
Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

SUCCESSIONI DI FUNZIONI
Parte 1



SUCCESSIONI DI FUNZIONI

Def: X insieme, $d: X \times X \to \mathbb{R}$

d è una DISTANZA (o METRICA) $\Leftrightarrow$ $\forall\, x, y, z \in X$

1) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2) $d(x,y) = d(y,x)$
3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

(X, d) è allora uno SPAZIO METRICO

Esempi

a) X insieme , $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$ METRICA DISCRETA

b) $X = \mathbb{R}^n$ $\quad d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$d(x,y) = \max_{i=1,\dots,n} \{ |x_i - y_i| \}$$

c) $E \subseteq \mathbb{R}$ DETTA METRICA LAGRANGIANA

$$d(f,g) = \sup_{t \in E} |f(t) - g(t)|$$ è una distanza su

i) $\mathcal{B}(E) = \{ f : E \to \mathbb{R} \text{ limitate} \}$

ii) $\mathcal{C}^0_b(E) = \{ f : E \to \mathbb{R} \text{ limitate e continue} \}$

iii) $\mathcal{C}^0(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \text{ continue} \}$ con $I = [a,b]$

Nel caso iii) d può essere espressa anche come

$$d(f,g) = \max_{t \in I} |f(t) - g(t)| \quad \text{(per il teorema di Weierstrass)}$$

Gli insiemi $\mathcal{B}(E)$, $\mathcal{C}^0_b(E)$, $\mathcal{C}^0(E)$ sono spazi lineari

Analoghe definizioni si possono introdurre, adattando quelle viste, per funzioni a più variabili.

Def.: Sia (X,d) spazio metrico, $x \in X$, $r > 0$

$$B(x,r) = \{ y \in X \mid d(x,y) < r \}$$

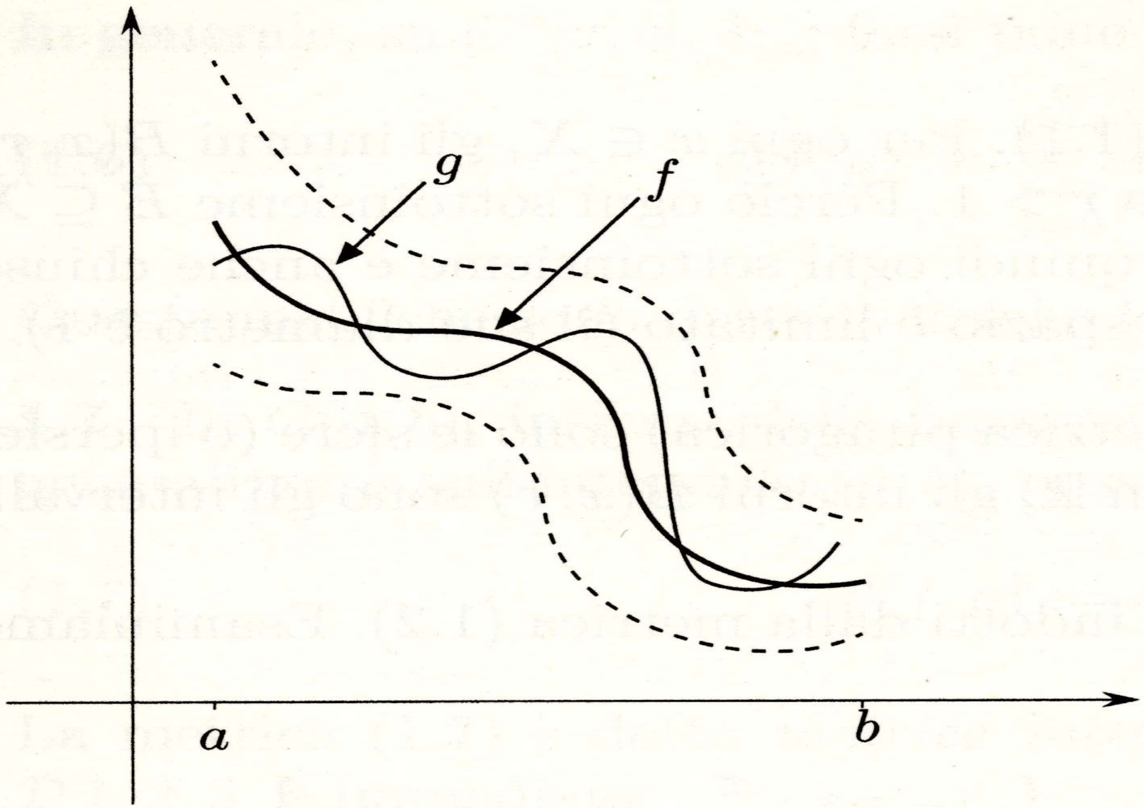
è detto PALLA (O INTORNO SFERICO) DI CENTRO x E RAGGIO r

Con questa definizione si possono introdurre le definizioni topologiche già visto in $\mathbb{R}^n$: aperti, chiusi, punti interni, punti esterni, frontiera, ecc.

Esempio

$X = \mathscr{C}^0([a,b])$

d metrica lagrangiana



$$B(f,r) = \{ g \in \mathscr{C}^0([a,b]) \mid \max_{t\in[a,b]} |f(t)-g(t)| < r \}$$

Def.: Sia (X,d) spazio metrico

$f: \mathbb{N} \to X$ è una SUCCESSIONE, indicata con $x_n = f(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ si scrive $(x_n)_n$

Def: Data $(x_n)_n$ in uno spazio metrico (X,d)

$\lim_n x_n = x \in X \iff$

$\forall V_x$ intorno di x $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}: \forall n \geq \bar{n} \quad x_n \in V_x$

o, in maniera equivalente, una qualunque delle seguenti

- $\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}: \forall n \geq \bar{n}\quad x_n \in B(x, \varepsilon)$
- $\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}: \forall n \geq \bar{n}\quad d(x_n, x) < \varepsilon$
- $\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x) = 0$ $\leftarrow$ QUI CI SI È RICONDOTTI A UNA SUCCESSIONE $z_n = d(x_n, x)$ IN $\mathbb{R}$

IL LIMITE, SE ESISTE, SI DIMOSTRA ESSERE UNICO

Def.: Sia (X, d) spazio metrico, $(x_n)_n$ successione in X

$(x_n)_n$ è DI CAUCHY (o FONDAMENTALE)

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n, m \geq \bar{n} \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$

$\iff \lim_{n,m \to +\infty} d(x_n, x_m) = 0$

Proposizione

Siano (X, d) spazio metrico, $(x_n)_n$ successione in X.

