SISTEMI DINAMICI

13 Aprile 2021

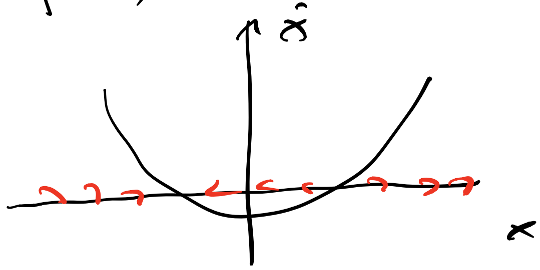
Sistemi dinamici lineari

Flussi $\varphi^t : M \longrightarrow M$

eq. diff $\dot{x} = f(x)$

mappa iterata $x_{n+1} = f(x_n)$

$\rightarrow$ $\dot{x} = f(x)$ su $\mathbb{R}$ (1-dim)



$\dot{x} = f(x; \mu)$ μ parametro

$\hookrightarrow$ biforcazioni

$\rightarrow$ sistemi dinamici discreti

pti fissi ...
biforcazioni ...
caos

→ sistemi in dimensione superiore

↳ lineari
non-lineari

↳ sistemi lineari continui

Equazioni differenziali lineari

Lineari ⇒ spazio delle fasi ha struttura lineare = spazio vettoriale

$\mathbb{R}^n$ (E)

il campo vettoriale determinato da f in $\dot{x} = f(x)$ è una funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e quindi può essere rappresentata da una matrice $A \in Mat(n \times n; \mathbb{R})$

$$f(x) = A \cdot x \qquad \begin{pmatrix} - & - \\ - & \\ - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$$

$x \in \mathbb{R}^n$

Sistemi dinamici lineari sono

$$\dot{x} = A x$$

Idea: problema agli autovalori

Supponiamo $Av = \lambda v$. Prendiamo

$x(t) = c(t)\, v$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \dot{c}(t)\, v = A x = A\, c(t)\, v$$

$$= c(t)\, A v = c(t)\, \lambda v$$

$$\dot{c}(t) = \lambda\, c(t) \rightarrow c(t) = c_0\, e^{\lambda t}$$

abbiamo trovato una sol $x(t) = c_0 e^{\lambda t} v$

Prima cerchiamo soluzioni a $Av = \lambda v$

Se ci sono soluzioni, l'operatore

$(A - \lambda \mathbb{1})$ ha un kernel non banale ($\ker(A - \lambda \mathbb{1}) \neq 0$)

quindi $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0 \equiv p(\lambda)$

"polinomio caratteristico"

· <u>Autovalori reali & distinti</u>

<u>Teorema</u> A operatore lineare su $\mathbb{R}^n$

con n autovalori distinti & reali.

Allora $\dot{x} = Ax \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$

$x = x(t)$

ha un'unica soluzione

$$x_i(t) = c_{i1} e^{t\lambda_1} + \dots + c_{in} e^{t\lambda_n}$$

con c_{ij} dipendenti da x_0.

<u>Dim</u> Per ipotesi $\exists$ matrice invertibile Q

tale che $QAQ^{-1} = B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Poniamo $y = Qx$.

Quindi $\dot{y} = Q\dot{x} = QAx = QAQ^{-1}y$

$= By$

$\dot{y} = By \longrightarrow \dot{y}_i(T) = \lambda_i y_i(T)$ che

ha soluzione $y_i(T) = y_i(0)\, e^{T\lambda_i}$

Poniamo $y(0) = Qx_0$

Da $y = Qx$

$$x(T) = Q^{-1}\left(y_1(0)e^{\lambda_1 T}, \ldots, y_n(0)e^{\lambda_n T}\right)$$

