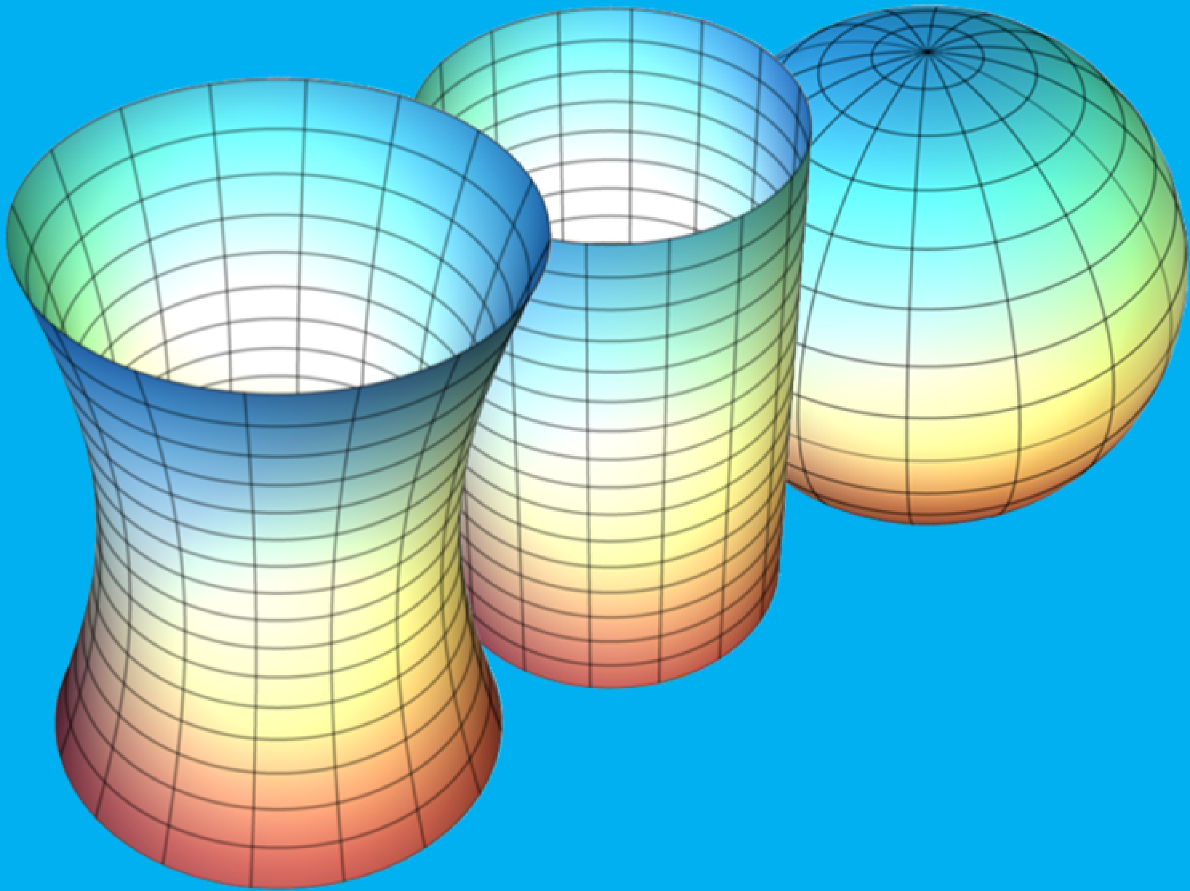
Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni



INTEGRALE DI RIEMANN-STIELTJES

Parte 1

INTEGRALE DI RIEMANN - STIELTJES

Estende il concetto di integrale di Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\substack{\text{INCREMENTO } \Delta x_i \\ \text{DI } x}} \xrightarrow{\text{DIVENTA}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\underbrace{[g(x_i) - g(x_{i-1})]}_{\substack{\text{INCREMENTO} \\ \text{DI UNA FUNZIONE} \\ g \text{ (MONOTONA)}}}$$

Def. $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f limitata, g monotona

$D = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ suddivisione di $[a,b]$