$(x_n)_n$ convergente $\Rightarrow$ $(x_n)_n$ di Cauchy.

NB: la dimostrazione è analoga a quella in $\mathbb{R}$.

Abbiamo già visto che il viceversa non vale in generale.

Def.: (X, d) spazio metrico è COMPLETO

$\Longleftrightarrow$ Ogni sua successione di Cauchy converge ad un elemento di X

Ad esempio, come già visto, $\mathbb{R}$ è completo, mentre $\mathbb{Q}$ non lo è.

Successioni di funzioni

Consideriamo $E \subseteq \mathbb{R}$ e siano

$f_n : E \to \mathbb{R}$ funzioni, $n \in \mathbb{N}$

Allora, $\forall\, t \in$, $(f_n(t))_n$ è una successione in $\mathbb{R}$

Se $\exists \lim_{n \to +\infty} f_n(t)$ $\forall\, t \in E$ possiamo definire

$$f(t) = \lim_{n \to +\infty} f_n(t) \qquad f : E \to \mathbb{R}$$

Def.: Una successione di funzioni $(f_n)_n$ con

$f_n : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$

converge a $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ PUNTUALMENTE

$\Longleftrightarrow \lim_{n \to +\infty} f_n(t) = f(t) \quad \forall t \in E$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall t \in E \; \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, t) : \forall n \geq \bar{n} \quad |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$

Se consideriamo $(f_n)_n$ in uno spazio metrico otteniamo invece un'altra definizione

SPAZIO DELLE FUNZ. LIMITATE DEFINITE SU E

<u>Def.</u>: Sia $X = \mathcal{B}(E)$ con la distanza lagrangiana. Una successione $(f_n)_n$ in X convergente a $f \in \mathcal{B}(E)$ secondo tale distanza è detta

UNIFORMEMENTE CONVERGENTE A f.

Analoga definizione in $\mathcal{C}_b^0(E)$, $\mathcal{C}^0([a,b])$ ....

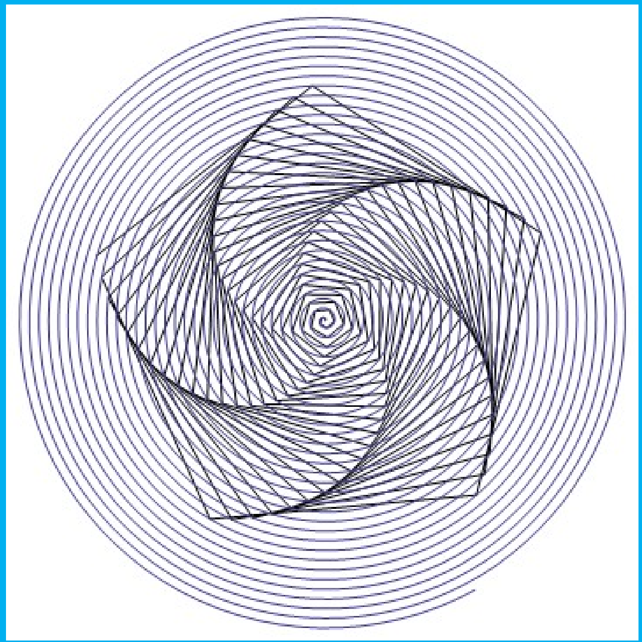
Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

SUCCESSIONI DI FUNZIONI
Parte 2



Def.: Una successione di funzioni $(f_n)_n$ con
$f_n : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$

converge a $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ PUNTUALMENTE

$\Longleftrightarrow \lim_{n \to +\infty} f_n(t) = f(t) \quad \forall t \in E$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall t \in E \ \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, t) : \forall n \geq \bar{n} \quad |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$

Se consideriamo $(f_n)_n$ in uno spazio metrico otteniamo invece un'altra definizione

SPAZIO DELLE FUNZ. LIMITATE DEFINITE SU E

<u>Def.</u>: Sia $X = \mathcal{B}(E)$ con la distanza lagrangiana

Una successione $(f_n)_n$ in X convergente a $f \in \mathcal{B}(E)$ secondo tale distanza è detta

UNIFORMEMENTE CONVERGENTE A f.

Analoga definizione in $\mathcal{C}^0_b(E)$, $\mathcal{C}^0([a,b])$ ....

Cosa significa?

$f_n \to f$ uniformemente

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \overline{n} = \overline{n}(\varepsilon) : \forall n \geq \overline{n} \ \ d(f_n, f) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \overline{n} = \overline{n}(\varepsilon) : \forall n \geq \overline{n} \ \ \sup_{t \in E} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \overline{n} = \overline{n}(\varepsilon) : \forall n \geq \overline{n} \ \ |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \ \ \forall t \in E$

Si noti la differenza:

CONVERGENZA PUNTUALE: $\overline{n} = \overline{n}(\varepsilon, t)$

CONVERGENZA UNIFORME: $\overline{n} = \overline{n}(\varepsilon)$ $\leftarrow$ $\overline{n}$ è lo stesso per tutti i $t \in E$

Ovviamente

$f_n \to f$ uniformemente $\Longrightarrow$ $f_n \to f$ puntualmente

MA IL VICEVERSA NON VALE!

Esempi

1) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(t) = t^n$

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le t < 1 \\ 1 & \text{se } t = 1 \end{cases}$

$\forall \bar{t} \in [0,1]$ $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(\bar{t}) = \lim\limits_{n \to +\infty} t^n = f(\bar{t})$

$\Rightarrow f_n \to f$ puntualmente.

