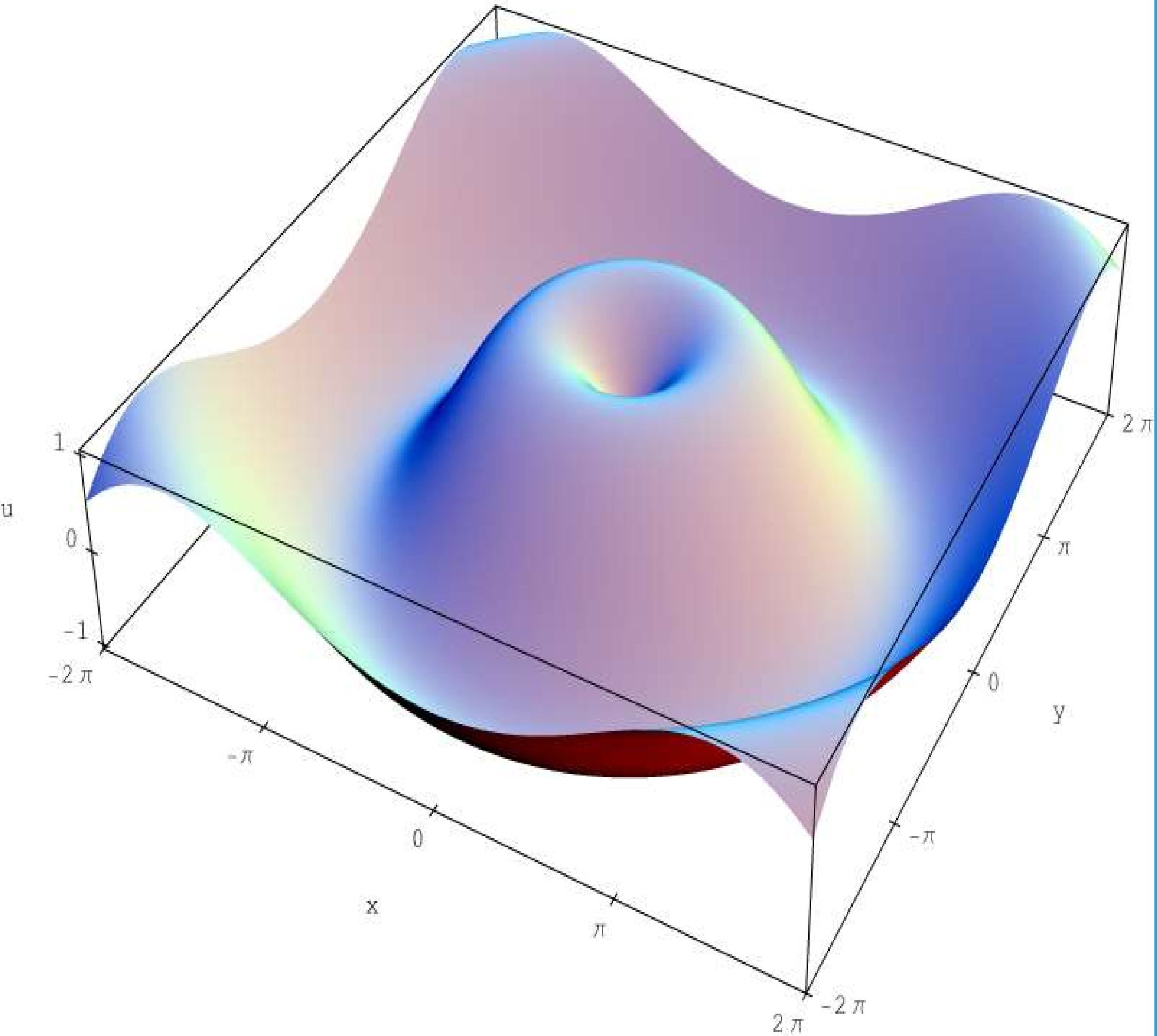
Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni



SERIE DI FUNZIONI

Parte 1

SERIE DI FUNZIONI

Data $(f_n)_n$ successione di funzioni

$f_n : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI

è detta SERIE DI FUNZIONI.