$$x_i(T) = c_{i1}\, e^{T\lambda_1} + \cdots + c_{in}\, e^{T\lambda_n}$$

Per finire

$$\dot{x} = Q^{-1}\dot{y} = Q^{-1}By = Q^{-1}(QAQ^{-1})y$$

$$= AQ^{-1}y = Ax$$

soddisfa l'eq diff. con $x(0) = Q^{-1}y(0) =$

$$= Q^{-1}Qx_0 = x_0$$

L'unicità segue dall'unicità per

$\dot{y} = By$ ∎

Ricordiamo dall'algebra che se abbiamo

n autovettori indipendenti $v_1, \dots, v_n$,

la matrice $P = [v_1, \dots, v_n]$

$$\left[(\;)\,(\;) \cdots (\;) \right]$$

che ha gli autovettori come colonne

è non singolare. La matrice Q

nella dice è proprio $Q = P^{-1}$

cioè $y = Qx = P^{-1}x$

Allora se

$$y(t) = \begin{pmatrix} a_1 e^{t\lambda_1} \\ \vdots \\ a_n e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} \Rightarrow x(t) = P\, y(t)$$

con condizioni iniziali $x(0) = x_0 \rightarrow$

$a = P^{-1} x_0$

Esempio $\qquad \dot{x} = Ax$

$$\dot{x}_1 = x_1$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + 2x_2$$
$$\dot{x}_3 = x_1 - x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A-\lambda \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda\mathbb{1}) = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$$

La matrice B è $B = \operatorname{diag}(1,2,-1)$

$$\dot{y} = By$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 \\ \dot{y}_2 = 2y_2 \\ \dot{y}_3 = -y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(\tau) = a e^{\tau} \\ y_2(\tau) = b e^{2\tau} \\ y_3(\tau) = c e^{-\tau} \end{cases}$$

Con un po' di algebra : $Av = \lambda v$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \underbrace{\lambda}_{1,2,-1} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

. Allora, per finire

$$x(t) = P\,y(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a e^{t} \\ b e^{2t} \\ c e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} 2a e^{t} \\ -2a e^{t} + b e^{2t} \\ a e^{t} + c e^{-t} \end{cases}$$

a, b, c li troviamo da

$$\begin{cases} x_1(0) = 2a = x_{01} \\ x_2(0) = -2a + b = x_{02} \\ x_3(0) = a + c = x_{03} \end{cases}$$

Seconda parte

<u>Autovalori complessi</u>

A ha autovalori complessi distinti

$\rightarrow \alpha + i\beta \quad (\beta \neq 0)$

Polinomio caratteristico ha coefficienti reali, anche $\alpha - i\beta$ è autovalore

$A v = (\alpha + i\beta) v$ $\qquad v_i = x_i + i y_i$

$A \bar{v} = (\alpha - i\beta) \bar{v}$

$\hookrightarrow \quad A\bar{v} = \overline{A v} = \overline{(\alpha + i\beta) v} = (\alpha - i\beta)\bar{v}$

Supponiamo A matrice $2n \times 2n$, con autovalori (distinti) $\alpha_j \pm i\beta_j$ $\quad j = 1 \to n$

Allora A può essere messa in forma canonica:

$$w_{2j-1} := \frac{1}{2}(v_j + \bar{v}_j) = \operatorname{Re} v_j$$

$$w_{2j} := -\frac{i}{2}(v_j - \bar{v}_j) = \operatorname{Im} v_j$$

Lemma $\{w_j\}$ sono linearmente indep.

Dim Segue dal fatto che lo sono i v_j

Per assurdo supponiamo

$$\sum_1^n (c_j w_{2j-1} + d_j w_{2j}) = 0$$

$$= \frac{1}{2}\sum_1^n \left(c_j (v_j + \bar{v}_j) - i d_j (v_j - \bar{v}_j)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{1}^{m} \left((c_j - i d_j) v_j + (c_j + i d_j) \bar{v}_j \right) = 0$$

$\Longleftrightarrow$ $\quad c_j \pm i d_j = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c_j = d_j = 0$

$\uparrow$ v lin indip

$\blacksquare$

Notiamo che

- $$A w_{2j-1} = \frac{1}{2} (A v_j + A \bar{v}_j) =$$
$$= \frac{1}{2} \left((\alpha_j + i\beta_j) v_j + (\alpha_j - i\beta_j) \bar{v}_j \right)$$
$$= \frac{\alpha_j}{2} (v_j + \bar{v}_j) + \frac{i \beta_j}{2} (v_j - \bar{v}_j) =$$
$$= \alpha_j w_{2j-1} - \beta_j w_{2j}$$

- $$A w_{2j} = \cdots\cdots = \beta_j w_{2j-1} + \alpha_j w_{2j}$$

Consideriamo la matrice T definita da $\quad T e_j = w_j \qquad j = 1, \dots, 2n$