Tuttavia, $\sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| =$

$$= \sup_{t\in[0,1]} g_n(t) \qquad \text{con } g_n(t) = \begin{cases} t^n & \text{se } 0\le t<1 \\ 0 & \text{se } t=1 \end{cases}$$

$$= 1$$

f_n non converge uniformemente a nessun'altra funzione perché converge puntualmente a f

$$\Rightarrow d(f_n, f) = \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| \longrightarrow 1 \neq 0$$

$\Rightarrow f_n$ non converge uniformemente a f

2) $f_n(t) = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nt)$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

converge uniformemente (e quindi puntualmente) a 0.

$$d(f_n, 0) = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{\operatorname{sen}(nt)}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

per $t = \frac{\pi}{2n}$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} d(f_n, 0) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Con le definizioni precedenti di convergenza puntuale e uniforme ci si è ricondotti alla convergenza di successioni numeriche $\Rightarrow$ resta valido il criterio di convergenza di Cauchy

a) $(f_n)_n$ converge puntualmente a f $\quad (f_n, f : E \to \mathbb{R})$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall t \in E, \ \exists \overline{n} = \overline{n}(\varepsilon, t) : \quad |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$

$\forall n, m \geq \overline{n}$

b) $(f_n)_n$ converge uniformemente a f $(f_n, f : E \to \mathbb{R})$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) ; \forall n, m \geq \bar{n} \quad |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \ \forall t \in E.$

Dim: a) Sia $f_n \to f$ puntualmente e proviamo che $(f_n)_n$ è di Cauchy

$f_n \to f$ puntualmente $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall t \in E \; \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, t)$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$

$$|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall t \in E, \forall n, m \geq \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, t) \; |f_n(t) - f_m(t)| \leq |f_n(t) - f(t)| + |f(t) - f_m(t)| <$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ (CIOÈ $\forall t \in E$ $(f_n(t))_n$ è di Cauchy)

Viceversa, sia $(f_n)_n$ di Cauchy "puntualmente", cioè

$\forall \varepsilon > 0, \forall t \in E \; \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, t) : \forall n, m \geq \bar{n} \; |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall t \in E$ la successione $(f_n(t))_n$ in $\mathbb{R}$ è di Cauchy

OGNI SUCCESSIONE DI CAUCHY IN $\mathbb{R}$ CONVERGE IN $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall t \in E \ \exists \lim_{n \to +\infty} f_n(t) = f(t)$ $\leftarrow$ DEFINIAMO COSÌ $f: E \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow f_n \to f$ PUNTUALMENTE

b) Sia $f_n \to f$ uniformemente

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) : \forall n \geq \bar{n} \ |f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \in E$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \forall n, m \geq \bar{n}(\varepsilon) \ |f_n(t) - f_m(t)| \leq |f_n(t) - f(t)| + |f(t) - f_m(t)| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ \forall t \in E$$

Viceversa, sia $(f_n)_n$ di Cauchy "uniformemente", cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) : \forall n, m \geq \bar{n} \ |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in E$$

$(f_n)_n$ di Cauchy "uniformemente" $\Rightarrow$ $(f_n)_n$ di Cauchy "puntualmente"

$$\Rightarrow \text{per a) } \exists f : E \to \mathbb{R} : \forall t \in E \ \lim_{n \to +\infty} f_n(t) = f(t)$$

Passando al limite per $m \to +\infty$ si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) : \forall n, m \geq \bar{n} \ |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in E$$

$\leftarrow \lim_{m \to +\infty} f_m(t) = f(t) \ \forall t \in E$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) : \forall n \geq \bar{n} \ |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in E$$

VA BENE ANCHE IL $\leq$ INVECE DEL $<$ PER L'ARBITRARIETÀ DI ε

$\Rightarrow f_n \to f$ uniformemente

Esempio

Studiare convergenza puntuale e uniforme della successione $(f_n)_n$ con

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad f_n :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

(dal testo della prova scritta del 10/9/2019.)

a) Convergenza puntuale

Sia $x \in]0,1]$. Si ha $\frac{1}{n} \leq x \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq n$

$\Rightarrow$ definitivamente $f_n(x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \ \forall x \in]0,1]$

$\Rightarrow f_n \to f = 0$ puntualmente

b) <u>Convergenza uniforme</u>

Verifichiamo se $\lim_{n\to+\infty} d(f_n, 0) = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in]0,1]} |f_n(x)| = 0$

$$\sup_{x\in]0,1]} f_n(x) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\Rightarrow f_n \to f = 0$ uniformemente

Proposizione

$f_n : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitate $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow f$ è limitata
$f_n \to f$ uniformemente

NB: se la convergenza è solo puntuale la Proposizione non vale

Dim: Per la convergenza uniforme vale "Cauchy uniforme"
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n, m \geq \bar{n} \ |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon \ \forall t \in E$

Poniamo $m = \bar{n}$, $\varepsilon = 1$.

$\Rightarrow \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad |f_n(t) - f_{\bar{n}}(t)| < 1 \quad \forall t \in E$

Per $n \to +\infty$, si ottiene

$$|f(t) - f_{\bar{n}}(t)| < 1 \quad \forall t \in E$$

$\Rightarrow \quad |f(t)| - |f_{\bar{n}}(t)| \leq |f(t) - f_{\bar{n}}(t)| < 1 \quad \forall t \in E$

$\Rightarrow \quad |f(t)| < 1 + |f_{\bar{n}}(t)| \quad \forall t \in E \Rightarrow \sup_{t \in E} |f(t)| \leq 1 + \sup_{t \in E} |f_{\bar{n}}(t)|$

$\Rightarrow$ f è limitata perchè $f_{\bar{n}}$ lo è. $\square$

$\left(f_{\bar{n}} \text{ limitata} \Rightarrow \sup_{t \in E} |f_{\bar{n}}(t)| \in \mathbb{R} \Rightarrow \sup_{t \in E} |f(t)| \leq 1 + \sup_{t \in E} |f_{\bar{n}}(t)| \in \mathbb{R} \right)$

