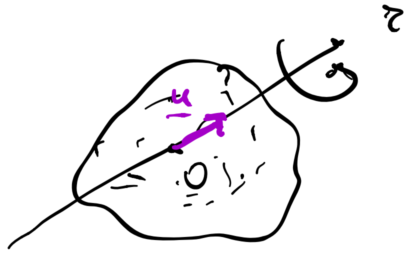
MECCANICA RAZIONALE

Ing Civile & Ambientale
Navale

12 Aprile 2021

Trasformazione di inerzia.

Momento di inerzia



$\underline{u} = \text{vers } z$

$$I_z = \sum_{P \in S} m_P \left\| \underline{u} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \right\|^2$$

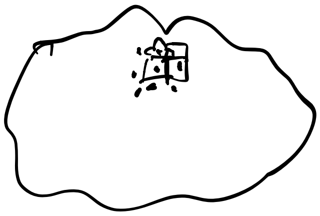
$$\text{" } I \sim \sum m \cdot \text{distanza}^2 \text{ "}$$

Ad esempio momento angolare
energia cinetica

(punto materiale $L_z = \omega I_z$, $E = \frac{1}{2} I_z \omega^2$

Trasformazione di inerzia

$$I_O(\underline{y}) = \sum_{p\in\mathcal{R}}' m_p (\underline{x}_p - \underline{x}_O) \wedge \left[\underline{y} \wedge (\underline{x}_p - \underline{x}_O)\right]$$



$$m_p \longrightarrow \rho$$
$$\Sigma \longrightarrow \iiint$$

Operatore: lineare & simmetrico

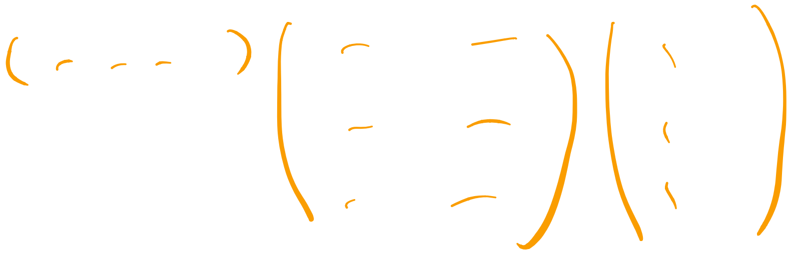
rappresentato da una matrice

$$I_{O\,ij} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}$$

elementi diagonali: (fissato $O, \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$)

$$I_{jj} = \underline{u}_j \cdot I_O(\underline{u}_j) \qquad \underline{u}_j \text{ asse}$$

= momenti di inerzia rispetto a $\underline{u}_j$



Ellissoide di inerzia

$$\left\{ P : \|x_P - x_O\|^2 = \frac{c}{I_{z_{OP}}} \right\}$$

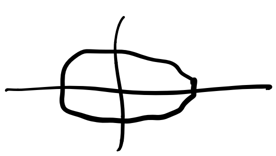
$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = x \cdot I_O(x) = c \right\}$$

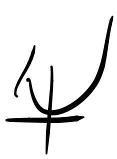
$$f(x) = I_{11} x_1^2 + I_{22} x_2^2 + I_{33} x_3^2 + 2 I_{12} x_1 x_2 + 2 I_{13} x_1 x_3 + 2 I_{23} x_2 x_3$$

↳ ellissoide

(2D $\quad I_{11} x_1^2 + I_{22} x_2^2 + 2 I_{12} x_1 x_2$)

ellisse

( distanza finita

)

Rappresentazione canonica

$$\boxed{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1}$$

$$\underline{x} \cdot I_O(\underline{x}) = 1 \longrightarrow J_1 x_1^2 + J_2 x_2^2 + J_3 x_3^2 = 1$$

$$I_O = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

Assi principali di inerzia (rel. ad O)

→ · assi di simmetria dell'ellissoide

→ · autovettori di I_O

→ · assi t.c. i momenti deviatori si annullano

Vediamo alcuni metodi per calcolare gli assi principali di inerzia

1) <u>Metodo degli</u> <u>autovalori</u> & <u>autovettori</u>

Supponiamo di conoscere I_O in una

Terna, e cerchiamo

$$I_O(\underline{x}) = \lambda\, \underline{x}$$

quindi $\quad I_O \cdot \underline{x} - \lambda\, \mathbb{1} \cdot \underline{x} = \underline{0}$

