

# SISTEMI DINAMICI

14 Aprile 2021

---

Sistemi lineari planari : Analisi  
qualitativa

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad \longleftrightarrow \quad \dot{x} = Ax$$

$\uparrow$   
 $A \in \text{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$

Eq. diff.  $\dot{x} = Ax$   
 $\uparrow$  algebra lineare  
problema spettrale

$$A \rightsquigarrow T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & \lambda_r & \\ & & & & & \dots & \dots \\ & & & & & & \lambda_{r+1} \\ & & & & & & & \dots & \dots \\ & & & & & & & & \lambda_{n-1} \\ & & & & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

autovettori reali di  $A$

$$\rightarrow \dot{y}_i = \lambda_i y_i \rightarrow \text{sol exp}$$

autovalori complessi

$$\alpha_j + i\beta_j$$

$$\alpha_j - i\beta_j$$

$$D_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$$

sol  $e^{T\alpha} (\cos \beta t \pm \sin \beta t)$

Risolve il sistema  $T^{-1}AT$

Trasportiamo queste informazioni nelle variabili originali usando  $T$

Sistemi lineari planari  $\rightarrow$  flusso

Studiare il flusso nel piano delle fasi.

Consideriamo

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}y + a_{22}x \end{cases}$$

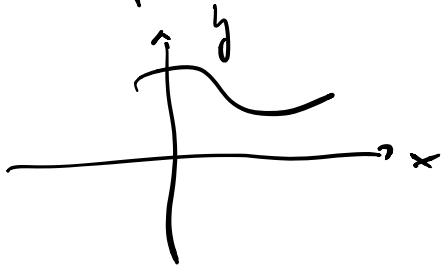


$$\dot{X} = AX$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

vogliamo capire come sono fatte le traiettorie

nel piano  $(x, y)$  (delle fasi)



Localmente  
l'andamento di  
queste curve

è determinato da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a_{21}y + a_{11}t}{a_{11}x + a_{12}y}$$

$$y = y(t)$$

$$x = x(t)$$

Per capire le traiettorie: considerare

le linee dove  $\frac{dy}{dx} = \text{costante}$

→ ISOCLINE

Ad esempio (esclusione traiettorie  
singolarità)

$\dot{x} = 0$  → traiettorie hanno vettori  
tangenti verticali

$\dot{y} = 0$  → tutti i vettori tangenti  
sono orizzontali

Vogliamo classificare i possibili  
comportamenti a seconda degli  
autovalori di  $A$ .

## Autovalori reali & distinti

Abbiamo i casi ( $\lambda_1, \lambda_2$  con  $\lambda_1 < \lambda_2$ )

- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$
- $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

Se diagonalizziamo:  $\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \end{cases}$

$$\left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \left( \frac{\lambda_2 y}{\lambda_1 x} \right)$$