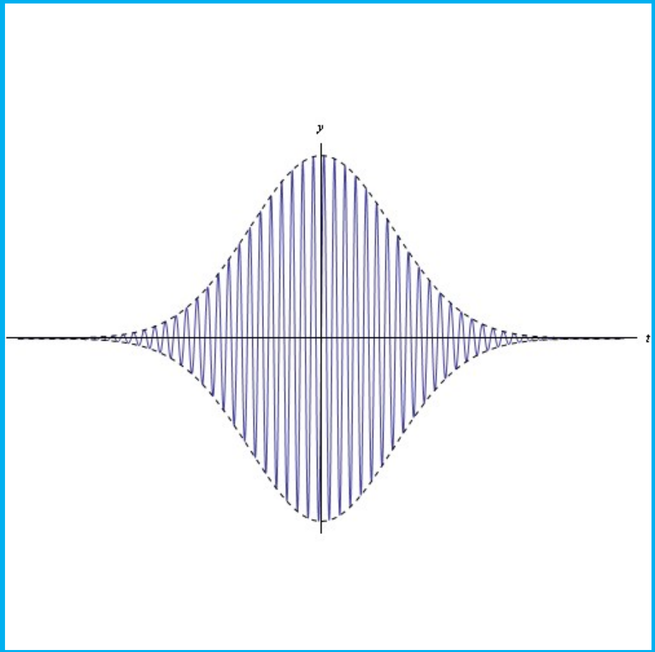
Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni

SUCCESSIONI DI FUNZIONI
Parte 3



<u>Teorema</u> (dello scambio di limiti)

Siano $\ell_n \in \mathbb{R}$, f_n, f funzioni $I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con I intervallo, $t_0 \in I$. Se

i) $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t)$ uniformemente in I

ii) $\lim_{t\to t_0} f_n(t) = \ell_n$

allora $\exists$ $\lim_{t\to t_0} f(t)$ e $\lim_{n\to+\infty} \ell_n$ e sono uguali, cioè

$$\boxed{\lim_{t\to t_0} \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{t\to t_0} f_n(t)}$$

$$
\begin{tikzcd}
f_1(t), \arrow[d, "t \to t_0"'] & f_2(t), \arrow[d] & f_3(t), \arrow[d] & \cdots\cdots, & f_n(t) \arrow[d] \arrow[r, "\substack{n \to +\infty \\ \text{UNIFORMEMENTE}}"] & f(t) \arrow[d, "t \to t_0"] \\
\ell_1, & \ell_2, & \ell_3 & \cdots\cdots, & \ell_n \arrow[r, "n \to +\infty"'] & \ell
\end{tikzcd}
$$

Dim:

a) $\boxed{(\ell_n)_n \text{ converge}}$ (usando il Criterio di Cauchy)

$$|\ell_n - \ell_m| = |\ell_n - f_n(t) + f_n(t) - f_m(t) + f_m(t) - \ell_m| \leq$$

$$\leq |\ell_n - f_n(t)| + |f_n(t) - f_m(t)| + |f_m(t) - \ell_m|$$

Preso $\varepsilon > 0$, poiché $f_n \to f$ uniformemente, $\exists\, \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$:

$$|f_n(t) - f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall t \in I, \ \forall n, m \geq \bar{n}$$ ← Cauchy

Si ha anche

$$\lim_{t \to t_0} f_n(t) = \ell_n \Rightarrow \begin{array}{l} |f_n(t) - \ell_n| \to 0 \\ |f_m(t) - \ell_m| \to 0 \end{array} \quad \text{per } t \to t_0$$

$\Rightarrow$ scegliendo t in un opportuno intorno di t_0 $(t \neq t_0)$
(tale che in tale intorno $|f_n(t) - \ell_n| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|f_m(t) - \ell_m| < \frac{\varepsilon}{3}$)

$$|\ell_n - \ell_m| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \forall\, n, m \geq \bar{n}$$

$\Rightarrow (\ell_n)_n$ è di Cauchy $\Rightarrow \exists\, \ell \in \mathbb{R} : \lim_{n \to +\infty} \ell_n = \ell$.

NB: $|f_n(t) - f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall t \in I \quad \forall n, m \geq \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$

$|f_n(t) - \ell_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ per $t \in U_{t_0} \cap I$ (U_{t_0} intorno di t_0)

$|f_m(t) - \ell_m| < \frac{\varepsilon}{3}$ per $t \in U_{t_0} \cap I$ (U_{t_0} intorno di t_0)

$$\Rightarrow |\ell_n - \ell_m| < |f_n(t) - \ell_n| + |f_n(t) - f_m(t)| + |f_m(t) - \ell_m| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$$\forall n, m \geq \bar{n}$$

SERVE LA CONVERGENZA UNIFORME, CIOÈ CHE $\bar{n}$ NON DIPENDA DA t MA SOLO DA ε

b) $\boxed{\lim_{t\to t_0} f(t) = \ell}$

$f_n \to f$ uniformemente e $\ell_n \to \ell$ ← DIMOSTRATO IN a)

$\Rightarrow$ Preso $\varepsilon > 0$ $\exists\, \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$ tale che

$$|f_{\bar{n}}(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, t \in I \quad \text{e} \quad |\ell_{\bar{n}} - \ell| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(valgono $\forall\, n \geq \bar{n}$, in particolare per $n = \bar{n}$)

$$\Rightarrow \quad |f(t) - \ell| \leq |f(t) - f_{\bar{n}}(t)| + |f_{\bar{n}}(t) - \ell_{\bar{n}}| + |\ell_{\bar{n}} - \ell| \leq$$

$$\leq \frac{2}{3}\varepsilon + |f_{\bar n}(t) - \ell_{\bar n}| \quad \forall t \in I$$

IN UN INTORNO DI t_0

$$\lim_{t\to t_0} f_{\bar n}(t) = \ell_{\bar n} \Rightarrow \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) \text{ tale che}$$

$$|f_{\bar n}(t) - \ell_{\bar n}| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall t \in I : 0 < |t - t_0| < \delta$$

$$\Rightarrow \forall t \in I : \ 0 < |t - t_0| < \delta \text{ si ha}$$

$$|f(t) - \ell| < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to t_0} f(t) = \ell$$

NB: anche qui serve la convergenza uniforme

Combinando a) e b) assieme si ha

$$\lim_{t \to t_0} \lim_{n \to +\infty} f_n(t) = \lim_{t \to t_0} f(t) = \ell \quad \leftarrow \text{per b)}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \lim_{t \to t_0} f_n(t) = \lim_{n \to +\infty} \ell_n = \ell \quad \leftarrow \text{per a)}$$

$\Rightarrow$ segue la formula di scambio dei limiti.

Corollario

Sia $f_n \to f$ uniformemente, $f_n, f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo

f_n continua $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f$ è continua

Dim: Sia $t_0 \in I$. f_n continua $\forall n \Rightarrow \lim_{t \to t_0} f_n(t) = f_n(t_0)$ $\forall n$

$\Rightarrow$ per lo scambio di limiti (dove $\ell_n = f_n(t_0)$) si ha

$$\lim_{t\to t_0} f(t) \overset{f_n \to f}{=} \lim_{t\to t_0}\lim_{n\to+\infty} f_n(t) \overset{\text{SCAMBIO}}{=} \lim_{n\to+\infty}\lim_{t\to t_0} f_n(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n(t_0) =$$

f_n CONTINUA

$$\overset{f_n \to f}{=} f(t_0)$$

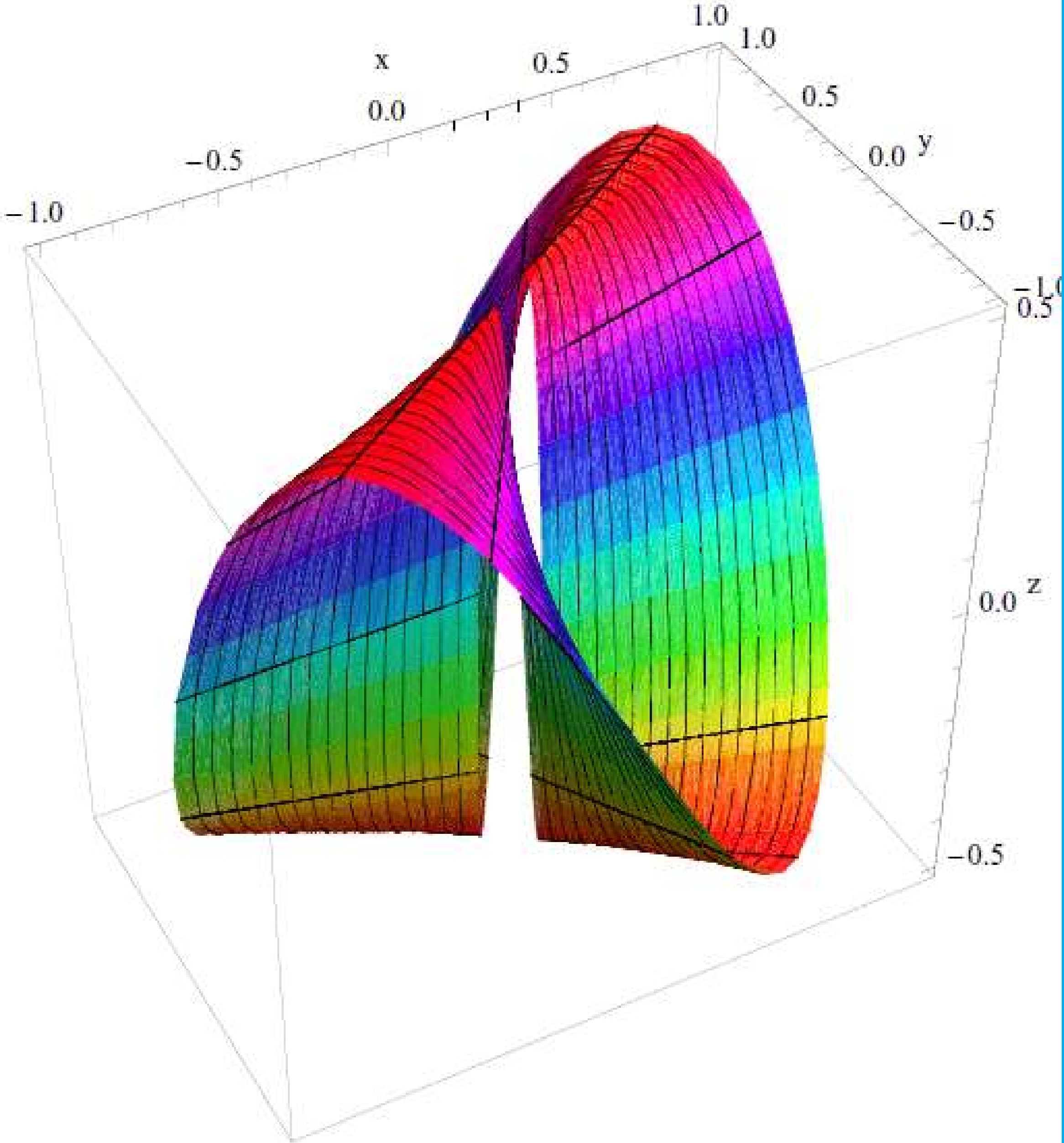
$$\Rightarrow \lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0) \Rightarrow f \text{ è continua in } t_0 \ (\forall t_0 \in I) \qquad \square$$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni



SUCCESSIONI DI FUNZIONI

Parte 4

Teorema (dello scambio del limite con l'integrale)

Sia $(f_n)_n$, $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, limitate e integrabili su $[a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, con $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ uniformemente.