$m_i = \inf_{\Delta_i} f$, $M_i = \sup_{\Delta_i} f$, $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$

SOMMA

SUPERIORE $S = S(D, f, g) = \sum_{i=1}^{n} M_i [g(x_i) - g(x_{i-1})]$

INFERIORE $s = s(D, f, g) = \sum_{i=1}^{n} m_i [g(x_i) - g(x_{i-1})]$

Def: Date $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f limitata, g monotona

f è INTEGRABILE RISPETTO g SECONDO RIEMANN-STIELTJES

$\Leftrightarrow$ l'estremo superiore delle somme inferiori

coincide con l'estremo inferiore delle somme superiori

(al variare delle suddivisioni)

$\Rightarrow$ SI INDICA

$$\int_a^b f \, dg \quad \text{o} \quad \int_a^b f(x) \, dg(x)$$

NB: preliminarmente si dimostra che ogni somma inferiore

è minore o uguale a ogni somma superiore

NB: $dg(x)$ <u>NON</u> È UN DIFFERENZIALE

Ovviamente: $g(x) = x \Rightarrow$ si ha l'integrale di Riemann

Proposizione

Date $f, g : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f limitata, g monotona

f è integrabile secondo R-S su $[a,b]$ rispetto g

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists D_\varepsilon$ suddivisione di $[a,b]$ tale che

$$S(D_\varepsilon, f, g) - s(D_\varepsilon, f, g) < \varepsilon$$

Teorema

Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continua, g monotona

Allora $\exists \int_a^b f \, dg$

Dim: f continua su $[a,b] \Rightarrow f$ uniformemente continua su $[a,b]$

$\Rightarrow$ Preso $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in [a,b]$ con $|x' - x''| < \delta$ si ha

$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Sia D suddivisione di $[a,b]$ tale che $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} < \delta$

$\forall i = 1, \dots, n$. (SUPPONIAMO QUI g CRESCENTE,

se g decrescente la dimostrazione è analoga)

$\underset{\Delta_i}{\max f}$ $\underset{\Delta_i}{\min f}$ (esistono perchè f continua)

$$\Rightarrow S - s = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\left[g(x_i) - g(x_{i-1})\right] <$$

$$< \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \left[g(x_i) - g(x_{i-1})\right] = \varepsilon\left[g(b) - g(a)\right]$$

UNIFORME CONTINUITÀ

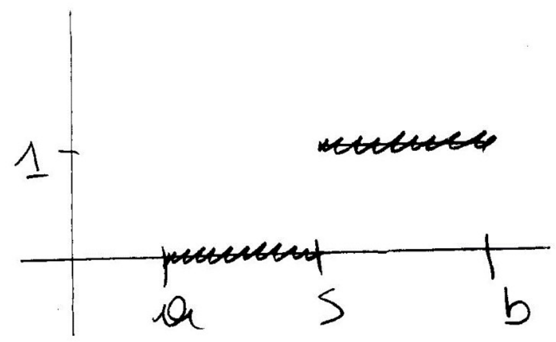
TERMINI CHE SI ELIDONO

Poiche ε è arbitrario (oppure prendendo $\dfrac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}$ all'inizio invece di ε) si ottiene l'integrabilità.

$\square$

Def.: Dato $s \in]a,b[\subseteq \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq s \\ 1 & \text{se } x > s \end{cases}$$ è una FUNZIONE A SCALINO



Teorema

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f limitata e continua in $s \in]a,b[$.

Sia $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq s \\ 1 & \text{se } x > s \end{cases}$ una funzione a scalino

$$\Rightarrow \exists \int_a^b f\, dg = f(s)$$

Dim: Sia $D_x = \{ a = x_0, \underset{}{\overset{x_1}{\overset{\shortparallel}{s}}}, \overset{x_2}{\overset{\shortparallel}{x}}, x_3 = b \}$ una suddivisione di $[a,b]$

con $x_0 < s < x < x_3$

$$\Rightarrow S(D_x, f, g) = M_1 (g(s) - g(a)) + M_2 (g(x) - g(s)) + M_3 (g(b) - g(x)) =$$

$$= M_1 \cdot 0 + M_2 (1 - 0) + M_3 \cdot 0 =$$

$$= M_2 = M(x) \Leftarrow \text{dipende da } x$$

con $M(x) = \sup\limits_{z \in [s,x]} f(z)$. Analogamente

$$s(D_x, f, g) = m(x) \quad \text{con} \quad m(x) = \inf\limits_{z \in [s,x]} f(z)$$

Mostriamo che $\lim_{x \to s} m(x) = \lim_{x \to s} M(x) = f(s)$

$$\lim_{x \to s} m(x) = \lim_{x \to s} \inf_{z \in [s,x]} f(z) = f(s) \iff$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - s| < \delta$ si ha $|m(x) - f(s)| < \varepsilon$

Sia $\varepsilon > 0$. f continua in $s \Rightarrow \exists \delta > 0 : |z - s| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(s)| < \varepsilon$

Preso quindi $x: 0 < |x-s| < \delta$.

$\forall z \in [s,x], \quad |z-s| \leq |x-s| < \delta$

$\Rightarrow |f(z)-f(s)| < \varepsilon \Rightarrow f(s)-\varepsilon < f(z) < f(s)+\varepsilon$

$$\Rightarrow f(s)-\varepsilon \leq m(x) = \inf_{z\in[s,x]} f(z) \leq M(x) = \sup_{z\in[s,x]} f(z) \leq f(s)+\varepsilon$$

$\Rightarrow |m(x)-f(s)| \leq \varepsilon$ e $|M(x)-f(s)| \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \lim_{x\to s} m(x) = \lim_{x\to s} M(x) = f(s)$$

Ne segue

$$\lim_{x\to s} S(D_x, f, g) = \lim_{x\to s} M(x) = f(s)$$

$$\lim_{x\to s} s(D_x, f, g) = \lim_{x\to s} m(x) = f(s)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to s}\left[S(D_x, f, g) - s(D_x, f, g)\right] =$$

$$= f(s) - f(s) = 0$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists$ una suddivisione D di $[a,b]$ tale che

$$S(D, f, g) - s(D, f, g) < \varepsilon \Rightarrow \exists \int_a^b f\,dg$$

Inoltre, prendendo inf e sup sulle suddivisioni di $[a,b]$

$$s(D_x,f,g) \le \sup_D s(D,f,g) = \int_a^b f\,dg = \inf_D S(D,f,g) \le S(D_x,f,g) \quad \forall x$$

POICHÉ L'INTEGRALE ESISTE

$$\begin{array}{ccccc} s(D_x,f,g) & & & & S(D_x,f,g) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle x \to s} & & & & \Big\downarrow {\scriptstyle x \to s} \\ f(s) & \le & \displaystyle\int_a^b f\,dg & \le & f(s) \end{array}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f\,dg = f(s)$$

Integrale di Riemann-Stieltjes - | Bernhard Riemann - Wikipedia | Geometria non euclidea - Wiki | Thomas Joannes Stieltjes - Wiki | E:\Pagina_Julio\DeFinetti\scritti2\s

https://it.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann

Cerca

Nelle vicinanze
Vetrina
Aiuto
Sportello informazioni

Comunità

Portale Comunità
Bar
Il Wikipediano
Fai una donazione
Contatti

Strumenti

Puntano qui
Modifiche correlate
Carica su Commons
Pagine speciali
Link permanente
Informazioni pagina
Elemento Wikidata
Cita questa voce

In altri progetti

Wikimedia Commons
Wikiquote
Wikisource

Stampa/esporta

Crea un libro
Scarica come PDF
Versione stampabile

Aiutaci a migliorare e creare nuovi contenuti relativi a monumenti, musei, arte e natura italiani!

Bernhard Riemann

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (Breselenz, 17 settembre 1826 – Selasca, 20 luglio 1866) è stato un matematico e fisico tedesco. Contribuì in modo determinante allo sviluppo delle scienze matematiche.

Georg Friedrich Bernhard Riemann

Indice [nascondi]

1 Biografia
2 Scoperte matematiche
2.1 Ipotesi di Riemann
3 Note
4 Bibliografia
5 Voci correlate
6 Altri progetti
7 Collegamenti esterni

Biografia [modifica | modifica wikitesto]

Nacque nella famiglia di un pastore protestante. Crebbe in condizioni di indigenza che ostacolarono i suoi studi giovanili, ridotti, fino all'età di 14 anni, alle sole nozioni insegnategli dal genitore. Bernhard era un bambino calmo, estremamente introverso, con un timore quasi ossessivo di parlare in pubblico[1]. Amava risolvere i puzzle.

Trasferitosi a Luneburgo (*Lüneburg*) per studiare diventò amico del suo istruttore, Schmalfuss. Questi, resosi conto della predisposizione del giovane Riemann per la matematica lo indirizzò verso questa disciplina. Sul conto di Riemann si dice addirittura fosse solito non consegnare i compiti della cui correttezza totale non era certo, per evitare l'onta di un voto inferiore al massimo[2]. Riemann ebbe dunque libero accesso alla biblioteca riservata di Schmalfuss, poté esplorare la matematica più complessa leggendo i libri di Carl Friedrich Gauss e di Adrien-Marie Legendre, tra i quali la *Théorie des nombres*, primo libro a esporre un possibile collegamento tra i numeri primi e la funzione logaritmica.

selas | Evidenzia | Maiuscole/minuscole | Segni diacritici | Parole intere | Corrispondenza 1 di 1

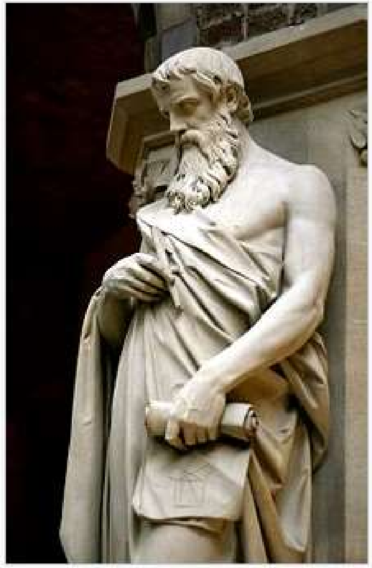
Scrivi qui per eseguire la ricerca

ITA 19:48 21/04/2020

retti, concluse che in tal caso sarebbe dovuta cambiare anche la somma degli angoli interni di un quadrato, che nel caso euclideo è di quattro angoli retti. Tali osservazioni sono contenute nelle opere di etica e riguardano la coerenza dello sviluppo di un sistema logico riferito all'ipotesi di base (vedi Imre Toth che ne scoprì l'esistenza a partire dal 1967 in diversi passi del "Corpus Aristotelicum")[4].

Storia delle geometrie non euclidee [modifica | modifica wikitesto]

I postulati di Euclide [modifica | modifica wikitesto]



Euclide

Euclide, negli Elementi, utilizzò postulati dai quali si può constatare il perché il quinto per più di duemila anni sia stato argomento dibattuto:
I postulati sono:

1. tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una e una sola retta;
2. si può prolungare un segmento oltre i due punti indefinitamente;
3. dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio;
4. tutti gli angoli retti sono congruenti fra loro;
5. se una retta che taglia due rette determina dallo stesso lato angoli interni minori di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti.

Si nota subito una differenza tra i primi quattro, che sembrano immediatamente evidenti, e il quinto, che non solo non sembra immediatamente vero, ma ha anche una formulazione molto più complicata degli altri. Lo stesso matematico sembra essere a disagio, tanto che dimostra le prime 28 proposizioni del I libro degli *Elementi* senza farne uso.

Essendo meno generica tuttavia è senz'altro più familiare la forma moderna del postulato:

> Per un punto esterno ad una retta data passa una e una sola parallela alla retta data.

Tentativi di dimostrazione del quinto postulato [modifica | modifica wikitesto]

Nei secoli, i tentativi di dimostrare il postulato sono numerosi: Proclo nel suo *Commento al Primo Libro degli Elementi di Euclide* ci riferisce delle "dimostrazioni" di Posidonio e Tolomeo, proponendone poi una sua. Altri tentativi furono compiuti dai matematici arabi, tra cui Nasir al-Din al-Tusi che mette in relazione il quinto postulato con la somma degli assumeva come giudizio sintetico *a priori* la geometria euclidea.

Bernhard Riemann [modifica | modifica wikitesto]

Bernhard Riemann

Anche se aveva tenuto per sé i risultati più "rivoluzionari", il saggio *Disquisitiones generales circa superficies curvas* pubblicato da Gauss nel 1828 segnò una svolta nell'indagine delle geometrie alternative. L'attenzione viene rivolta alle proprietà intrinseche delle superfici, a prescindere dallo spazio in cui sono immerse: questo metodo d'indagine viene esteso da Bernhard Riemann nel suo scritto del 1854 *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen* ("Sulle ipotesi su cui si fonda la geometria") che venne pubblicato postumo nel 1867.

Riemann getta le basi di una geometria totalmente nuova, detta geometria riemanniana, in cui il problema delle parallele non si pone nemmeno, sostituendo il concetto di retta con quello metrico di curva geodetica, ossia il percorso di minor distanza tra due punti. Si possono così costruire geometrie a curvatura costante, oppure che varia in ogni punto, in qualunque numero di dimensioni, ognuna corrispondente a una superficie, detta varietà riemanniana n-dimensionale. In quest'ottica, la geometria euclidea è la geometria naturale del piano.

Riemann contribuì allo studio della geometria, oltre che generalizzando il concetto di metrica euclidea, anche sviluppando un nuovo tipo di geometria partendo dalla negazione del V postulato di Euclide, sostituendolo con quello che oggi viene indicato come *assioma di Riemann*:

> Due rette qualsiasi di un piano hanno sempre almeno un punto in comune.

Da questo assioma segue subito che non esistono rette parallele e che cadono tutti i teoremi dimostrati facendo uso del V postulato di Euclide. Tuttavia, in geometria piana, si dimostra, senza fare uso dell'assioma delle parallele, che *per un punto passa almeno una parallela a una retta data* (Proposizione 31 degli elementi di Euclide). Invece dall'assioma di Riemann segue che non esistono rette parallele. Questo dimostra che se si nega il V postulato di Euclide, allora, potrebbe essere necessario modificare anche altri assiomi del corpo teorico per rendere la teoria coerente.

La proposizione 31, nell'opera di Euclide, è dimostrata facendo uso delle proposizioni 23[6] e 27[7] e quest'ultima dimostrata tramite la proposizione 16[8]. Quindi affinché l'assioma di Riemann produca una teoria assiomatica coerente, è necessario assicurarsi che non possa essere dimostrata più la proposizione 31. Per quanto detto occorre modificare i postulati di Euclide, o equivalentemente gli assiomi di Hilbert, al fine di rendere indimostrabile la proposizione 16. Ciò conduce a una modifica dell'assioma di incidenza e/o dell'assioma di ordinamento, generando due diverse geometrie localmente equivalenti: la geometria sferica e la geometria ellittica. Tale nomenclatura è attribuita a Klein.

Thomas Joannes Stieltjes

Da Wikipedia, l'enciclopedia libera.

Thomas Joannes Stieltjes

Thomas Joannes Stieltjes, pronuncia: ['sti:ltʃəs] (Zwolle, 29 dicembre 1856 – Tolosa, 31 dicembre 1894), è stato un matematico olandese, noto per i suoi studi sulle frazioni continue e per avere contribuito alla definizione dell'Integrale di Riemann-Stieltjes.

Biografia [modifica | modifica wikitesto]

Il padre di Stieltjes (che aveva lo stesso nome) era un ingegnere civile e un politico, responsabile della costruzione di vari porti a Rotterdam, oltre che membro del parlamento olandese. Stieltjes jr. si iscrisse al Politecnico di Delft in 1873. Invece che seguire le lezioni, però, preferì leggere i lavori di Carl Friederich Gauss e Carl Gustav Jakob Jacobi; come conseguenza non riuscì a passare gli esami. Dopo altri due tentativi falliti nel 1875 e 1876, suo padre, che aveva perso ogni speranza di vedere il figlio riuscire negli studi, riuscì a trovargli un posto come assistente all'osservatorio astronomico dell'Università di Leida, grazie al suo amico H. G. van de Sande Bakhuyzen che era il rettore dell'Università.