$$|y|^{\lambda_1} = K |x|^{\lambda_2}$$

Esempi notevoli

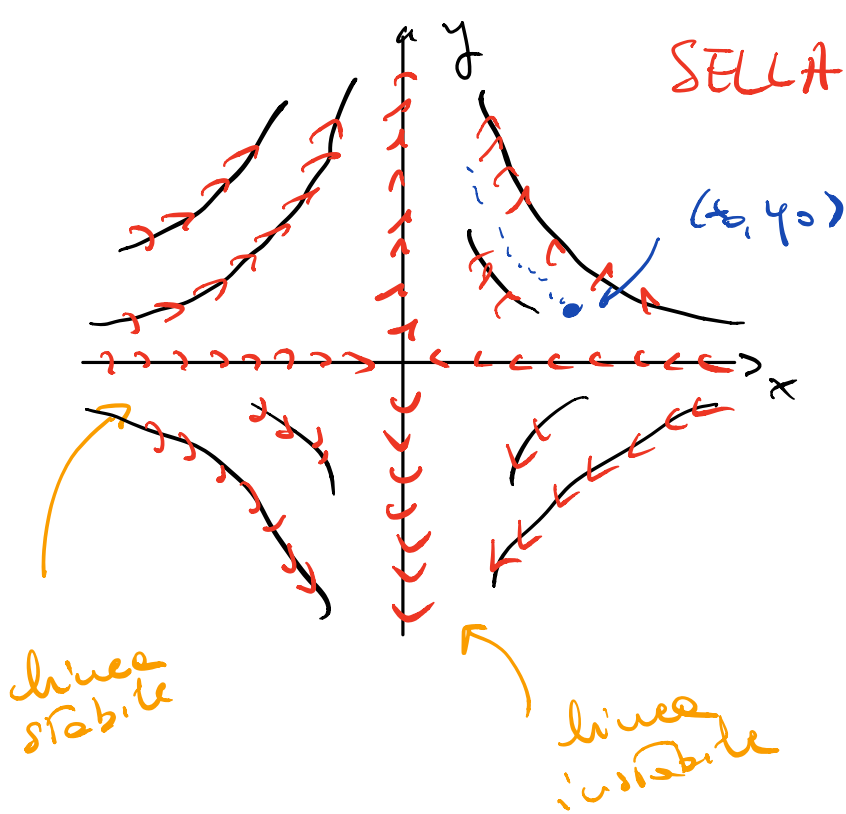
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$$

SELLA

(SADDLE)

Soluzioni: 
$$\underline{x(\tau)} = \alpha e^{\lambda_1 \tau} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 \tau} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\alpha e^{k_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 < 0$  Tende

a zero per  
 $t \rightarrow +\infty$

$$e^{k_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 > 0$ , si allontana

da  $(0,0)$  per  $t \rightarrow +\infty$

La soluzione generica per  $t \rightarrow \infty$  va  
a infinito nella direzione della linea  
instabile, perché  $\alpha e^{k_1 t}$  va a zero e  
quindi  $\beta e^{k_2 t}$  domina

Esempio  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

autovalori:  $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$

$$= -(1-\lambda)(1+\lambda) - 3 = -1 + \lambda^2 - 3 = 0$$

$$\rightarrow \lambda = \pm 2$$

autovettori:  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$$u_1 + 3u_2 = 2u_1$$

$$3u_2 = u_1$$

$$u_1 - u_2 = 2u_2$$

$$u_1 = 3u_2$$

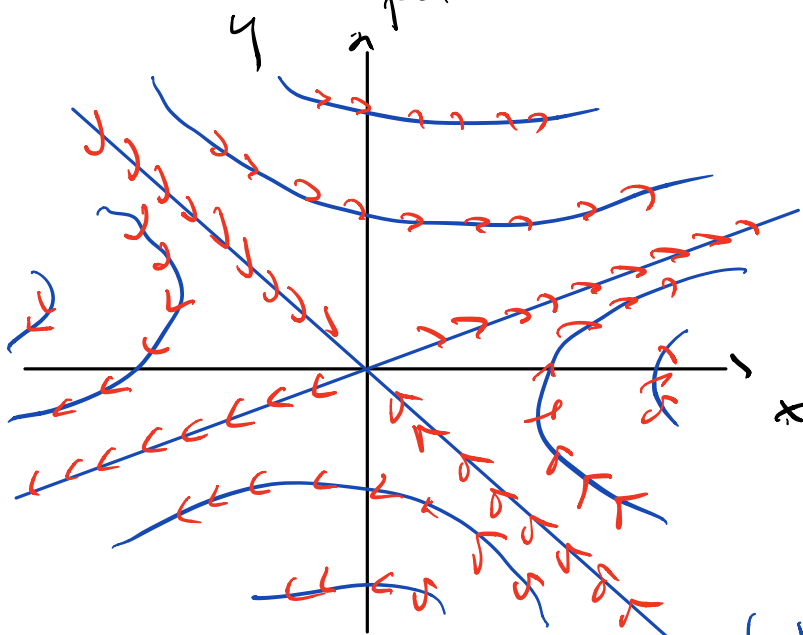
$$\lambda = +2 \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = -2 \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X(\tau) = \alpha e^{2\tau} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-2\tau} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