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\underbrace{\left(I_O - \lambda\, \mathbb{1} \right)}_{\text{matrice di coefficienti}} \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

sistema lineare omogeneo
3 equazioni
3 incognite x_1, x_2, x_3

Se vogliamo soluzioni $\underline{x} \neq \underline{0}$, dobbiamo cercare λ tali che $\det\left(I_O - \lambda\, \mathbb{1} \right) = 0$

"equazione caratteristica per gli autovalori"

Autovalori: momenti di inerzia principali (momenti di inerzia rispetto agli assi principali $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix}$)

Algebra: matrice simmetrica reale

$n \times n$ ha n autovalori reali

Trovato λ autovalore $\rightarrow$ troviamo l'autovettore corrispondente

$$\lambda \longrightarrow \underline{x} \quad \text{t.c.} \quad (I_O - \lambda \mathbb{1})\,\underline{x} = \underline{0}$$

normalizzato $\underline{u} = \dfrac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}$

<u>Algebra</u>: matrice simmetrica $n \times n$ reale, gli autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali

<u>Algebra</u>: matrice simmetrica reale $n \times n$, $\exists$ <u>almeno una</u> base ortonormale di n autovettori

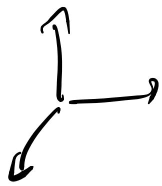
(in questa base la matrice è diagonale e gli elementi sulla diagonale sono gli autovalori)

Fisso $O \in R$

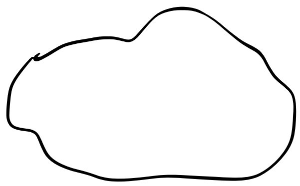
$$I_O = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

$\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$

$\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 = 0$



$$I_O = \begin{pmatrix} J_1 & & O \\ & J_2 & \\ O & & J_3 \end{pmatrix}$$



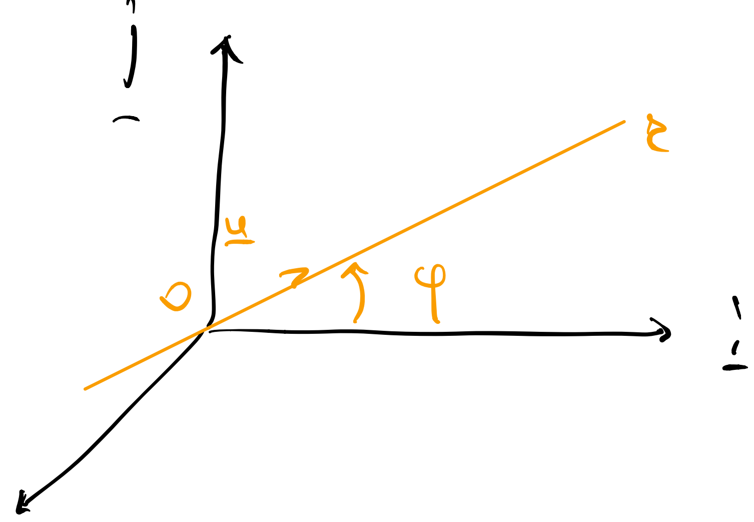
2) massimi & minimi di I_r nel fascio di rette per O

Questo metodo è utile se conosciamo uno degli assi principali e vogliamo gli altri due (esempio: rigidi piani)

$$I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11}+I_{22} \end{pmatrix}$$

Supponiamo di avere una terna $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$, dove $\underline{k}$ è asse principale di inerzia per O.

$$I_O = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}$$



$\underline{u} = \text{vers}\, r$

$$\underline{u} = \cos\varphi\, \underline{i} + \sin\varphi\, \underline{j}$$

Allora

$$I_r(\varphi) = \underline{u} \cdot I_O \cdot \underline{u}$$

$$= (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{u} = \cos\varphi\, \underline{i} + \sin\varphi\, \underline{j}$

$$= (\cos\varphi \quad \sin\varphi \quad 0) \begin{pmatrix} I_{11}\cos\varphi + I_{12}\sin\varphi \\ I_{12}\cos\varphi + I_{22}\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= I_{11}\cos^2\varphi + I_{22}\sin^2\varphi + 2 I_{12}\cos\varphi\sin\varphi$$

$$= I_r(\varphi)$$

Ellisse di inerzia: assi di simmetria corrispondono alla retta r per cui I_r è max o min