Si scrive $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, $\sum f_n(x)$

Negli spazi $\mathcal{C}^0([a,b])$, $\mathcal{C}^0_b(I)$, $\mathcal{B}(E)$ definiamo la convergenza di una serie tramite la convergenza della successione di somme parziali

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ CONVERGE PUNTUALMENTE $\Leftrightarrow (S_n)_n$ CONVERGE PUNTUALMENTE

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ CONVERGE UNIFORMEMENTE $\Leftrightarrow (S_n)_n$ CONVERGE UNIFORMEMENTE

$\Leftrightarrow (S_n)_n$ CONVERGE NELLA METRICA LAGRANGIANA.

NEL CASO DELLE SERIE NUMERICHE SI ERA VISTO QUANTO SEGUE

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \begin{cases} \text{CONVERGE A } \dfrac{1}{1-q} \text{ se } |q|<1 \\ \text{DIVERGE SE } |q|>1 \text{ o } q=1 \\ \text{È INDETERMINATA se } q=-1 \end{cases}$$

SERIE GEOMETRICA

Teorema (criterio di Cauchy per serie)

$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}: \forall n,m \geq \bar{n}\ |s_n - s_m| < \varepsilon$,

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}: \forall n,m \geq \bar{n}$, $n>m$ $|a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_n|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow$ (posto $m+1=p$, $n=p+q$ con $q\geq 0$) si ha

$\forall \varepsilon>0\ \exists \bar{n}: \forall p \geq \bar{n}$, $\forall q \geq 0$ si ha $\left|\sum_{n=p}^{p+q} a_n\right| < \varepsilon$

(o equivalentemente $\left|\sum_{n=0}^{q} a_{p+n}\right| < \varepsilon$)

Esempio (SERIE GEOMETRICA)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{SERIE GEOMETRICA}$$

è la serie originata dalla successione $f_n(x) = x^n$

CONVERGE PUNTUALMENTE IN $]-1,1[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

CONVERGE UNIFORMEMENTE IN $[-r,r]$ $\forall r : 0<r<1$

Infatti

$$S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$\Rightarrow$ poiché $|x| \leq r$ si ha

$$\left|S_n(x) - \frac{1}{1-x}\right| = \left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \leq \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

$|x|<1 \Rightarrow 1-x>0$

$|x| \leq r \Rightarrow |x|^{n+1} \leq r^{n+1}$

$\Downarrow$

$x \leq r \Rightarrow 1-x \geq 1-r$

$\Rightarrow \frac{1}{1-x} \leq \frac{1}{1-r}$

con $\lim_{n\to+\infty} \frac{r^{n+1}}{1-r} = 0 \quad (r \in]0,1[)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) : \forall n \geq \bar{n}:$

$$\left|S_n(x) - \frac{1}{1-x}\right| \leq \frac{r^{n+1}}{1-r} < \varepsilon \quad \forall x \in [-r,r]$$

$\Rightarrow S_n$ converge uniformemente a $\frac{1}{1-x}$

Criterio di Cauchy per serie di funzioni ($f_n : E \to \mathbb{R}$)

$\sum_n f_n(x)$ converge puntualmente $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in E$

$\exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, x) : \forall p \geq \bar{n}, \forall q \geq 0 \quad \left| \sum_{k=0}^{q} f_{p+k}(x) \right| < \varepsilon$

$\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) :$

$\forall x \in E, \forall p \geq \bar{n}, \forall q \geq 0 \quad \left| \sum_{k=0}^{q} f_{p+k}(x) \right| < \varepsilon$

Proposizione

$\sum_n f_n(x)$ converge puntualmente / uniformemente

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ puntualmente / uniformemente

Criterio di Weierstrass

Siano $f_n : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo e $c_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$:

1) $|f_n(x)| \leq c_n \ \forall x \in I$ (definitivamente)

2) $\sum_n c_n$ converge (in $\mathbb{R}$)

Allora $\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente in I.

Dim: $\sum_n c_n$ converge $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) : \forall p \geq \bar{n}, \forall q \geq 0$

$$\left| \sum_{k=0}^{q} c_{p+k} \right| < \varepsilon \qquad \text{CRITERIO DI CAUCHY}$$

$\Rightarrow \forall p \geq \bar{n}, \forall q \geq 0, \forall x \in I$

$$\left| \sum_{k=0}^{q} f_{p+k}(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{q} \left| f_{p+k}(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{q} c_{p+k} < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ per il criterio di Cauchy $\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente in I.

Data $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f limitata, definiamo

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x)|$$

$\|f\|_\infty$ è una norma in $\mathcal{C}^0([a,b])$, $\mathcal{C}^0_b(I)$, $B(E)$)

Soddisfa infatti le proprietà che definiscono una norma

Si noti inoltre che $\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x) - 0| =$

$= d(f, 0)$ con d metrica lagrangiana.

Def.: $\sum_n f_n(x)$ CONVERGE TOTALMENTE

$\iff$ la serie di numeri reali $\sum_n \|f_n\|_\infty$ converge

Teorema

$\sum_n f_n(x)$ converge totalmente $\Rightarrow$ $\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente

Inoltre $\left| \sum_n f_n(x) \right| \leq \sum_n \|f_n\|_\infty$

Dim: Posto $c_n = \|f_n\|_\infty \ \forall n$, si ha $|f_n(x)| \leq c_n \ \forall x$

$\Rightarrow \sum_n f_n(x)$ converge uniformemente per il criterio di Weierstrass

Inoltre, poiché $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\left| \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_\infty$$

passando al limite per $n \to +\infty$ (e ricordando che il valore assoluto è continuo) si ottiene

$$\left| \sum_n f_n(x) \right| \leq \sum_n \|f_n\|_\infty$$

__Teorema__ (scambio limite - somma)

Siano $f_n : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$. Se

i) $\sum_n f_n(x)$ converge uniformemente in I a $f(x)$

ii) $\exists \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \ell_n$

Allora $\sum_n \ell_n$ converge e, detta ℓ la sua somma, si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, cioè

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

__Dim:__ Segue dal teorema di scambio dei limiti applicato alla successione di somme parziali $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

$\sum_n f_n$ converge uniformemente a f $\iff$ $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ converge uniformemente a $f(x)$

$\exists \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \ell_n \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} s_n(x) = \lim_{x \to x_0} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \lim_{n \to +\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \ell_k = t_n$