linea instabile

linea stabile

(via da  $(0,0)$ )  
per  $\tau \rightarrow \infty$



$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A \rightsquigarrow T^{-1}AT$  dove risolviamo

e poi  $T \rightsquigarrow$  torniamo alle variabili  
di partenza

## Esempio Pozzo (Sink)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

Due sol lungo linee oblique

$$X(\tau) = \alpha e^{\lambda_1 \tau} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 \tau} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

entrante  $\rightarrow (0,0)$  per  $\tau \rightarrow +\infty$

Vediamo la pendenza:  $\beta \neq 0$

$$x(\tau) = \alpha e^{\lambda_1 \tau}, \quad y(\tau) = \beta e^{\lambda_2 \tau}$$

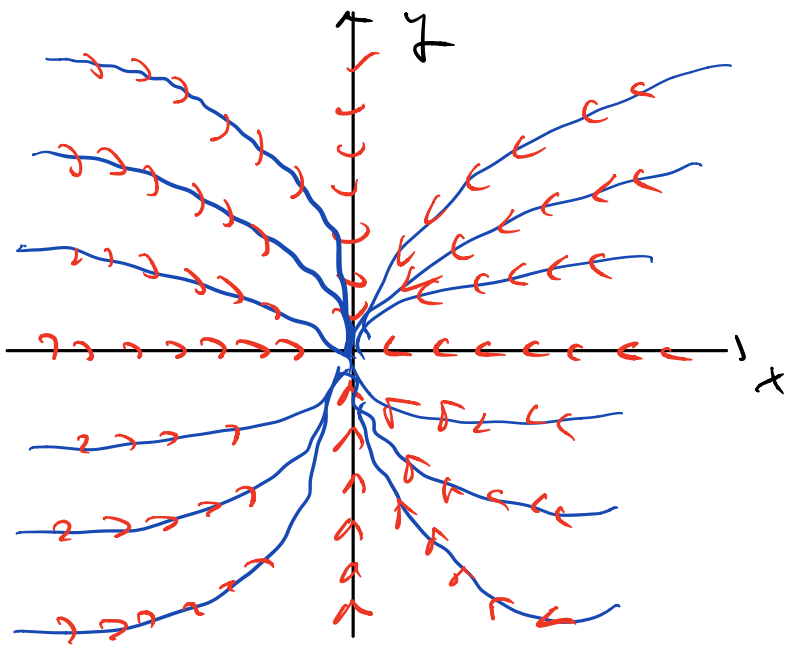
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\lambda_2 \beta e^{\lambda_2 \tau}}{\lambda_1 \alpha e^{\lambda_1 \tau}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\beta}{\alpha} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)\tau}$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 > 0$$

Allora per  $\tau \rightarrow \infty$  la pendenza  $\frac{dy}{dx}$

va verso  $\pm \infty$  (a seconda dei segni) di  $\alpha$  e  $\beta$

$\rightarrow$  le soluzioni se verso l'origine in modo tangente all'asse  $y$



P0220

Caso più generale

$$\alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{\lambda_1 \alpha e^{\lambda_1 t} u_2 + \lambda_2 \beta e^{\lambda_2 t} v_2}{\lambda_1 \alpha e^{\lambda_1 t} u_1 + \lambda_2 \beta e^{\lambda_2 t} v_1} \\ &= \frac{\lambda_1 \alpha e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} u_2 + \lambda_2 \beta v_2}{\lambda_1 \alpha e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} u_1 + \lambda_2 \beta v_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 < 0 \\ \xrightarrow{\quad} & \neq \frac{v_2}{v_1} \\ t \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$\lambda_1 < \lambda_2$  le soluzioni tendono  
all'origine tangenti alla  
linea soluzione corrispondente