Vogliamo φ t.c. $\frac{d}{d\varphi} I_r(\varphi) = 0$

$$\frac{d}{d\varphi} I_2(\varphi) = -2 I_{11} \cos\varphi \sin\varphi + $$
$$+ 2 I_{22} \sin\varphi \cos\varphi + 2 I_{12} \left(-\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)$$

$$= \left(I_{22} - I_{11} \right) \sin 2\varphi + 2 I_{12} \cos 2\varphi = 0$$

$$\rightarrow \quad \cot (2\varphi) = \left(\frac{I_{11} - I_{22}}{2 I_{12}} \right)$$

risolvendo per $\varphi \in [0, \pi]$ troviamo

due valori φ_1, φ_2

$I_2(\varphi_1)$ $\quad I_2(\varphi_2)$ $\rightarrow$ momenti di inerzia principali

---

Seconda parte

Assi principali di inerzia

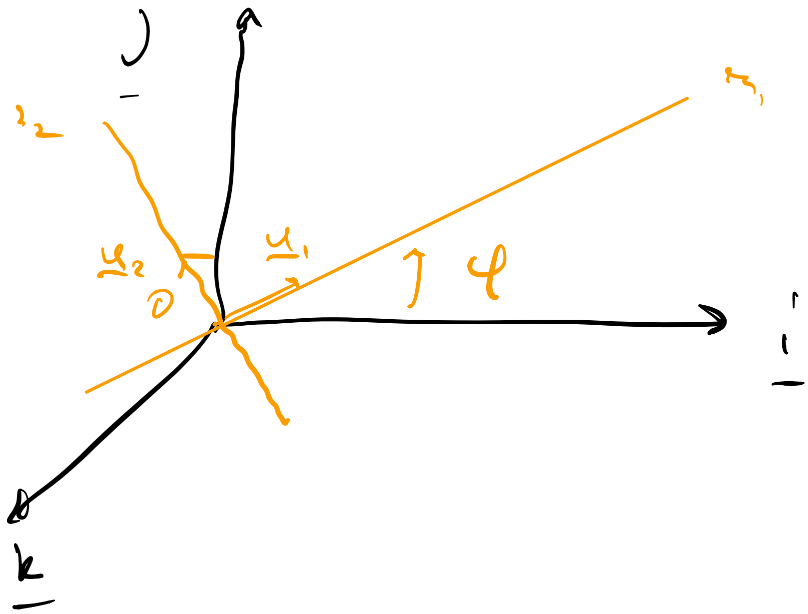
$\rightarrow$ autovalori & autovettori

$\rightarrow$ max e min I_2 in un fascio di rette passanti per O

3) <u>Annullamento</u> dei <u>momenti deviatori</u>

Nelle stesse condizioni di 2)

(cioè conosciamo uno degli assi principali)



cerchiamo φ $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$ tale che $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{k})$, il momento deviatore è nullo

$$\underline{u}_1 = \cos\varphi\, \underline{i} + \sin\varphi\, \underline{j}$$

$$\underline{u}_2 = -\sin\varphi\, \underline{i} + \cos\varphi\, \underline{j}$$

$$\underline{u}_2 \cdot I_O(\underline{u}_1) = 0$$

$$I_O(\underline{u}_1) = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_{11}\cos\varphi + I_{12}\sin\varphi \\ I_{12}\cos\varphi + I_{22}\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}_2 \cdot I_O(\underline{u}_1) = -\sin\varphi \left(I_{11}\cos\varphi + I_{12}\sin\varphi \right) + \cos\varphi \left(I_{12}\cos\varphi + I_{22}\sin\varphi \right)$$

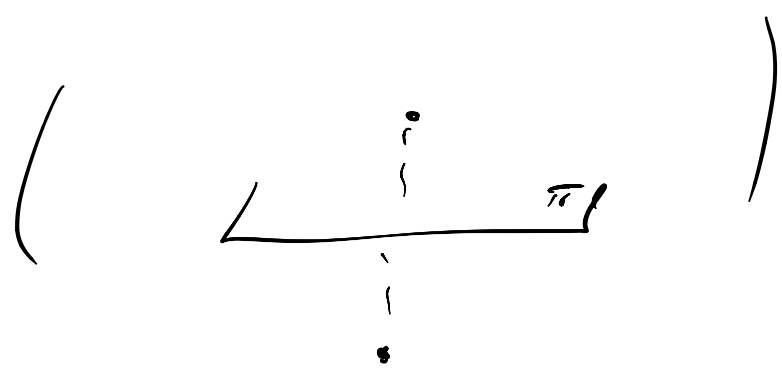
$$= I_{12} \cos 2\varphi + \frac{I_{22} - I_{11}}{2} \sin 2\varphi = 0$$