Subito dopo la sua assunzione, Stieltjes iniziò una corrispondenza con Charles Hermite, che durò tutto il resto della sua vita. All'inizio Stieltjes scrisse a Hermite a proposito della meccanica celeste, ma i temi divennero ben presto matematici, e Stieltjes iniziò a dedicare il suo tempo libero alla ricerca matematica, con l'approvazione di van de Sande-Bakhuyzen che accolse la sua richiesta fatta il primo gennaio 1883 di lasciare il suo lavoro di osservazione per avere più tempo da dedicare ai temi matematici. Nel maggio dello stesso anno si sposò con Elizabeth Intveld, la quale pure lo consigliò di spostarsi dall'astronomia alla matematica; a settembre gli fu chiesto di sostituire F. J. van den Berg all'università di Delft, dove insegnò geometria analitica e geometria descrittiva fino a dicembre, quando si dimise dall'osservatorio.

Nel 1884, Stieltjes fece domanda per una cattedra a Groningen che però non gli fu data, presumibilmente perché non era laureato. Hermite cercò di fargli ottenere una laurea ad honorem dall'Università di Leida, ma sembra ci fu un'incomprensione tra lui e la facoltà. L'anno successivo si trasferì in Francia, dove nel 1886 ottenne un dottorato con una tesi sulle serie asintotiche, e ottenne una cattedra all'Università di Tolosa.

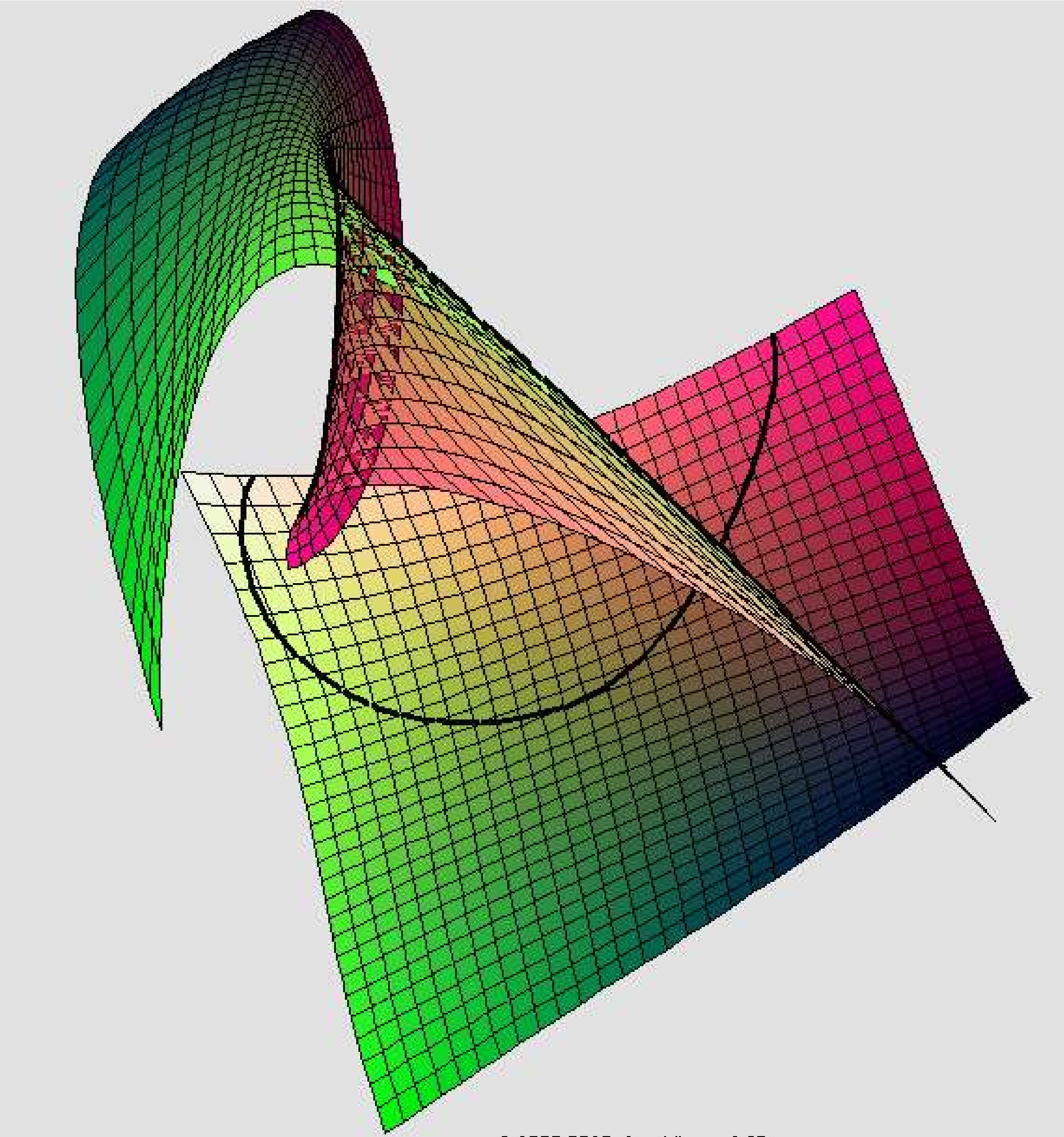
Stieltjes si occupò di una gran varietà di campi dell'analisi, delle frazioni continue e della teoria dei numeri: è spesso chiamato "il padre della teoria analitica delle funzioni continue"

Università degli Studi di Trieste

Matematica per l'Economia e la Statistica
corso Progredito

Anno accademico - 2020/2021

Docente: Renato Pelessoni



INTEGRALE
DI
RIEMANN-STIELTJES

Parte 2

Teorema

Siano $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f monotona, g monotona e continua
$\Rightarrow \exists \int_a^b f \, dg$

Dim: Nella dimostrazione supponiamo g crescente. Se g è decrescente la dimostrazione è analoga. Così pure supponiamo f crescente.

g continua su $[a,b]$ connesso $\Rightarrow g([a,b])$ è connesso (cioè un intervallo)

g crescente $\Rightarrow \forall x \in [a,b] \quad g(a) \leq g(x) \leq g(b)$

$\Rightarrow$ tutti i valori tra $g(a)$ e $g(b)$ sono raggiunti

$(\forall z \in [g(a), g(b)] \ \exists \ x \in [a,b] : g(x) = z)$

$\Rightarrow$ Posso considerare, $\forall n \in \mathbb{N}, n > 0$, una suddivisione di $[a, b]$

$D_n = \{ x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \}$ tale che

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) = \frac{g(b) - g(a)}{n}$$

cioè $\quad x_0 = a$

$$x_1 : \; g(x_1) = g(a) + \frac{g(b) - g(a)}{n} \in [g(a), g(b)]$$

$$x_2 : \; g(x_2) = g(a) + 2 \frac{g(b) - g(a)}{n} \in [g(a), g(b)]$$

- - - - - - - - - - - - - - - -

$$x_n = b : \; g(b) = g(a) + n \frac{g(b) - g(a)}{n} = g(b)$$

f crescente $\Rightarrow M_i = \sup_{\Delta_i} f(x) = f(x_i)$

$$m_i = \inf_{\Delta_i} f(x) = f(x_{i-1})$$

$$\Rightarrow S - s = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \left(\frac{g(b) - g(a)}{n} \right) =$$

$$= \frac{[f(b) - f(a)][g(b) - g(a)]}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n}$ la suddivisione D_n è tale che

$$S(D_n, f, g) - s(D_n, f, g) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \exists \int_a^b f \, dg$$

NB: Senza le ipotesi di continuità di f o g i precedenti teoremi potrebbero non valere. Ad esempio

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [1,2[\\ 1 & \text{se } x \in [2,4] \end{cases}$$

Per qualunque suddivisione D di $[2,4]$ si ha

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) \neq 0 \iff 2 \in [x_{i-1}, x_i]$$