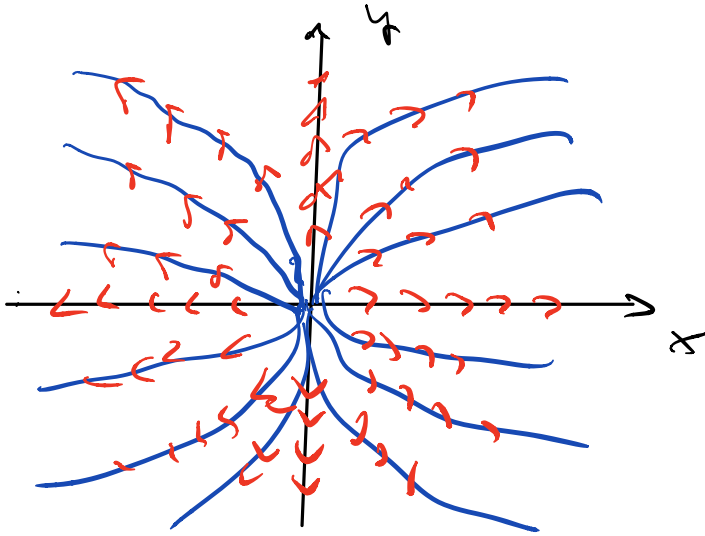


all' autovettore "più debole"  $d_2$

Esempio

SORGENTE (SOURCE)

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \quad 0 < d_2 < d_1$$



---

Seconda parte

---

Autovetori complessi

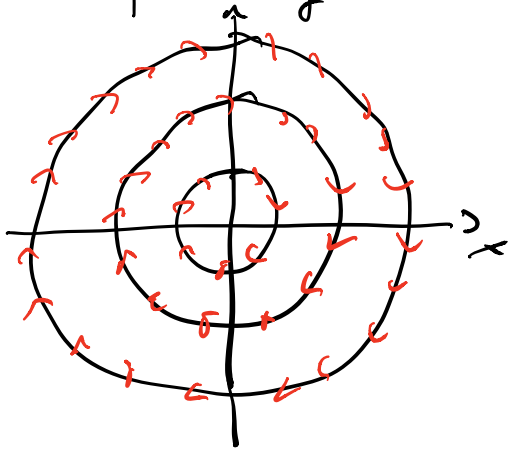
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

autovetori:  $d = \pm i\beta$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{è autovettore per } d = i\beta$$

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix}$$

→ periodiche di periodo  $\frac{2\pi}{\beta}$



orologio se  $\beta > 0$

antiorario se  $\beta < 0$

CENTRO (center)

Esempio Spirale

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y \\ \dot{y} = -\beta x + \alpha y \end{cases}$$

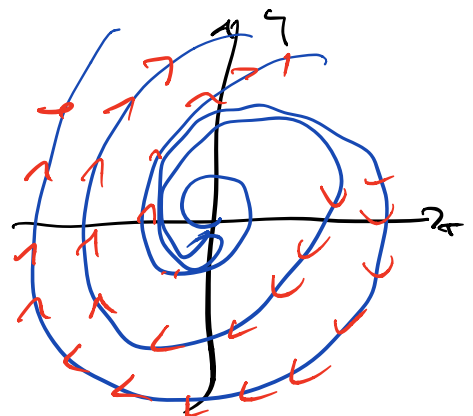
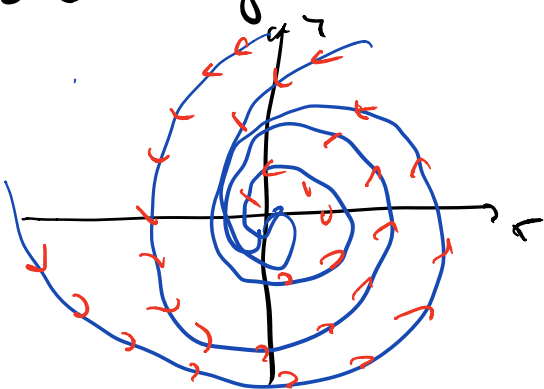
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\lambda = \alpha \pm i\beta$$