Riassumendo

i) $(s_n)_n$ converge uniformemente a f

ii) $\lim_{x \to x_0} s_n(x) = t_n \quad \forall n$

$\Rightarrow$ Per il teorema dello scambio di limiti

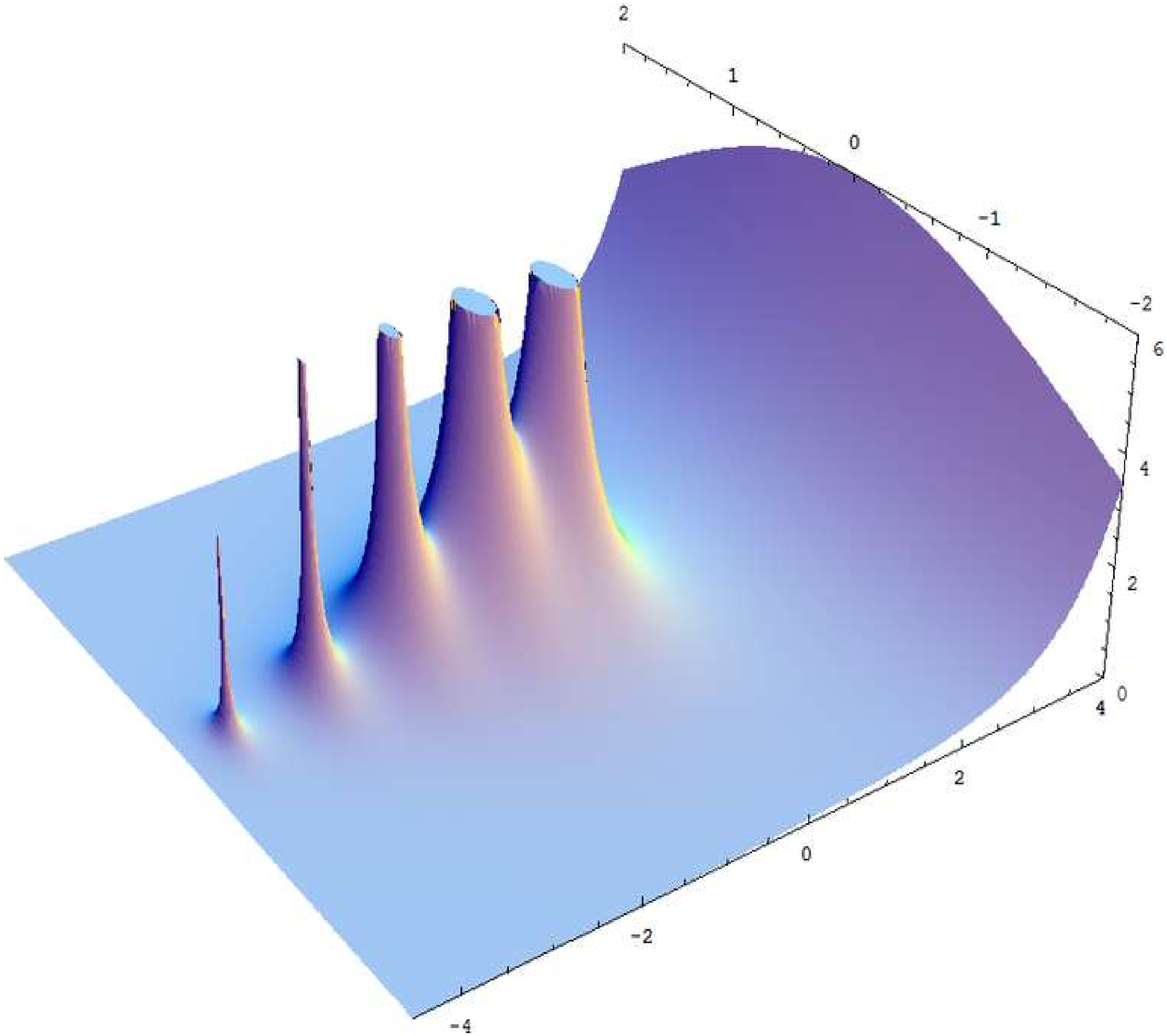
$$\exists\, \ell = \lim_{n \to +\infty} t_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \ell_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n \quad \text{e si ha} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni



SERIE DI FUNZIONI

Parte 2

Corollario

La somma di una serie uniformemente convergente di funzioni continue è una funzione continua

Dim: Siano f_n continue $\forall n$ e sia $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ la somma parziale della serie.

S_n è continua perchè somma di funzioni continue

$S_n \longrightarrow \sum_n f_n$ che risulta continua perchè limite uniforme di funzioni continue. $\square$

Teorema (scambio somma - derivata)

Siano $f_n :]a,b[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabili $\forall n \in \mathbb{N}$. Se

i) $\sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$ converge uniformemente in $]a,b[$ a $g(x)$

ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge in almeno un $x_0 \in]a,b[$

Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x)$ uniformemente in $]a,b[$ e

$f' = g$, cioè $\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$

Dim: Segue dal teorema di scambio limite-derivata applicato alle successioni di somme parziali

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \quad e \quad s'_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f'_k(x) \qquad \square$$

Corollario

Nelle ipotesi del teorema precedente, se le f_n sono di classe C^k in $]a,b[$, le serie $\sum_n f_n, \sum_n f'_n, \dots, \sum_n f_n^{(k)}$ convergono uniformemente in $]a,b[$ a funzioni $f, g = f', \dots, f^{(k)}$ rispettivamente e f è di classe C^k in $]a,b[$.

Dim: Dal corrispondente teorema per successioni di funzioni $\square$

Esempio

Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Se $x=0$ si ha $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0}{n+1} = 0 \Rightarrow$ la serie converge in 0.