→ è la stessa condizione che abbiamo trovato in 2)

4) <u>Piano di simmetria materiale ortogonale</u>

Un piano π si dice di simmetria materiale ortogonale se

- è un piano di simmetria geometrica ortogonale



- i punti simmetrici rispetto al piano hanno massa uguale (o densità)

<u>Proposizione</u> Se π è un piano di simmetria materiale ortogonale per un

rigido R, allora $\forall$ punto $O \in \pi$, la retta per O e ortogonale al piano è un asse principale di inerzia (per O)

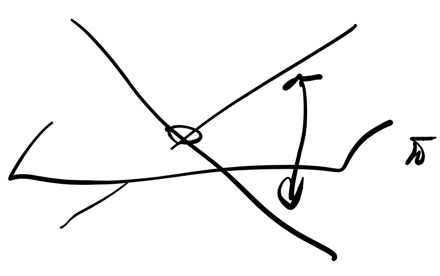
<u>Dim</u> Prendiamo due rette r e r' simmetriche rispetto a π e passanti per O. Per simmetria $I_r = I_{r'}$

Quindi π è un piano di simmetria dell'ellissoide di inerzia per O

Siccome è un piano di simmetria dell'ellissoide, la retta ortogonale al piano e passante per O è un asse di simmetria dell'ellissoide

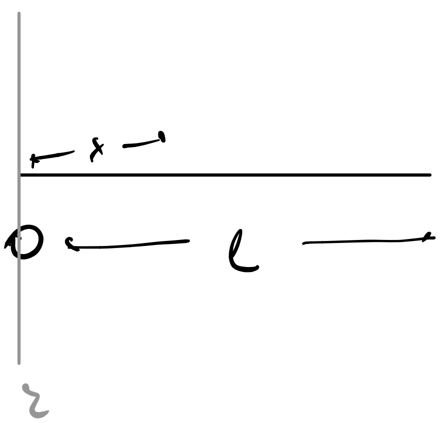
Quindi: la retta per O ortogonale al piano π è un asse principale di inerzia per O

c.v.d.



Calcolo di elementi di inerzia per alcune figure

Asta



Calcoliamo il momento di inerzia rispetto alla retta z passante per O

Densità $\rho(x)$. Dalla definizione

$$I_z = \int_0^l dx\, \rho(x)\, x^2$$

$$\sum_i m_i\, x^2$$

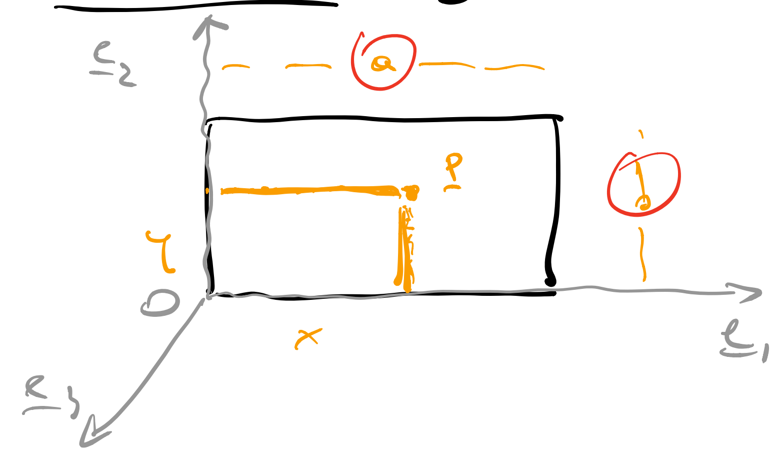
$\rho =$ costante, $\quad M = \int_0^l \rho\, dx = \rho l$

$$I_z = \int_0^l dx\, \rho x^2 = \int_0^l dx\, \frac{M}{l} x^2 = \frac{M}{l} \frac{l^3}{3} =$$

$$= \frac{M l^2}{3}$$

$\left(I_z \sim \sum m \text{ distanza}^2 \right)$

Lamina rettangolare



Densità

$$\rho = \rho(x,y)$$

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}$$

Dalla definizione

$$I_{11} = \int_0^a \int_0^b dx\, dy\, \rho\, y^2$$

Se prendiamo $\rho =$ costante : $M = \rho\, ab$

$$I_{11} = \int_0^a \int_0^b dx\, dy\, y^2 \frac{M}{ab} = \frac{M}{ab}\, a \frac{b^3}{3} = \frac{M b^2}{3}$$