$$\downarrow \begin{cases} \dot{r} = \alpha r \\ \dot{\theta} = -\beta \end{cases}$$

come prima, ma ora  $\dot{r} = \alpha r$   
 converte i cerchi in spirali che  
 entrano ( $\alpha < 0$ ) o escono ( $\alpha > 0$ )

dall'origine



Autovetori ripetuti

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 = \lambda_2$$

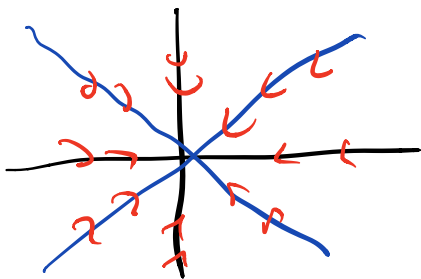
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Primo caso

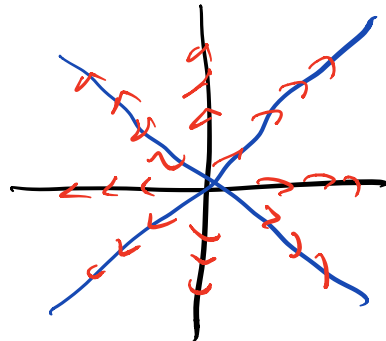
$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x \\ y' = \lambda_1 y \end{cases}$$

$$\rightarrow y = kx$$



$$\lambda_1 < 0$$

NON



$$\lambda_1 > 0$$

Secondo caso

$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x + y \\ y' = \lambda_1 y \end{cases}$$

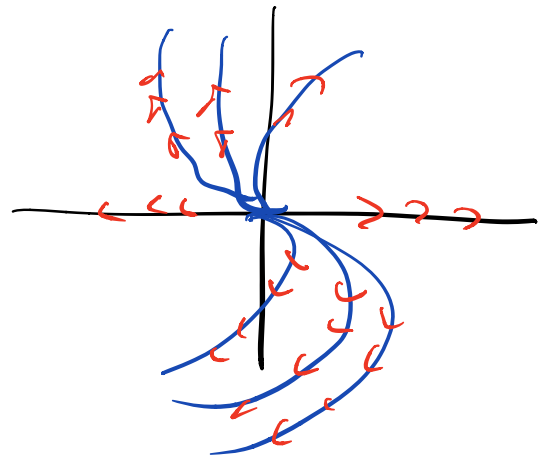
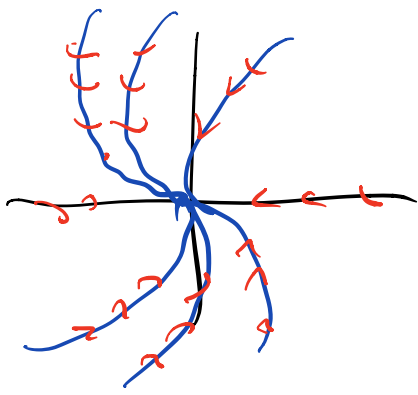
$\rightarrow$

$$\begin{cases} x = (\alpha + \beta \tau) e^{\lambda_1 \tau} \\ y = \beta e^{\lambda_1 \tau} \end{cases}$$

$$x = \tau y + \frac{\alpha}{\beta} y$$

$$\uparrow \tau = \frac{1}{\lambda_1} \log \frac{y}{\beta}$$

$$= \frac{y}{\lambda_1} \left( \log \left| \frac{y}{\beta} \right| + \cos \tau \right)$$



Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda = \pm 2i$$

$$\lambda = +2i, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{2it} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$$

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -2 \sin 2t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2 \cos 2t \end{pmatrix}$$