In questo caso si ha $s = -2$, $S = 2$

$$\Rightarrow \nexists \int_1^4 f \, df$$

Proprietà

Siano f, f_1, f_2 integrabili rispetto g, g_1, g_2 monotone crescenti

a) $\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2)\, dg = c_1 \int_a^b f_1\, dg + c_2 \int_a^b f_2\, dg \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) $\int_a^b f\, d(c_1 g_1 + c_2 g_2) = c_1 \int_a^b f\, dg_1 + c_2 \int_a^b f\, dg_2 \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

c) $\int_a^b f\, dg = \int_a^c f\, dg + \int_c^b f\, dg \quad \forall c \in]a, b[$

d) $f_1 \leq f_2 \Rightarrow \int_a^b f_1\, dg \leq \int_a^b f_2\, dg$

e) $\left| \int_a^b f\, dg \right| \leq \int_a^b |f|\, dg$

a) LINEARITÀ RISPETTO ALLA FUNZIONE INTEGRANDA

b) LINEARITÀ RISPETTO ALLA FUNZIONE INTEGRATRICE

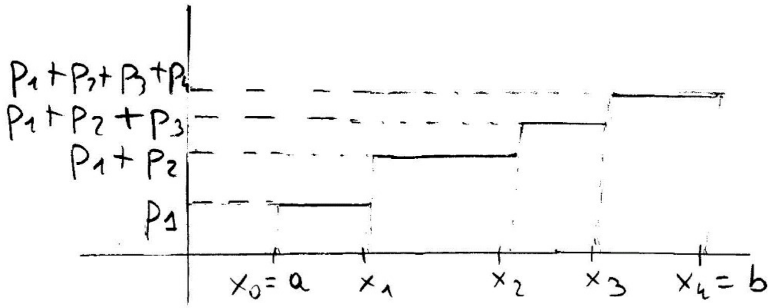
c) ADDITIVITÀ RISPETTO ALL' INTERVALLO DI INTEGRAZIONE

d) MONOTONIA

Cosa succede se g è una funzione a scala?

Sia f continua

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x = x_0 \\ p_1 & x \in]x_0, x_1] \\ p_1 + p_2 & x \in]x_1, x_2] \\ \dots & \dots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n & x \in]x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$



cioè

$$g(x) = \sum_{j=1}^{i} p_j \quad x \in]x_{i-1}, x_i] \quad i = 1, \dots, n$$

$$(g(x_0) = 0)$$

NON SOMMO NESSUN TERMINE

Posto $I_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq x_{i-1} \\ 1 & \text{se } x_{i-1} < x \end{cases}$ $(i = 1, \dots, n)$

si ha $g(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j I_j(x)$

Infatti, se $x \in]x_{\bar{i}-1}, x_{\bar{i}}]$ si ha $I_j(x) = 1 \quad \forall j = 1, \dots, \bar{i}$

$I_j(x) = 0 \quad \forall j = \bar{i}+1, \dots, n$

$$\Rightarrow \quad g(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j \, I_j(x) = \sum_{j=1}^{\bar{i}} p_j \, I_j(x) = \sum_{j=1}^{\bar{i}} p_j \quad \text{se } x \in \,]x_{\bar{i}-1}, x_{\bar{i}}]$$

$$g(x_0) = 0 \quad \text{perché } x_0 \leq x_{i-1} \ \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow I_i(x) = 0 \ \forall i = 1, \dots, n$$

Si ha quindi

$$\int_a^b f \, dg = \int_a^b f \, d\sum_{j=1}^{n} p_j I_j = \sum_{j=1}^{n} p_j \int_a^b f \, dI_j = \sum_{j=1}^{n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SALTI}}}{p_j} \, f(\overset{\substack{\text{PUNTI DI DISCONTINUITÀ DI } g \\ \uparrow}}{x_j})$$

Teorema

Sia f continua su $[a,b]$, g di classe $\mathcal{C}^1$ e monotona su $[a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f\,dg = \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

QUESTO TEOREMA RICONDUCE IL CALCOLO

DELL'INTEGRALE DI R-S. A QUELLO DI RIEMANN

(se le ipotesi sono soddisfatte)