La serie delle derivate è $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, che converge uniformemente in $[-r,r]$ $\forall\, r \in]0,1[$ (serie geometrica) a $\frac{1}{1-x}$

$\Rightarrow$ per il teorema di scambio somma-derivata

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ converge a } f(x) \text{ con } f'(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt + c = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt + c =$$

$$= -\log(1-x) + c$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = -\log(1) + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\log(1-x) \text{ uniformemente in } [-r, r].$$

Teorema (scambio somma - integrale)

Siano $f_n : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabili $\forall n \in \mathbb{N}$ e sia

$\sum_n f_n(x) = f(x)$ uniformemente in $[a,b]$.

Allora f è integrabile in $[a,b]$ e si ha

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Dim: Dal corrispondente teorema per successioni di funzioni applicato alla successione delle somme parziali $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ $\square$

Esercizi

1) Studiare la convergenza di $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right)$ in $]0,1[$.

Si ha $f_n(x) = \log\left(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right) \quad f_n :]0,1[\to \mathbb{R}$

$x \in]0,1[\Rightarrow 1+x^n > 0$

$\Rightarrow \quad f_n(x) = \log(1+x^{n+1}) - \log(1+x^n)$

$\Rightarrow \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \log(1+x^{n+1}) - \log(1+x)$

GLI ALTRI TERMINI SI ELIDONO

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \log(1+\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{x^{n+1}}) - \log(1+x) = -\log(1+x)$$

$(x \in]0,1[)$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right) = -\log(1+x) \quad \text{puntualmente}$$

Vediamo se la convergenza è uniforme su $]0,1[$

$$\sup_{]0,1[} \left| S_n(x) + \log(1+x) \right| = \sup_{]0,1[} \left| \log(1+x^{n+1}) - \log(1+x) + \log(1+x) \right| =$$

$$= \sup_{]0,1[} \left| \log(1+x^{n+1}) \right| = \log 2 \longrightarrow \log 2 \neq 0 \Rightarrow$$

CRESCENTE SU $]0,1[$

NON C'È CONVERGENZA UNIFORME SU $]0,1[$

Vediamo cosa succede sugli intervalli $]0,r]$, $0<r<1$

$$\sup_{]0,r]} |s_n(x)+\log(1+x)| = \sup_{]0,r]} |\log(1+x^{n+1})| = \log(1+r^{n+1})$$

con $\lim_{n\to+\infty} \log(1+r^{n+1})=0$

$0<r<1$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right) = -\log(1+x) \quad \text{puntualmente per } x\in]0,1[$$

e uniformemente su $]0,r]$ $\forall r\in\mathbb{R}: 0<r<1$.

3) Studiare l'insieme di convergenza puntuale di $(f_n)_n$:

$f_n(x) = x^n(1-x^n)$ $\quad f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

Studiare anche la convergenza uniforme su tale insieme e sugli insiemi $[0,b]$ con $0<b<1$

Verificare che $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$

Studiamo la convergenza puntuale.

$x=0$ o $x=1$ $\Rightarrow$ $f_n(x)=0 \;\forall n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(x)=0$ per $x=0, x=1$.

Sia $x \in]0,1[$.

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n(1-x^n) = 0 \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{puntualmente } \forall x \in [0,1]$$

Studiamo ora la convergenza uniforme.

Dobbiamo vedere se

$$\sup_{[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{[0,1]} x^n(1-x^n) \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty .$$

$$f_n'(x) = n x^{n-1}(1-x^n) + x^n(-n x^{n-1}) = n x^{n-1} - 2n x^{2n-1} =$$
$$= n x^{n-1}(1-2x^n)$$

$$f_n'(x) > 0 \iff 1-2x^n > 0 \iff x \in \left]0, \frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right[$$

f_n crescente tra 0 e $\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, decrescente tra $\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ e 1,

con punto di max assoluto in $\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$.

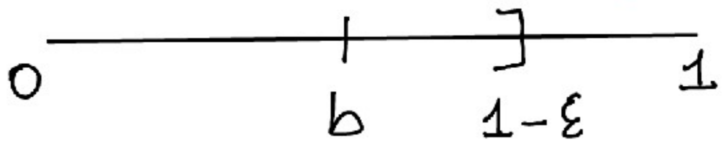
$$\Rightarrow \sup_{[0,1]} |f(x)| = \max_{[0,1]} x^n(1-x^n) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) = \frac{1}{4} \to \frac{1}{4} \neq 0$$

$\Rightarrow$ non c'è convergenza uniforme in $[0,1]$.

