Dalla ricorsione primitiva ad un modello, Turing-completo, di computabilità

Eugenio G. Omodeo

Logica Matematica, a.a. 2020/2021

1 Specifica di alcune funzioni ricorsive primitive

In base alla definizione—presentata il 12/04 —della collezione $\mathfrak{P}$ delle *funzioni ricorsive primitive*, le seguenti funzioni (cosí come infinite altre) appartengono a $\mathfrak{P}$:

Addizione

$$\begin{cases} x + 0 & = & x \\ x + \mathsf{S}\, y & = & \mathsf{S}(x+y) \end{cases}$$

Moltiplicazione

$$\begin{cases} x \cdot 0 & = & 0 \\ x \cdot \mathsf{S}\, y & = & x \cdot y \, + \, x \end{cases}$$

Fattoriale

$$\begin{cases} 0\,! & = & 1 \\ (\mathsf{S}\, x)\,! & = & (x\,!) \cdot (\mathsf{S}\, x) \end{cases}$$

Elevamento a potenza

$$\begin{cases} x^0 & = & 1 \\ x^{\mathsf{S}\, y} & = & x^y \cdot x \end{cases}$$

'Negato'

$$\mathsf{ng}\, x \;=\; 0^x$$

Segno, o 'asserito'

$$\mathsf{sg}\, x \;=\; 0^{0^x}$$

'Predecessore'

$$\begin{cases} \mathsf{pr}\, 0 & = & 0 \\ \mathsf{pr}\, \mathsf{S}\, x & = & x \end{cases}$$

'Sottrazione'

$$\begin{cases} x \dot{-} 0 & = & x \\ x \dot{-} \mathsf{S}\, y & = & \mathsf{pr}(x \dot{-} y) \end{cases}$$

Distanza

$$|x - y| \;=\; (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$$

Resto

$$\begin{cases} 0 \,\%\, y & = & 0 \\ (\mathsf{S}\, x) \,\%\, y & = & \mathsf{S}(x \,\%\, y) \cdot \mathsf{sg}\, |y - \mathsf{S}(x \,\%\, y)| \end{cases}$$

Al lettore il compito di spiegare nel dettaglio queste specifiche—anche per colmare un lieve divario che presentano rispetto alla definizione di $\mathfrak{P}$.

È vero che ogni polinomio diofanteo designa una funzione ricorsiva primitiva?

2 Dalla ricorsione primitiva alla ricorsione generale

Sia:

g una funzione *parziale* ad $M+1$ argomenti naturali, con risultato naturale,

situazione che denotiamo scrivendo che

$$g : \mathbb{N}^{M+1} \rightharpoonup \mathbb{N}\,.$$

Il significato di questa mezza freccia e della sottolineatura '*parziale*' che la precede è questo: il dominio D di g è incluso in una potenza cartesiana di $\mathbb{N}$, però non è detto che la ricopra per intero. Nello specifico $D \subseteq \mathbb{N}^{M+1}$, però forse $D \subsetneq \mathbb{N}^{M+1}$.

Cosí si definisce la *minimalizzazione*

$$\min_n [\, g(x_1\,,\ldots,\,x_M\,,\,n) \;=\; 0\,]$$

di g: si tratta della funzione

$$\langle x_1,\ldots,x_M\rangle \stackrel{h}{\longmapsto} n$$

che risulta definita quando 0 è un valore assunto da g, purché n sia tale che

- $g(\vec{x}, n) = 0$ ed inoltre (se $n > 0$) Di qui in poi $\vec{x}$ sta per $x_1, \ldots, x_M$
- i valori $g(\vec{x}, 0), \ldots, g(\vec{x}, n-1)$ sono *tutti* definiti e diversi da 0.

Al lettore il compito di introdurre la forma un po' piú generale di minimalizzazione

$$\min_{n \geqslant \ell} [\, g(x_1\,,\ldots,\,x_M\,,\,n) \;=\; 0\,]\;,$$

in termini intuitivi e curando che $\min_n[g(\vec{x}\,,\,n) = 0] = \min_{n\geqslant 0}[g(\vec{x}\,,\,n) = 0]$

A questo punto, in analogia con la definizione già data di $\mathfrak{P}$ e previa puntualizzazione—qui lasciata al lettore—su come vadano intese composizione e ricorsione (primitiva) qualora vengano applicate a funzioni parziali, possiamo introdurre le funzioni computabili:

Definizione 1 *La collezione $\mathfrak{C}$ delle* FUNZIONI COMPUTABILI PARZIALI *è il piú piccolo insieme di funzioni parziali, ad argomenti e risultato in $\mathbb{N}$:*

- cui appartengano tutte le funzioni (ricorsive primitive) *iniziali* e che
- sia chiuso per *composizione*, *ricorsione* (primitiva), *minimalizzazione*.

Dalle definizioni scende subito che $\mathfrak{P} \subsetneq \mathfrak{C}$. Meno ovvio: in $\mathfrak{C} \setminus \mathfrak{P}$ vi sono funzioni totali.

Sostituti formali per la calcolabilità

Basic Result, Part I *By means of detailed combinatorial studies* (see, for example, Turing [1937] and Kleene [1936*a*],) *the proposed characterizations of Turing and of Kleene, as well as those of Church, Post, Markov, and certain others, were all shown to be equivalent; that is to say, exactly the same class of partial functions (and hence of total functions) is obtained in each case.*

Definition The functions falling within this class are called *recursive functions*. The partial functions of this class might, naturally, be termed "recursive partial functions." It has become standard usage, however, to call them *partial recursive functions*.

These equivalence demonstrations can be generalized to show that over certain very broad families of enlargements of these formal characterizations the class of partial functions obtained remains unchanged. (For example, if we allow

[Rogers(1967), pag. 18]

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

La tesi di Turing–Church

The claim that each of the standard formal characterizations provides satisfactory counterparts to the informal notions of *algorithm* and *algorithmic function* cannot be proved. It must be accepted or rejected on grounds that are, in large part, empirical. (That the claim for one charac-

. . .

see question *10 in §1.1.) On the basis of this evidence, many mathematicians have accepted the claim that the standard characterizations give a satisfactory formalization, or "rational reconstruction," of the (necessarily vague) informal notions. This claim is often referred to as *Church's Thesis*. Church's Thesis may be viewed as a *proposal* as well as a claim, a proposal that we agree henceforth to supply certain previously intuitive terms (e.g., "function computable by algorithm") with certain precise meanings.

[Rogers(1967), pag. 20]

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE