MECCANICA RAZIONALE

Ing Civile & Ambientale
Navale

13 aprile 2021

Trasformazione di inerzia

$$I_O(\underline{y}) = \sum_{P \in \mathcal{B}}' m_P (\underline{x}_P - \underline{x}_O) \wedge [\underline{y} \wedge (\underline{x}_P - \underline{x}_O)]$$

$$\hookrightarrow \quad I_O = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}$$

riferimento $(O, \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$

$$I_{jj} = \underline{u}_j \cdot I_O \cdot \underline{u}_j \rightarrow$$ momenti di inerzia rispetto a $\underline{u}_j$

$$I_{jk} = \underline{u}_j \cdot I_O \cdot \underline{u}_k \rightarrow$$ momenti di deviazione

In 2D : $I_0 = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11}+I_{22} \end{pmatrix}$

- cercare $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$ in cui I_0 è più semplice

$\hookrightarrow I_0 = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$

Assi principali di inerzia

→ assi di simmetria ellissoide di inerzia

→ autovettori di I_0

$$I_0 \cdot \underline{u} = \lambda \underline{u}$$

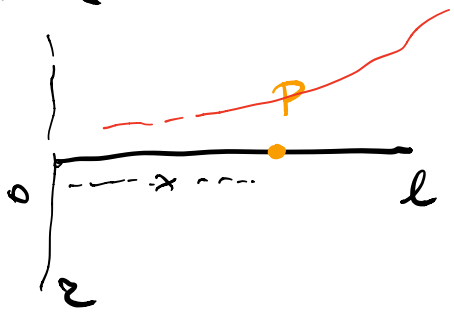
3 autovalori reali

autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali

→ momenti deviatori si annullano

- Calcolare direttamente I_0 partendo dalla definizione

Asta



$$I_z = \int_0^l dx\, \rho(x)\, x^2$$

$$\left(I_z = \sum_p m_p \underbrace{\| \underline{u} \wedge (\underline{x}_p - \underline{x}_0) \|}_{\text{distanza di } P \text{ da } z}^2 \right)$$

$\rho(x) =$ costante

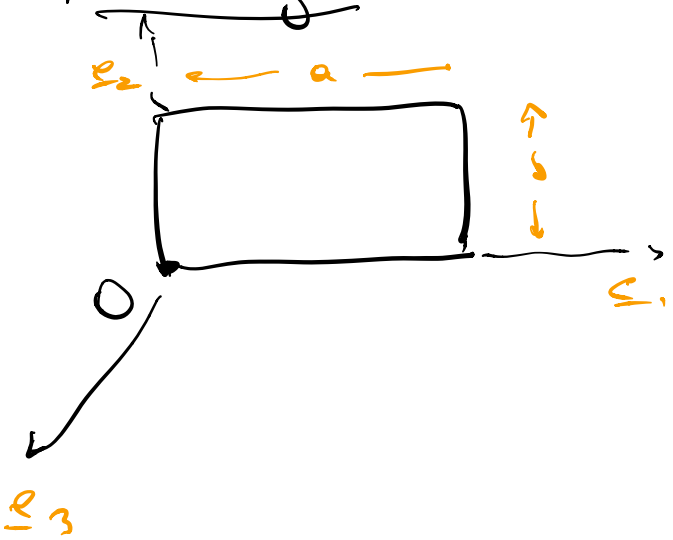
$$I_z = \rho \frac{l^3}{3} = \boxed{M \frac{l^2}{3}} \qquad M = \rho l$$

$\rho(x)$ non costante $\left(\rho(x) \sim \alpha x^2 \right)$

$$I_z = \int_0^l dx\, \alpha x^2 x = \alpha \int_0^l x^3 dx$$

$$= \alpha \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^l = \boxed{\alpha \frac{l^4}{4}}$$

Rettangolo



$$I_{11} = \int_0^a \int_0^b dx\, dy\, \rho(x,y)\, y^2$$

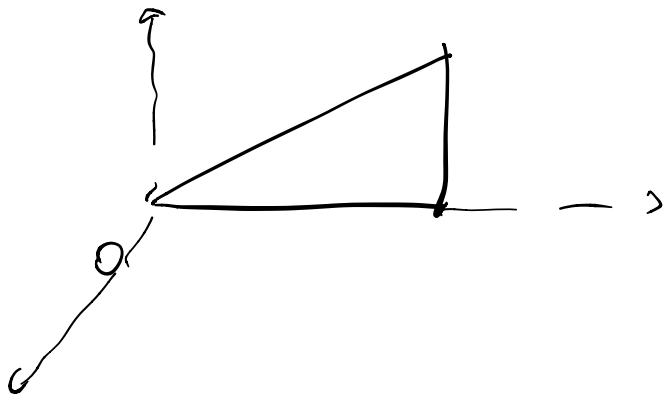
$$I_{22} = \int_0^a \int_0^b dx\, dy\, \rho(x,y)\, x^2$$

$$I_{12} = -\int_0^a \int_0^b \rho(x,y)\, x\, y\, dx\, dy$$

ρ costante $\quad I_{11} = M\frac{b^2}{3}, \quad I_{22} = M\frac{a^2}{3}$

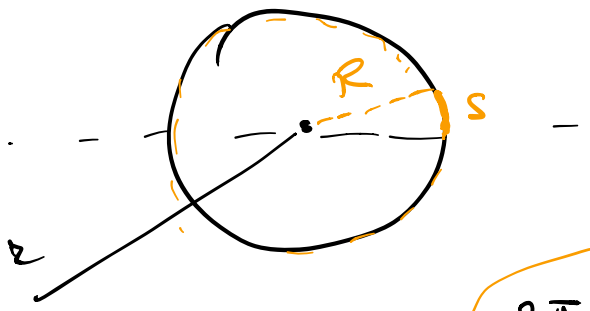
$$I_{12} = -M\frac{ab}{4}$$

Triangolo



$$I_{11} = \int_0^b \int_0^{\frac{h}{b}x} dx\,dy\; \rho(x,y)\, y^2$$

Circonferenza



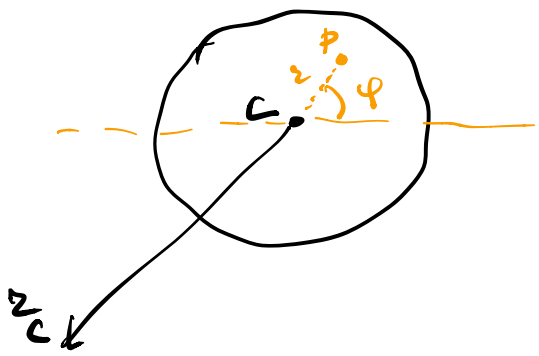
rispetto alla retta z passante per il centro e ortogonale al piano della circonferenza

$$I_z = \int_0^{2\pi R} \rho(s)\, R^2\, ds = M R^2$$

$$M = \int_0^{2\pi R} \rho(s)\, ds$$

anche se non omogenea

Cerchio



rispetto alla retta z passante per il centro e perpendicolare al piano del cerchio

$$I_{z_C} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho(r,\varphi)\, r^2 \; r\, dr\, d\varphi$$

Casi notevoli

- densità $\rho = \rho(r)$

$$I_{z_C} = 2\pi \int_0^R \rho(r)\, r^3\, dr$$

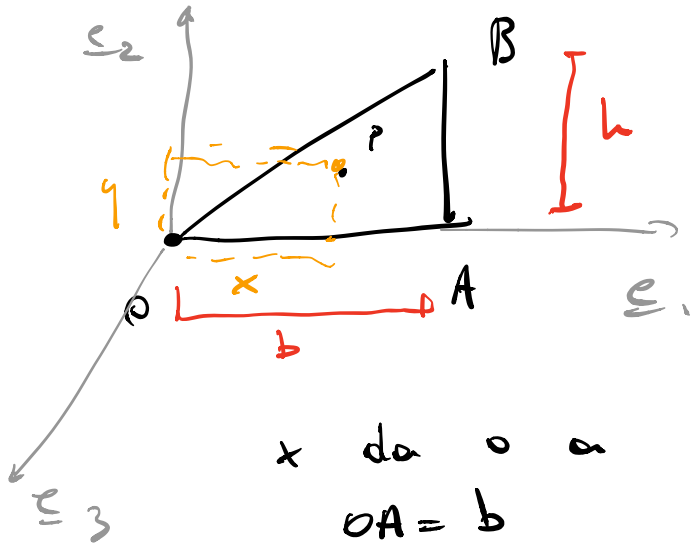
- densità costante

massa dist²

$$I_{z_C} = 2\pi \rho \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^R = 2\pi \rho \frac{R^4}{4} = M \frac{R^2}{2}$$

$$M = \rho \pi R^2$$

→ simile per diverse figure geometriche



$$I_O = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11}+I_{22} \end{pmatrix}$$

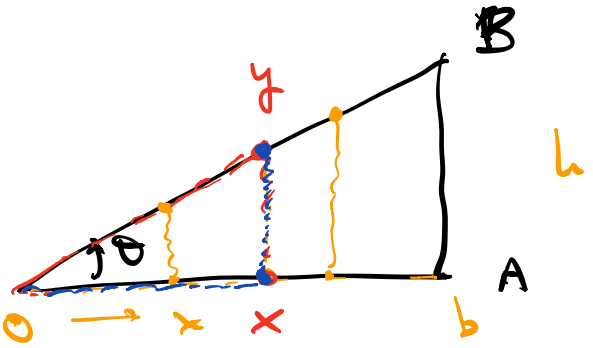
x da O a

OA = b

$$I_{11} = \iint_{\Delta} dx\, dy\, \rho(x,y)\, y^2$$

distanza di P da $\underline{e}_1$ al quadrato

$$= \int_0^b dx \int_0^{x\frac{h}{b}} dy\, \rho(x,y)\, y^2$$



$b = OB \cos\theta$

$h = OB \sin\theta$

$$\frac{b}{h} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$x = h\cos\theta$

$y = h\sin\theta$ $\rightarrow$ $y = x\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = x\dfrac{h}{b}$

$$I_{11} = \int_0^b dx \int_0^{\frac{h}{b}x} dy\, \rho(x,y)\, y^2$$

ρ = costante

$$= \rho \int_0^b dx \int_0^{\frac{h}{b}x} dy\, y^2 = \rho \int_0^b dx \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^{\frac{h}{b}x}$$

$$= \frac{\rho}{3} \int_0^b dx \left(\frac{h}{b} x \right)^3 = \frac{\rho}{3} \left(\frac{h}{b} \right)^3 \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^b$$

$$= \frac{\rho}{3} \left(\frac{h}{b} \right)^3 \frac{b^4}{4} = \frac{\rho}{12} h^3 b$$

$$M = \rho \frac{hb}{2} \qquad \hookrightarrow = M \frac{h^2}{6}$$

Seconda parte

<u>Variazione di I_O con il polo O</u>

$$I_O(\underline{u}) = \sum_{B \in R}' m_B \, (\underline{x}_B - \underline{x}_O) \wedge \left[\underline{u} \wedge (\underline{x}_B - \underline{x}_O) \right]$$

O è un punto di R. Prendiamo un altro punto O'

$$\forall\, B \in R \quad , \quad (\underline{x}_B - \underline{x}_O) = (\underline{x}_B - \underline{x}_{O'}) + (\underline{x}_{O'} - \underline{x}_O)$$

$$I_O(\underline{u}) = \sum_{B \in R} m_B \left[(\underline{x}_B - \underline{x}_{O'}) + (\underline{x}_{O'} - \underline{x}_O) \right] \wedge$$

$$\wedge \left[\underline{u} \wedge \left((\underline{x}_B - \underline{x}_{O'}) + (\underline{x}_{O'} - \underline{x}_O) \right) \right]$$

$$= \overbrace{\sum_{B \in R}' m_B (\underline{x}_B - \underline{x}_{O'}) \wedge \left[\underline{u} \wedge (\underline{x}_B - \underline{x}_{O'}) \right]}^{I_{O'}(\underline{u})}$$

$$+ \left(\sum_{B \in R}' m_B \right) (\underline{x}_{O'} - \underline{x}_O) \wedge \left[\underline{u} \wedge (\underline{x}_{O'} - \underline{x}_O) \right]$$

$$+ \sum_{B \in R}' m_B (\underline{x}_{O'} - \underline{x}_O) \wedge \left[\underline{u} \wedge (\underline{x}_B - \underline{x}_{O'}) \right]$$

$$+ \sum_{B \in R}' m_B (\underline{x}_B - \underline{x}_{O'}) \wedge \left[\underline{u} \wedge (\underline{x}_{O'} - \underline{x}_O) \right]$$

Prendiamo $O' = G$ centro di massa di R. Abbiamo la semplificazione:

$$\sum_{B \in R}' m_B (\underline{x}_B - \underbrace{\underline{x}_G}_{O' = G}) = \sum_{B \in R}' m_B \underline{x}_B - \sum_{B \in R}' m_B \underline{x}_G$$

[ricordiamo $\sum_{B \in R}' m_B = M$

$$\underline{x}_G = \frac{1}{M} \sum_{B \in R}' m_B \, \underline{x}_B$$]

$$= M \underline{x}_G - M \underline{x}_G = \underline{0}$$

Formula di trasporto

$$I_O(\underline{u}) = I_G(\underline{u}) + M(\underline{x}_G - \underline{x}_O) \wedge [\underline{u} \wedge (\underline{x}_G - \underline{x}_O)]$$

matrice di inerzia polo O

matrice di inerzia col polo G

dipende da M e da $\underline{x}_G - \underline{x}_O$

Teorema di Huygens-Steiner

Siano r_O e r_G due rette parallele passanti per O e per G. Allora

$$I_{r_O} = I_{r_G} + M \, \| \underline{u} \wedge (\underline{x}_G - \underline{x}_O) \|^2$$

$$= I_{r_G} + M \, (\text{distanza tra } r_O \text{ e } r_G)^2$$

Dim: Segue da $I_{r_O} = \underline{u} \cdot I_O(\underline{u})$

e $I_{z_G} = \underline{u} \cdot I_G(\underline{u})$

$$\underbrace{\underline{u} \cdot I_O(\underline{u})}_{I_{z_O}} = \underbrace{\underline{u} \cdot I_G(\underline{u})}_{I_{z_G}} + M\, \underline{u} \cdot (\underline{x}_G - \underline{x}_O) \wedge$$

$$\wedge \left[\underline{u} \wedge (\underline{x}_G - \underline{x}_O) \right]$$

$$\underline{u} \cdot (\underline{x}_G - \underline{x}_O) \wedge \left[\underline{u} \wedge (\underline{x}_G - \underline{x}_O) \right]$$

$$\underline{a} \cdot \underbrace{\underline{b} \wedge \left[\underline{a} \wedge \underline{b} \right]}$$ simmetria

Formula per

$$\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = \underline{b}\,(\underline{c} \cdot \underline{a}) - \underline{c}\,(\underline{a} \cdot \underline{b})$$

Allora

$$\underline{a} \cdot \left(\underline{b} \wedge (\underline{a} \wedge \underline{b}) \right) =$$

$$= \underline{a} \cdot \left[\underline{a}\,(\underline{b} \cdot \underline{b}) - \underline{b}\,(\underline{a} \cdot \underline{b}) \right]$$

$$= \underline{(\underline{a} \cdot \underline{a})(\underline{b} \cdot \underline{b}) - (\underline{a} \cdot \underline{b})(\underline{a} \cdot \underline{b})}$$