Consideriamo $[0,b]$ con $0<b<1$

Se $b<\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, f_n è crescente in $[0,b]$, perché è crescente tra 0 e $\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$.

Si ha $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2}}=1 \Rightarrow$ definitivamente si ha $b<\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$



DEFINITIVAMENTE $\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ ENTRA IN QUESTO INTORNO DI 1

$\Rightarrow f_n$ è definitivamente crescente in $[0,b]$

$$\Rightarrow \sup_{[0,b]} |f_n(x) - 0| = \max_{[0,b]} x^n(1-x^n) = b^n(1-b^n)$$

con $\lim_{n\to+\infty} b^n(1-b^n) = 0 \quad (b \in]0,1[)$

$\Rightarrow f_n \to 0$ uniformemente in $[0,b]$ con $0<b<1$

Non si può applicare al calcolo dell'integrale il teorema di scambio tra limite e integrale perchè non ho convergenza uniforme in $[0,1]$

$\Rightarrow$ Dimostro $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x) = 0$ direttamente

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 x^n(1-x^n)\,dx = \dots = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1}$$

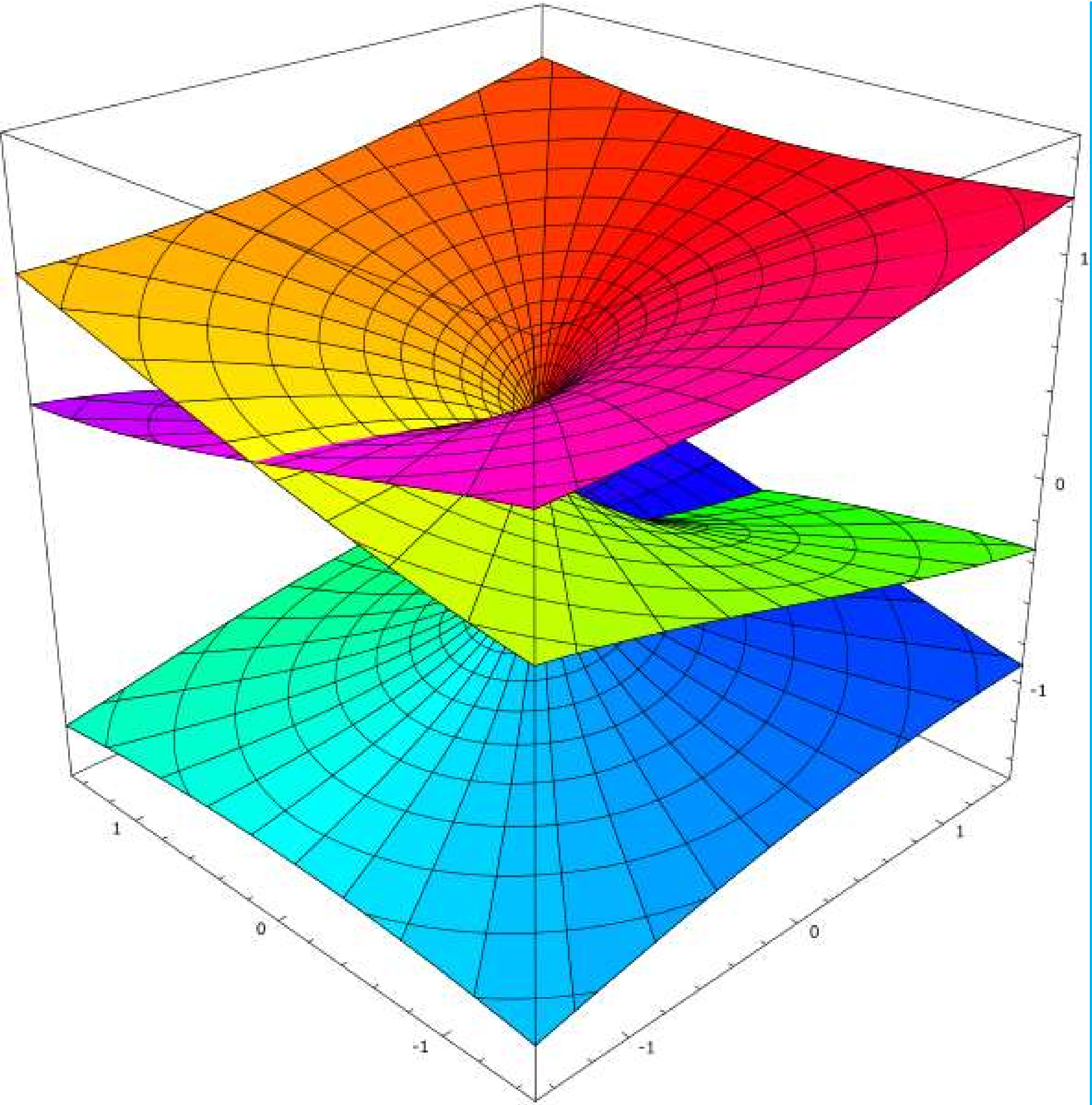
$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} = 0$$