Allora f è integrabile su $[a,b]$ e

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt}$$

Dim: $f_n \to f$ uniformemente, f_n limitate $\Rightarrow f$ limitata

Sia $D = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b\}$ suddivisione di $[a,b]$, con $\Delta_i =]t_{i-1}, t_i[$ e $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ $(i = 1, \dots, k)$

$$\Rightarrow |S(D,f) - S(D,f_n)| = \left| \sum_{i=1}^{k} \left(\sup_{\Delta_i} f - \sup_{\Delta_i} f_n \right) \Delta t_i \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} \left| \sup_{\Delta_i} f - \sup_{\Delta_i} f_n \right| \Delta t_i \quad (*)$$

DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE

Risulta $\left|\sup_{\Delta_i} f - \sup_{\Delta_i} f_n\right| \leq \sup_{\Delta_i} |f - f_n|$. Infatti

$$f_n = f + f_n - f \leq f + |f_n - f| \quad \longleftarrow \quad f_n - f \leq |f_n - f|$$

$$\Rightarrow \sup_{\Delta_i} f_n \leq \sup_{\Delta_i}\left(f + |f_n - f|\right) \leq \sup_{\Delta_i} f + \sup_{\Delta_i} |f_n - f|$$

$$\Rightarrow \sup_{\Delta_i} f_n - \sup_{\Delta_i} f \leq \sup_{\Delta_i} |f_n - f|$$

Analogamente: $\sup_{\Delta_i} f - \sup_{\Delta_i} f_n \leq \sup_{\Delta_i} |f - f_n| = \sup_{\Delta_i} |f_n - f|$

$$\Rightarrow \left|\sup_{\Delta_i} f - \sup_{\Delta_i} f_n\right| \leq \sup_{\Delta_i} |f_n - f|$$

$$\Rightarrow |S(D,f) - S(D,f_n)| \leq (*) \leq \sum_{i=1}^{k} \sup_{\Delta_i} |f - f_n| \Delta t_i$$

$f_n \to f$ uniformemente $\Rightarrow$ preso $\varepsilon > 0$ $\exists\, \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$:

$$\sup_{[a,b]} |f - f_{\bar{n}}| < \varepsilon \qquad \left(\Rightarrow \sup_{\Delta_i} |f - f_{\bar{n}}| \leq \sup_{[a,b]} |f - f_{\bar{n}}| < \varepsilon \right)$$

$$\Rightarrow |S(D,f) - S(D,f_{\bar{n}})| < \varepsilon \sum_{i=1}^{k} \Delta t_i = \varepsilon \underbrace{(b-a)}_{\sum_{i=1}^{k} \Delta t_i}$$

Analogamente si ottiene

$$|s(D,f) - s(D,f_{\bar{n}})| < \varepsilon (b-a)$$ $\leftarrow$ EVENTUALMENTE AUMENTANDO $\bar{n}$

NB: le 2 disuguaglianze valgono $\forall$ suddivisione D

$f_{\bar{n}}$ è integrabile $\Rightarrow \exists$ una suddivisione D^* tale che

$$|S(D^*, f_{\bar{n}}) - s(D^*, f_{\bar{n}})| < \varepsilon\,(b-a)$$ ← CARATTERIZZAZIONE INTEGRABILITÀ CON ε ARBITRARIO PER $f_{\bar{n}}$

$$\Rightarrow |S(D^*, f) - s(D^*, f)| \leq$$

$$\leq |S(D^*, f) - S(D^*, f_{\bar{n}})| + |S(D^*, f_{\bar{n}}) - s(D^*, f_{\bar{n}})| +$$

$$+ |s(D^*, f_{\bar{n}}) - s(D^*, f)| < 3(b-a)\,\varepsilon$$

SI PRENDE COME D LA SUDDIVISIONE D^*

$\Rightarrow$ per l'arbitrarietà di ε e per la caratterizzazione di integrabilità si ha che f è integrabile su $[a,b]$.

Si ha inoltre (per le proprietà dell'integrale)

$$\left| \int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt \leq$$

$$\leq \int_a^b \sup_{[a,b]} |f_n(t) - f(t)|\,dt = (b-a) \sup_{[a,b]} |f_n(t) - f(t)|$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty} \sup |f_n(t) - f(t)| = 0$ ($f_n \to f$ uniformemente)

si ha $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt$ $\square$

Teorema (dello scambio del limite con la derivata)

Siano $f_n:]a,b[\to \mathbb{R}$ derivabili $\forall n \in \mathbb{N}$ tali che

i) f'_n converge uniformemente in $]a,b[$ a $g:]a,b[\to \mathbb{R}$

è una successione numerica

ii) $\exists\, t_0 \in]a,b[: (f_n(t_0))_n$ converge

Allora: $(f_n)_n$ converge uniformemente in $]a,b[$.

Indicato con f il suo limite, f è derivabile e si ha $f' = g$, cioè

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{d}{dt} f_n(t) = \frac{d}{dt} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)}$$

Ricordiamo il Teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema

Sia f integrabile su $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ e G una sua primitiva ($G' = f$) continua.

Allora

$$G(x) = G(a) + \int_a^x f(x)\,dx \quad \forall x \in [a,b]$$

Dimostriamo una versione "semplificata" (meno generale) del teorema di scambio

Teorema

Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni $f_n : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f_n \in \mathcal{C}^1([a,b])$

Sia $f_n \to f$ uniformemente e $f'_n \to g$ uniformemente

Allora f è derivabile, $f' = g$ con f' continua. (cioè $f \in \mathcal{C}^1$)

Dim: Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, poiché f'_n è continua, dunque integrabile

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t)\,dt$$

Per un teorema precedente, poiché $f'_n \to g$ uniformemente, g è integrabile su $[a,x]$ e

$$\int_a^x f'_n(t)\,dt \longrightarrow \int_a^x g(t)\,dt$$

Quindi

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t)\,dt$$

$\longleftarrow$ Teorema precedente

$f_n \to f$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$$

$\Rightarrow f(x) - f(a) = \underbrace{\int_a^x g(t)\,dt}_{\text{FUNZ. INTEGRALE DI } g}$ cioè $f(x) - f(a)$ è la FUNZIONE INTEGRALE di g

g è continua, perchè $f_n \in C^1 \; \forall n$, quindi f'_n è continua $\forall n$ e $f'_n \to g$ UNIFORMEMENTE