Usiamo altra identità vettoriale

Formula generale. Dalle due identità

1) $\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\cdot\underline{b})$

2) $\underline{a}\cdot(\underline{b}\wedge\underline{c}) = \underline{b}\cdot(\underline{c}\wedge\underline{a}) = \underline{c}\cdot(\underline{a}\wedge\underline{b})$

segue che

$$\underbrace{(\underline{a}\wedge\underline{b})\cdot(\underline{c}\wedge\underline{d})}_{} \overset{2)}{=} \underline{c}\cdot(\underline{d}\wedge(\underline{a}\wedge\underline{b}))$$

$$\underset{1)}{=} \underline{c}\cdot(\underline{a}(\underline{d}\cdot\underline{b}) - \underline{b}(\underline{d}\cdot\underline{a}))$$

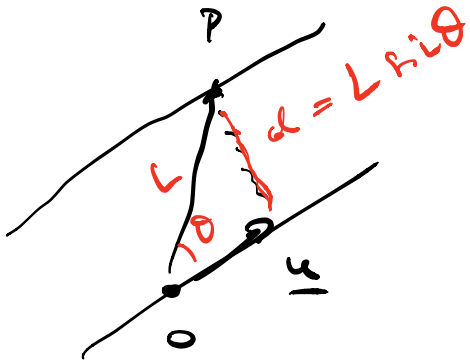
$$= \underline{(\underline{c}\cdot\underline{a})(\underline{d}\cdot\underline{b}) - (\underline{c}\cdot\underline{b})(\underline{d}\cdot\underline{a})}$$

$$(\underline{a}\cdot\underline{a})(\underline{b}\cdot\underline{b}) - (\underline{a}\cdot\underline{b})^2$$

$$= (\underline{a}\wedge\underline{b})\cdot(\underline{a}\wedge\underline{b})$$

$$= \|\underline{u}\wedge(\underline{x}_G - \underline{x}_0)\|^2$$

$$I_{z_0} = I_{z_G} + M\,\|\underline{u}\wedge(\underline{x}_G - \underline{x}_0)\|^2$$



distanza fra z_O e z_G

c.v.d.

$$I_{z_O} = I_{z_G} + M \, \| \underline{u} \wedge (\underline{x}_G - \underline{x}_O) \|^2$$

O

G centro di massa

distanza²

Risultato analogo per i momenti deviatori

π_O, π_G 2 piani ortogonali a $\underline{u}$

π'_O, π'_G 2 piani ortogonali a $\underline{v}$

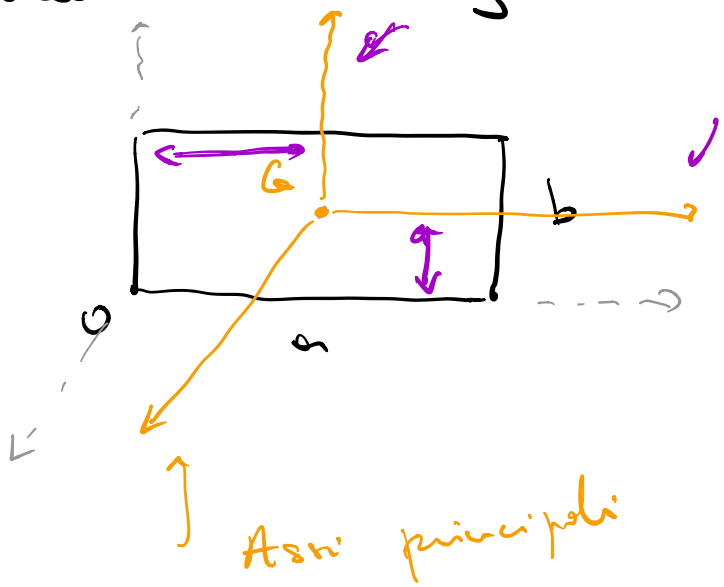
} passanti per O e G

Tali che $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$

$$I_{\pi_O \pi'_O} = I_{\pi_G \pi'_G} + M \left[\underline{u} \cdot (\underline{x}_G - \underline{x}_O) \right] \left[\underline{v} \cdot (\underline{x}_G - \underline{x}_O) \right]$$