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica
corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni



SERIE DI FUNZIONI

Parte 3

2) Data la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{2n+x^2}$, si trovi dove converge puntualmente.

Si dimostri che la serie converge uniformemente su $[0,b]$, $\forall b: 0<b<\frac{1}{2}$ e che la sua somma è continua su $[0,\frac{1}{2}[$.

Si ha $f_n(x) = \frac{(2x)^n}{2n+x^2}$ $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Nei punti in cui si ha convergenza puntuale deve essere

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2x)^n}{2n+x^2} = 0$$

Si ha $\lim_{n\to+\infty} \frac{(2x)^n}{2n+x^2} = \begin{cases} \infty & \text{se } |2x|>1 \\ 0 & \text{se } |2x|\leq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ resta da esaminare $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Applichiamo il criterio della radice per studiare la convergenza (puntuale) assoluta in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|2x|^n}{2n+x^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|2x|}{\sqrt[n]{2n+x^2}} = |2x|$$

Infatti $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n+x^2} = \lim_{n\to+\infty} e^{\log(\sqrt[n]{2n+x^2})} = \lim_{n\to+\infty} e^{\overbrace{\frac{1}{n}\log(2n+x^2)}^{\to 0}} = 1$

$\Rightarrow$ per il criterio della radice ho convergenza assoluta per $|2x|<1$, cioè in $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

$\Rightarrow$ la serie converge puntualmente in $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

Vediamo ora cosa succede in $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow$ ho la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2n+\frac{1}{4}}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2n+\frac{1}{4}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

TERMINE DELLA SERIE ARMONICA

$\Rightarrow$ la serie non converge in $\frac{1}{2}$ per confronto asintotico con la serie armonica.

$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ ho la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1/4}$

Si tratta di una serie a segno alterno con

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+\frac{1}{4}} = 0 \quad , \quad \frac{1}{2n+\frac{1}{4}} \text{ successione decrescente}$$

$2x+\frac{1}{4}$ è funzione crescente

$\Rightarrow$ converge per il criterio di Leibniz.

$\Rightarrow$ la serie di funzioni converge puntualmente in $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.

Studiamo ora la convergenza uniforme in $[0,b]$ con $0<b<\frac{1}{2}$ con il criterio di Weierstrass.

$$x \in [0,b] \Rightarrow |f_n(x)| = \left| \frac{(2x)^n}{2n+x^2} \right| = \frac{(2x)^n}{2n+x^2}$$

Poichè $\forall n \geq 2$, $\forall x \in [0,b]$ si ha

$$2n+x^2 \geq 2n \quad e \quad 2x \leq 2b$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(2x)^n}{2n+x^2} \leq \frac{(2b)^n}{2n} \quad \forall x \in [0,b]$$

la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2b)^n}{2n}$ converge per il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(2b)^n}{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2b}{\sqrt[n]{2n}} = 2b < 1 \quad (\Leftarrow\; b < \tfrac{1}{2})$$

$$\Rightarrow \|f_n\|_\infty = \sup_{[0,b]} f_n(x) \leq \frac{(2b)^n}{2n} \quad \text{con } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2b)^n}{2n} \text{ convergente}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} f_n \text{ converge uniformemente in } [0,b] \text{ con } 0<b<\frac{1}{2}.$$

TOTALMENTE E DUNQUE ANCHE

Studiamo ora la continuità della funzione somma in $[0, \frac{1}{2}[$.