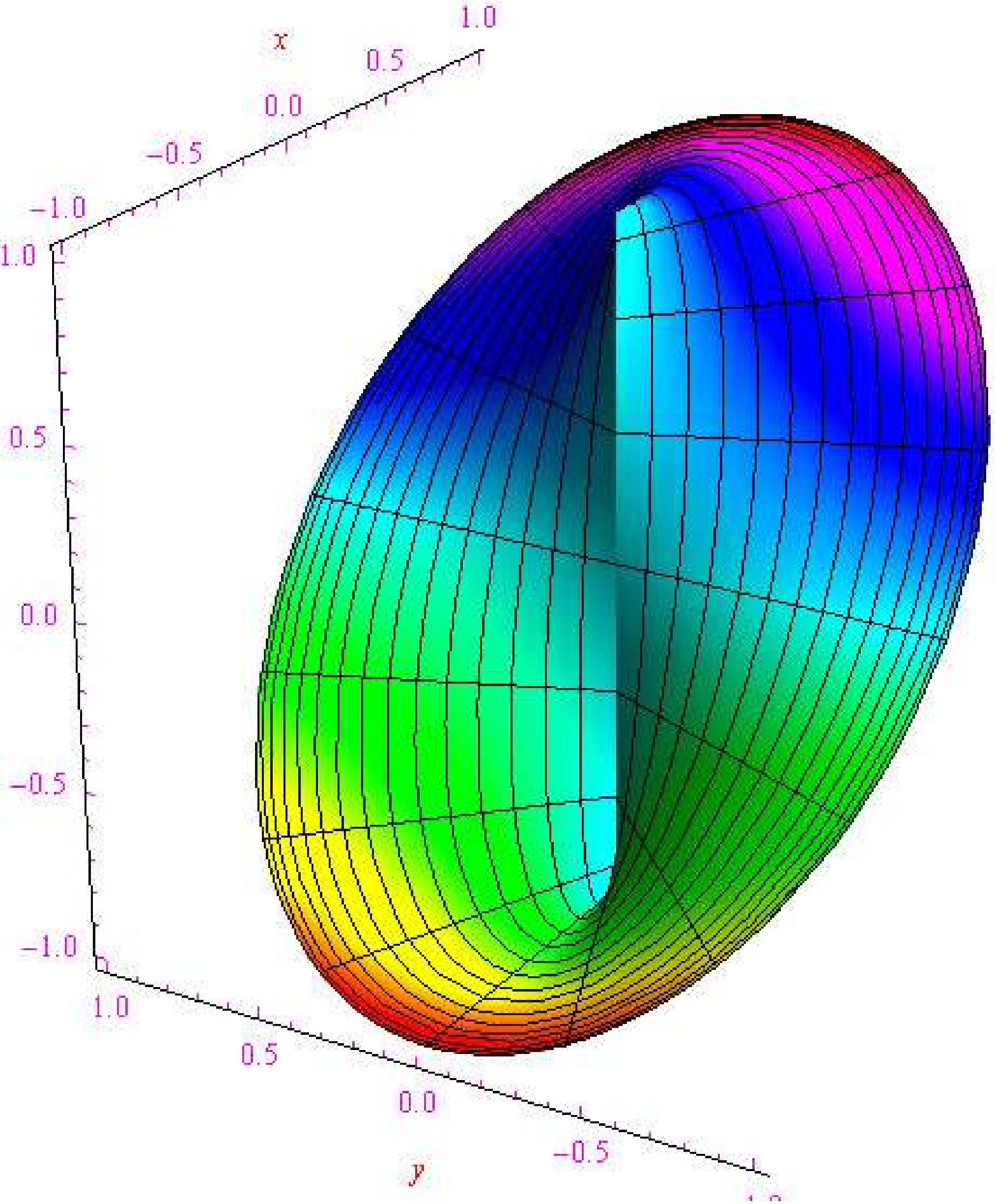
$\Rightarrow$ per il teorema fondamentale del calcolo integrale $\exists \, (f - f(a))' = f' = g$ continua

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni



SUCCESSIONI DI FUNZIONI

Parte 5

Proposizione

CIOÈ OGNI SUCCESSIONE DI CAUCHY CONVERGE NELLO SPAZIO METRICO

$\mathscr{C}^0([a,b])$, $\mathscr{C}^0_b(I)$, $B([a,b])$ sono completi rispetto la metrica lagrangiana

Dim: Sia $(f_n)_n$ successione di Cauchy in uno degli spazi indicati, ad esempio $B([a,b])$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}=\bar{n}(\varepsilon): \forall n,m\geq \bar{n} \quad d(f_n,f_m)=\sup_{t\in[a,b]} |f_n(t)-f_m(t)|<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n}=\bar{n}(\varepsilon): \forall n,m\geq \bar{n} \quad |f_n(t)-f_m(t)|<\varepsilon \ \forall t\in[a,b]$$

Come già visto, $\exists f:[a,b]\to\mathbb{R}: f_n\to f$ uniformemente

Bisogna verificare che $f\in B([a,b])$ (o, rispettivamente, agli altri due spazi)

Se $f_n \in B([a,b])$ o $f_n \in \mathcal{C}^0_b(I)$, quindi f_n limitata $\forall n$

$f_n \to f$ uniformemente $\Rightarrow f$ limitata

Se $f_n \in \mathcal{C}^0([a,b])$ o $f \in \mathcal{C}^0_b(I)$, quindi f_n continua $\forall n$

$f_n \to f$ uniformemente $\Rightarrow f$ continua

$\Rightarrow$ la convergenza è a una funzione nello stesso spazio delle f_n.