Applicazione

lamina rettangolare, rispetto a G



$$I_{O,u} = \frac{M b^2}{3}$$

$$I_{O,e_2} = \frac{M a^2}{3}$$

$$I_{G,u}, \quad I_{G,e_2}$$

Per <u>H-S</u> : $I_{G,u} = I_{O,u} - M \, \text{distanza}^2$

$$I_{G,u} = M \frac{b^2}{3} - M \left(\frac{b}{2}\right)^2 = M \frac{b^2}{12}$$

$$I_{G,2} = M \frac{a^2}{3} - M \left(\frac{a}{2}\right)^2 = M \frac{a^2}{12}$$

$$I_{G,3} = I_{G,u} + I_{G,2} = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$$

<u>Proposizione</u> : dato il fascio di rette parallele di versore $\underline{u}$, il momento di inerzia minimo, è quello rispetto alla

retto del fascio passante per G.

$$I_{z_O} \geq I_{z_G}$$

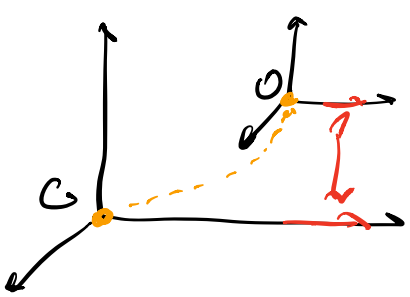
Consideriamo l'ellissoide in O (e ricordiamo che la distanza tra O e i punti dell'ellissoide è $\sim \frac{1}{\sqrt{I}}$)

$\longrightarrow$ E.I.(O) è contenuto nell' E.I.(G)

Terza parte

Proprietà degli assi principali di inerzia relativi al centro di massa

A.P.I.(G) $\rightarrow$ assi principali centrali

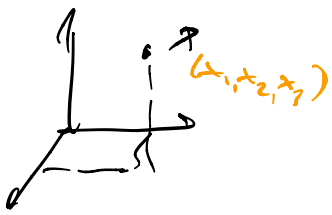


Consideriamo una terna principale per G e O punto (x_1, x_2, x_3)

Con le formule di trasporto possiamo determinare la matrice di inerzia in O (in una terna con assi paralleli agli assi centrali)

Se $\underline{\underline{I_G}} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{I_O}} = \begin{pmatrix} J_1 + M(x_2^2 + x_3^2) & -Mx_1x_2 & -Mx_1x_3 \\ -Mx_1x_2 & J_2 + M(x_1^2 + x_3^2) & -Mx_2x_3 \\ -Mx_1x_3 & -Mx_2x_3 & J_3 + M(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}$$



$I_{11} = \sum_p M_p (x_2^2 + x_3^2)$

$$\begin{pmatrix} J_1 + M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Quindi:

1. Se $O \in$ Asse principale centrale

$\Rightarrow$ la terna principale per O è parallela a quella centrale

(due coordinate x_i e x_j sono nulle → la matrice è ancora diagonale)

2. Se $O \in$ piano principale centrale

→ l'asse per O ortogonale a questo piano è principale

(O ha una sola coordinata nulla e quindi solo i due momenti deviatori che la contengono si annullano)

3. Caso generale: Tutte x_1, x_2 e x_3 sono non nulle.

Dalla formula di trasporto

$$\boxed{I_O(\underline{u})} = I_G(\underline{u}) + M\,\underbrace{(\underline{x}_G - \underline{x}_O)}_{a} \wedge \left[\underbrace{\underline{u}}_{b} \wedge \underbrace{(\underline{x}_G - \underline{x}_O)}_{c}\right]$$

$\lambda_O \underline{u}$

riscrivendo con l'identità:

$$\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})\,\underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b})\,\underline{c}$$