Tutti i termini $f_n(x)$ della serie sono continui in $[0, \frac{1}{2}[$, ma non sappiamo se la serie converge uniformemente in $[0, \frac{1}{2}[$ e dunque non possiamo concludere direttamente.

Sia $\overline{x} \in [0, \frac{1}{2}[$ e sia $b : 0 \leq \overline{x} < b < \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ I termini della serie sono continui in $[0, b]$ e la serie converge uniformemente in $[0, b]$

$\Rightarrow$ la somma è continua in $[0, b]$ e dunque in $\overline{x}$

Poiché questo vale $\forall x \in [0, \frac{1}{2}[$ si conclude che la somma è continua in $[0, \frac{1}{2}[$

4) Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \frac{e^{-nx^4}}{x^2}$ si determini dove converge puntualmente, la sua somma e un intervallo di convergenza uniforme.

$f_n : E \to \mathbb{R} \qquad E = \mathbb{R}\setminus\{0\} \qquad f_n(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \frac{e^{-nx^4}}{x^2}$

Studiamo la convergenza puntuale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \frac{e^{-nx^4}}{x^2} = \frac{3}{5x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3e^{-x^4}}{5}\right)^n$$ $\Rightarrow$ si ha una serie geometrica

$\Rightarrow$ converge per $\left| \frac{3}{5} e^{-x^4} \right| = \frac{3}{5} e^{-x^4} < 1$

$$\frac{3}{5}e^{-x^4}<1 \Leftrightarrow e^{-x^4}<\frac{5}{3} \Leftrightarrow -x^4<\log\frac{5}{3} \Leftrightarrow x^4>-\log\frac{5}{3}$$

Ma $\frac{5}{3}>1 \Rightarrow \log\frac{5}{3}>0 \Rightarrow -\log\frac{5}{3}<0<x^4$

$\Rightarrow$ l'insieme di convergenza è $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Determiniamo la somma

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\frac{e^{-nx^4}}{x^2}=\frac{3}{5x^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}e^{-x^4}\right)^n=\frac{3}{5x^2}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{5}e^{-x^4}}-1\right)=$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n-1=$$

$$=\frac{1}{1-z}-1.$$ Qui si pone $z=\frac{3}{5}e^{-x^4}$

$$=\;\dots\;=\frac{9}{5x^2(5e^{x^4}-3)}$$

Per cercare un intervallo di convergenza uniforme della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \frac{e^{-nx^4}}{x^2}$, cerchiamo di sfruttare il criterio di Weierstrass.

Sia $I = [a, +\infty[$ con $a > 0$

$$x \in I \Rightarrow a \leq x \Rightarrow a^2 \leq x^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{a^2}$$

$$a^4 \leq x^4 \Rightarrow n a^4 \leq n x^4 \Rightarrow -nx^4 \leq -na^4 \Rightarrow e^{-nx^4} \leq e^{-na^4}$$

$$\Rightarrow \left| \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \frac{e^{-nx^4}}{x^2} \right| = \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \frac{e^{-nx^4}}{x^2} = \frac{3}{5x^2} \left(\frac{3}{5}\right)^n e^{-nx^4} \leq$$

$$\leq \frac{3}{5a^2} \left(\frac{3}{5}\right)^n e^{-na^4} \leq \frac{3}{5a^2} \left(\frac{3}{5}\right)^n$$ poiché $-na^4 \leq 0 \Rightarrow e^{-na^4} \leq 1$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{5a^2} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{3}{5a^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ converge

perché $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ è una serie geometrica convergente

$\Rightarrow$ La serie di funzioni converge uniformemente in $[a, +\infty[$ $\forall$ $a>0$.