Matrice  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

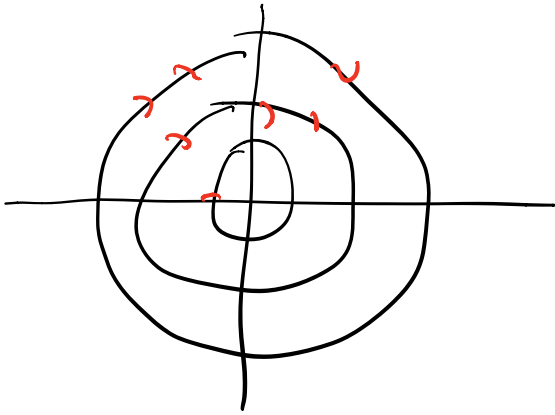
Restituisce  $A$  in forma canonica

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

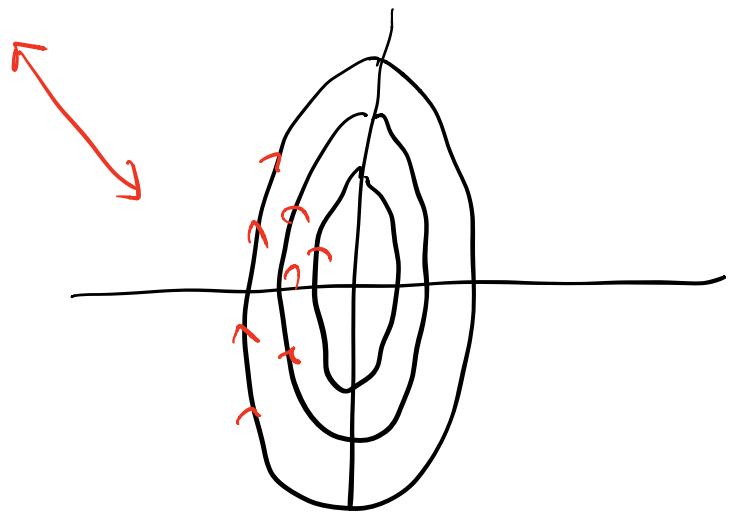
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$$\dot{y} = B y$$

corrisponde  
a un centro



$$\dot{x} = A x$$



$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\lambda_1 = \lambda_2}}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$

$$\underline{\underline{\dot{x} = A x}}$$

$$\dot{y} = \underbrace{T^{-1} A T}_{\text{diagonal}} y$$

# Piano Frobenius - determinante

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$$

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$$



$$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$$

$$\lambda^2 - (\text{Tr} A)\lambda + \det A = 0$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \text{Tr} A \pm \sqrt{(\text{Tr} A)^2 - 4 \det A} \right)$$

$$\tau^2 - 4\delta$$

$$\text{Tr} A = \lambda_+ + \lambda_- =: \tau$$

$$\det A = \lambda_+ \lambda_- =: \delta$$

Classificazione nel piano  $(\tau, \delta)$

→ guardiamo la parabola  $\tau^2 - 4\delta = 0$

1.  $\tau^2 - 4\delta < 0 \rightarrow$  complessi,  $\text{Im} \neq 0$

2.  $\tau^2 - 4\delta = 0 \rightarrow$  reali ripetuti

3.  $\tau^2 - 4\delta > 0 \rightarrow$  reali distinti

la particolare  $\tau = 1$ ,  $\tau^2 - 4\delta < 0$   
 parte reale degli autovalori  $\frac{\tau}{2}$

- $\tau < 0$  pozzi spirale
- $\tau > 0$  sorgenti spirale
- $\tau = 0$  centro

$\rightarrow \tau^2 - 4\delta > 0$

- $\delta < 0 \Rightarrow \lambda_+ \lambda_- < 0$  un autovalore positivo e l'altro negativo  $\rightarrow$  SELLA
- $\delta > 0$   $\tau < 0$   $\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta} < 0$  Pozzo  
Sorgente
- $\delta > 0$   $\tau > 0$