$\square$

Esercizi

1) Sia $f_n(x) = n x e^{-nx}$ $\quad f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N}$

Converge puntualmente / uniformemente?

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{nx}{e^{nx}} = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

$\Rightarrow$ ho convergenza puntuale a $f(x) = 0 \ \forall x \in [0,1]$

$$f_n'(x) = n\left(e^{-nx} + x e^{-nx}(-n)\right) = n e^{-nx}(1-nx)$$

$$f_n'(x) > 0 \iff 1-nx > 0 \iff x < \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow$ f_n è crescente per $x < \frac{1}{n}$, decrescente per $x > \frac{1}{n}$
ed ha punto di max assoluto in $\frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \left| f_n(x) - 0 \right| = \left| f_n(x) \right| \leq \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow d(f_n, 0) = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{e} \longrightarrow \frac{1}{e} \neq 0$$

$\Rightarrow$ NON HO CONVERGENZA UNIFORME

2) Studiare la convergenza puntuale e uniforme di

$$f_n(x) = n^{-2}\sqrt{1-x^{2n}} \quad x \in [-1,1] \ , n > 0$$

Si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{1-x^{2n}}}{n^2} = 0 \ \forall x \in [-1,1]$

Bisogna studiare $\sup\limits_{[-1,1]} |f_n(x) - 0| = \sup\limits_{[-1,1]} \dfrac{\sqrt{1-x^{2n}}}{n^2}$

Studiamo la funzione $f_n(x) \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$f'_n(x) = \frac{-x^{2n-1}}{n\sqrt{1-x^{2n}}}$$

$f'_n(x) > 0 \iff -1 < x < 0 \qquad f'_n(x) < 0 \iff 0 < x < 1$

$f'_n(0) = 0$

$\Rightarrow x_0 = 0$ punto di massimo per f_n in $[-1, 1]$

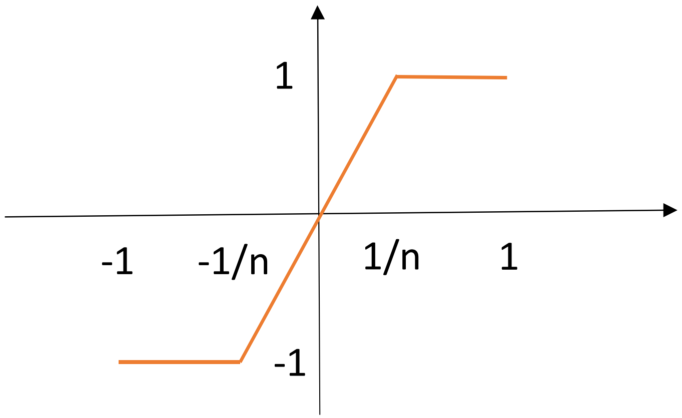
$$\max_{[-1,1]} f_n(x) = f_n(0) = \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sup_{[-1,1]} |f_n(x)| = \max_{[-1,1]} |f_n(x)| = \max_{[-1,1]} f_n(x) = f_n(0) = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{\text{per } n \to +\infty} 0$$

$\Rightarrow \sup_{[-1,1]} |f_n(x)| \longrightarrow 0$ per $n \to +\infty$ $\Rightarrow f_n \to 0$ uniformemente

3) Studiare la convergenza puntuale e uniforme di

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \le x \le -\frac{1}{n} \\ nx & \text{se } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{se } \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$



Se $x_0 = 0$, $f_n(x_0) = 0 \longrightarrow 0$ per $n \to +\infty$

Sia $x \in]0,1]$. Si ha $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, quindi definitivamente

si avrà $\frac{1}{n} < x$, cioè definitivamente $f_n(x) = 1$

$\Rightarrow \forall x \in]0,1]$ si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \underline{1}$

Simmetricamente (f_n è dispari) si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = -1$

$\forall x \in [-1, 0[$

$$\Rightarrow \quad f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Ma $f_n(x)$ continua $\forall n$. Infatti

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \le x \le -\frac{1}{n} \quad \leftarrow \text{CONTINUA} \\ nx & \text{se } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \quad \leftarrow \text{CONTINUA} \\ 1 & \text{se } \frac{1}{n} \le x \le 1 \quad \leftarrow \text{CONTINUA} \end{cases}$$

con $n\left(-\frac{1}{n}\right) = -1$ e $n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$

Ma f non è continua $\Rightarrow$ la convergenza non può essere uniforme.

4) Sia $f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{se } 0 < x < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$

Sia $x \in]0,1]$. Poiché $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, si avrà

$\frac{1}{n} \leq x$ definitivamente

$\Rightarrow$ definitivamente $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$

Verifichiamo ora la convergenza uniforme

Osserviamo che

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{se } 0 < x < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases} \Rightarrow |f_n(x)| \le \sqrt{n} \quad \forall x \in]0,1]$$

$$\frac{1}{n} \le x \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \le \sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \le \sqrt{n}$$

$\Rightarrow f_n$ limitata $\forall n \in \mathbb{N}$

Ma $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ non è limitata su $]0,1]$ perché

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \quad \Rightarrow \text{ non c'è convergenza uniforme.}$$

5) Si consideri la successione di funzioni in $[0,1]$

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 & \text{se } \frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si studi la convergenza puntuale e uniforme

Poiché $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, definitivamente si avrà $\frac{1}{n} < x$, quindi definitivamente $f_n(x) = 0$ $\forall x \in]0,1]$

Per $x=0$ si ha $f_n(0) = 0$, quindi $f_n \to 0$ puntualmente.

Si noti che sia f che f_n $(\forall n)$ sono integrabili

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1/n} n^2\,dx = n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$\int_0^1 0\,dx = 0$$

NON VALE LO SCAMBIO LIMITE - INTEGRALE $\Rightarrow$ NON C'È CONVERGENZA UNIFORME

Ma $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

Alternativamente

$$\sup_{[0,1]} |f_n(x) - 0| = \sup_{[0,1]} n^2 \longrightarrow +\infty \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\Rightarrow$ non c'è convergenza uniforme.