$I_O(\underline{u}) = \lambda_O\, \underline{u}$

$$= \underbrace{I_G(\underline{u})}_{\lambda_G^{\underline{u}}} + M \|\underline{x}_G - \underline{x}_0\|^2 \underline{u} +$$

$$- M \left(\underline{u} \cdot (\underline{x}_G - \underline{x}_0)\right)(\underline{x}_G - \underline{x}_0)$$

Allora: se $\underline{u}$ è autovettore di I_G ($I_G(\underline{u}) = \lambda \underline{u}$), questo implica che $\underline{u}$ è autovettore di I_0 ($I_0(\underline{u}) = \lambda \underline{u}$) solamente se:

$\left(\underline{u} \cdot (\underline{x}_G - \underline{x}_0)\right)(\underline{x}_G - \underline{x}_0)$ è zero

oppure è parallelo a $\underline{u}$

$$\left(\underline{u} \cdot (\underline{x}_G - \underline{x}_0)\right)(\underline{x}_G - \underline{x}_0)$$

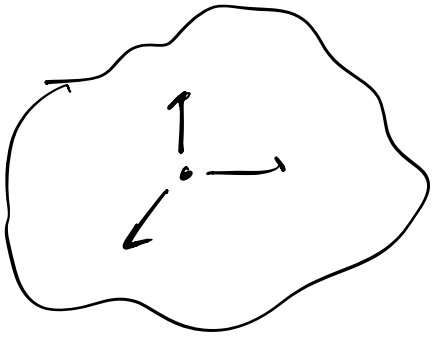
- o $\underline{u} \cdot (\underline{x}_G - \underline{x}_0) = 0$ e quindi

  O $\in$ piano per G e ortogonale a $\underline{u}$

  = piano principale centrale ortogonale a $\underline{u}$

- o $(\underline{x}_G - \underline{x}_0)$ è parallelo a $\underline{u}$

e quindi O è retto per G di direzione $\underline{u}$ = asse principale centrale di direzione $\underline{u}$.



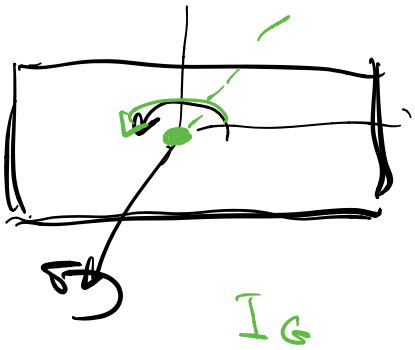
$$I_G(\underline{u}) = \lambda \underline{u}$$

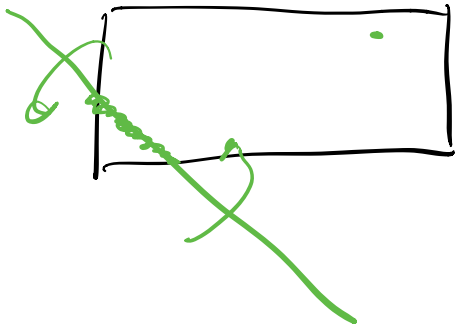
nella base di $\underline{u}$

$$I_G = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

$$I_O(\underline{u}) = \lambda_O \underline{u}$$

$$I_O = \begin{pmatrix} J_{O,1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{O,2} & * \\ 0 & * & J_{O,3} \end{pmatrix}$$





$\longrightarrow$ problema della dinamica

Statica : coordinate libere per il corpo rigido

spostamenti virtuali

$\rightarrow$ Principio dei lavori virtuali

→ Equazioni cardinali della statica

Principio di D'Alembert

problema di dinamica ⟷ problema di statica aggiungendo la "forza di inerzia"

$$-\frac{d}{dt} p_B$$

$$\underline{F}_B = \frac{d}{dt} \underline{p}_B \iff \underline{F}_B - \frac{d}{dt} \underline{p}_B = \underline{0}$$

PLV ⟷ eq. di Lagrange

ECS ⟷ Eq. cardinali della dinamica