$\uparrow \{e_j\}$ base di $\mathbb{R}^{2n}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$

Quindi T ha colonne sono $w_1, \dots, w_{2n}$

T è una matrice reale & invertibile

Calcoliamo

- $(T^{-1}AT)e_{2j-1} = T^{-1}A\, w_{2j-1} =$

$$= T^{-1}(\alpha_j w_{2j-1} - \beta_j w_{2j})$$

$$= \alpha_j e_{2j-1} - \beta_j e_{2j}$$

- $(T^{-1}AT)e_{2j} = \dots = \beta_j e_{2j-1} + \alpha e_{2j}$

Come è fatto $T^{-1}AT$?

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_n \end{pmatrix} \qquad D_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$$

Mettendo tutto insieme

Se A è una matrice $n \times n$ con autovalori distinti

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k & & \\ & & & D_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D_e \end{pmatrix} \qquad D_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$$

(nel caso precedente $\dot{y} = \lambda y$)

Adesso dobbiamo capire come si risolve

$$\boxed{\dot{\underline{X}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \underline{X}} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = \alpha x + \beta y \\ \dfrac{dy}{d\tau} = -\beta x + \alpha y \end{cases}$$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Definiamo $z = x + iy$

$$\frac{d}{d\tau}(\underbrace{x + iy}_{z}) = (\alpha x + \beta y) + i(-\beta x + \alpha y)$$

$$= (\alpha - i\beta)x + (i\alpha + \beta)y$$

$$= (\alpha - i\beta)x + i(\alpha - i\beta)y$$

$$= (\alpha - i\beta)(x + iy)$$

ha la forma $\dot{z} = \mu z$ la cui

soluzione è $z(\tau) = K e^{\tau\mu}$

Quindi

$$\big(x(\tau) + i y(\tau)\big) = (k_1 + ik_2)\, e^{\tau\alpha} e^{-i\beta\tau}$$

$$= (k_1 + ik_2)\, e^{\tau\alpha}(\cos\beta\tau - i\sin\beta\tau)$$

Quindi

$$x(t) = k_1 e^{t\alpha} \cos\beta t + k_2 e^{t\alpha} \sin\beta t$$

$$y(t) = k_2 e^{t\alpha} \cos\beta t - k_1 e^{t\alpha} \sin\beta t$$

$\hookrightarrow$ sappiamo risolvere per ogni blocco $D_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases} \qquad \dot{x} = Ax \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Come prima

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(2-\lambda) + 2$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$$\lambda = 1 \pm i$$

Si verifica che

$$\lambda = 1 + i, \quad v = \begin{pmatrix} 1+i \\ -i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w_1 = \operatorname{Re} v} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{w_2 = \operatorname{Im} v}$$

$$\lambda = 1 - i \qquad \bar{v}$$

Allora $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora $y := T x = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}$

$$y_1 = k_1 e^t \cos t + k_2 e^t \sin t \qquad \lambda = 1 \pm i$$

$$y_2 = k_2 e^t \cos t - k_1 e^t \sin t \qquad \alpha \quad \beta$$

La soluzione si trova come

$$x = T^{-1} y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -y_2 \end{pmatrix}$$

Se $\dot{x} = A x$

↳ a seconda dello spettro di A (autovalori distinti) si può ridurre

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k & & \\ & & & D_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & D_e \end{pmatrix}$$

$$\dot{y} = (T^{-1} A T)\, y$$

$$y = \begin{pmatrix} e^{-} \\ e \\ \end{pmatrix}$$

sin cos

$$x = T^{-1} y$$

Caso generale $\rightsquigarrow$ autovalori con molteplicità

$$\det(A - \lambda I) = 0 \rightsquigarrow \underbrace{(z - \lambda)^k}\, q(z)$$

polinomio

λ ha molteplicità k

$$E_k = \ker\left[(T - \lambda_k \mathbb{1})^{\mu_k} \right]$$ autospazio generalizzato

$$(T - \lambda_j I)^{\mu_j} v = 0$$

Vedremo: caso planare $(\mathbb{R}^2)$

$$A \rightleftarrows \mathrm{diag}(\lambda \dots \lambda)$$