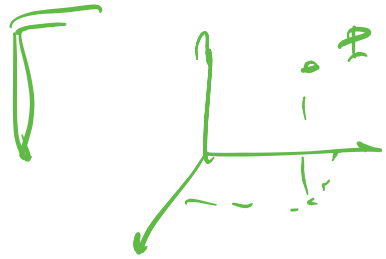
$$I_{22} = \int_0^a \int_0^b dx\, dy\, \rho\, x^2 \xrightarrow{\rho = \frac{M}{ab}} \frac{M}{ab}\, b \frac{a^3}{3} = \frac{M a^2}{3}$$

$$I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{M}{3}(a^2 + b^2)$$

$I_{13} = I_{23} = 0$ perché piano

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix}$$

$$I_{12} = -\int_0^a \int_0^b \rho\, x y\, dx\, dy \xrightarrow{\text{omogeneo}} -\rho \frac{a^2}{2} \frac{b^2}{2} = -M \frac{ab}{4}$$

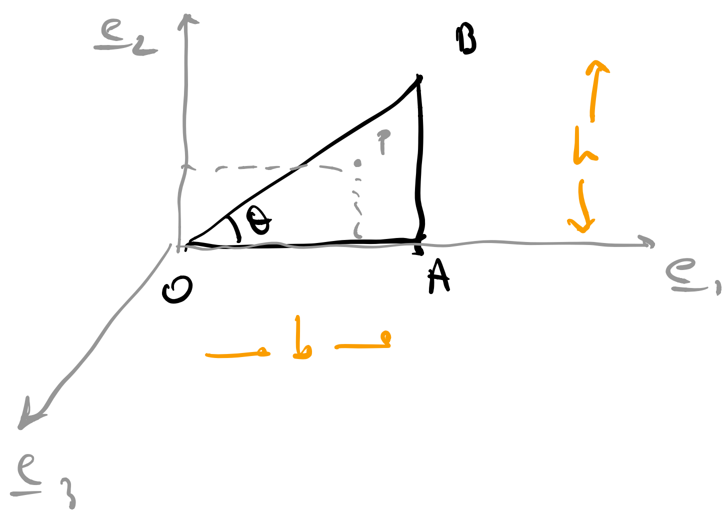


$$I_{11} = \sum_p m_p \left(x_{p,2}^2 + x_{p,1}^2 \right)$$

$$I_{22} = \sum_p m_p \left(x_{p,1}^2 + x_{p,3}^2 \right)$$

$$I_{12} = - \sum_p m_p \, x_{p,1} \, x_{p,2}$$

Triangolo rettangolo



$$\rho = \rho(x, y)$$

$$b = OB \cos\theta$$

$$h = OB \sin\theta$$

Punto P

$$x = L \cos\theta$$

$$y = L \sin\theta = \frac{x}{\cos\theta} \sin\theta = x \frac{h}{b}$$

$$I_{11} = \int_0^b dx \int_0^{\frac{h}{b}x} dy \; \rho(x, y) \, y^2$$

supponiamo ρ omogeneo

$$= \rho \int_0^b dx \left(\frac{h}{b} x \right)^3 \frac{1}{3} = \frac{\rho}{3} \left(\frac{h}{b} \right)^3 \frac{b^4}{4}$$

$$= \rho \frac{1}{12} h^3 b = \rho \frac{hb}{2} \frac{h^2}{6} = M \frac{h^2}{6}$$

$$M = \rho \frac{hb}{2}$$

$$I_{22} = \int_0^b dx\, x^2 \int_0^{\frac{h}{b}x} dy\, \rho \underset{\uparrow}{=} \rho \int_0^b x^2 \frac{h}{b} x\, dx =$$

ρ costante

$$= \rho \frac{h}{b} \frac{b^4}{4} = M \frac{b^2}{2}$$

$$I_{12} = - \int_0^b x \int_0^{\frac{h}{b}x} \rho\, y\, dx\, dy \underset{\uparrow}{=}$$

ρ costante

$$= -\rho \int_0^b x \left(\frac{h}{b} x\right)^2 \frac{1}{2} = -\rho \frac{1}{2} \frac{h^2}{b^2} \frac{b^4}{4}$$

$$= -\rho \frac{hb}{2} \frac{bh}{4} = - M \frac{bh}{4}$$

$$I_{33} = I_{11} + I_{22}, \quad I_{13} = I_{23} = 0$$