

Def. Dato uno spazio U di funzioni, si dice **FUNZIONALE** definito nel dominio U una MAPPA F che ad ogni funzione $u \in U$ associa un numero (reale)

$$F: U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto F[u] \in \mathbb{R}$$

Def. **VARIAZIONE** di un FUNZIONALE:

$$\delta F[u, \delta u] = \left. \frac{d}{d\alpha} F[u + \alpha \delta u] \right|_{\alpha=0}$$

← generalizzazione ai funzionali delle derivate direzionali di funzioni a più variabili

Caso particolare:

$$F[u] = \int_{x_i}^{x_f} L(u(x), u'(x), x) dx \implies \delta F[u, \delta u] = \left. \frac{\partial L}{\partial u'} \cdot \delta u \right|_{x_i}^{x_f} - \int_{x_i}^{x_f} \left\{ \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right\} \delta u dx$$

Def. Diciamo che un funzionale F definito su U è **STAZIONARIO** in u_0 , o che u_0 è pto di stazionarietà in F , se

$$\delta F[u_0, \delta u] = 0 \quad \forall \delta u \quad (\text{t.c. } u_0 + \delta u \in U)$$

Prop. Dato $F[u] = \int_{x_i}^{x_f} L(u(x), u'(x), x) dx$, allora

u_0 è pto di staz. in F
per variazioni nulle
agli estremi

$$\iff \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'}(u_0(x), u_0'(x)) - \frac{\partial L}{\partial u}(u_0(x), u_0'(x)) = 0$$

dette EQ. di EULERO-LAGRANGE associate al funzionale F

Dim

$$\delta F[u_0, \delta u] = \left. \frac{\partial L}{\partial u'} \delta u \right|_{x_i}^{x_f} - \int_{x_i}^{x_f} \left\{ \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right\} \delta u dx$$

$= 0 \quad \delta u = 0$

← : ovvio $\rightsquigarrow \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u}(u_0(x)) = 0 \implies \delta F[u_0, \delta u] = 0 \quad \forall \delta u$

\Rightarrow : dobbiamo dir. che se $\delta F[u_0, \delta u] = 0 \quad \forall \delta u$,

$$\text{allora } \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'}(u_0, u'_0, x) - \frac{\partial L}{\partial u}(u_0, u'_0, x) = 0$$

dim. per assurdo: assumiamo per assurdo che $u_0(x)$

non soddisfa eq. di Lagr. $\left(\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right) \Big|_{u=u_0}(x) \neq 0$,

cioè \exists almeno un $\bar{x} \in [x_i, x_f]$ t.c.

$$\left(\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right) \Big|_{u=u_0(x)}(\bar{x}) \neq 0$$

allora per continuità

$$\left(\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right) \Big|_{u=u_0(x)}(x) \neq 0 \quad \forall x \in I_{\bar{x}} \quad \leftarrow \text{intervallo di } \bar{x}$$

e prendendo intervallo suff. piccolo $\left(\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right) \Big|_{u=u_0(x)}$ ha segno def.

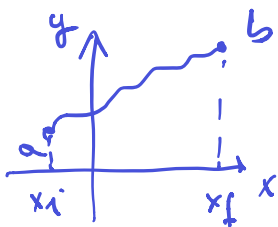
questo ci permette di trovare un δu t.c. $\delta F[u_0, \delta u] \neq 0$:

cioè δu t.c. $\delta u(x) = 0$ se $x \notin I_{\bar{x}}$, $\delta u(x) > 0$ se $x \in I_{\bar{x}}$

$$\Rightarrow \int_{x_i}^{x_f} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right) \Big|_{u=u_0(x)}(x) \delta u(x) dx =$$

$$= \int_{I_{\bar{x}}} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} \right) \Big|_{u=u_0(x)}(x) \delta u(x) dx \neq 0$$

ES $L = (1 + u'^2)^{1/2}$



$$F[u] = \int_{x_i}^{x_f} L(u(x), u'(x), x) dx$$

↑
linghetta delle curve

u che minimizza F , cioè t.c. $\delta F[u, \delta u] = 0 \quad \forall \delta u$

\Leftrightarrow u soddisfa eq. di Lagr. :

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} - \frac{\partial L}{\partial u} = \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}} = 0 \iff u'' = 0$$

$$u(x) = ux + q \text{ RETTA}$$

PRINCIPIO DI HAMILTON

In meccanica abbiamo a che fare con funzioni nel tempo t che descrivono il moto del sistema: $q_k(t)$, le cui derivate sono $\dot{q}_n(t)$

Iniziamo con un sistema a 1 grado di lib. $n=1$

$$L(q, \dot{q}, t) \quad \text{Lagrangiana} \quad L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Se sostituisco alle variabili q, \dot{q} , le funz. $q(t), \dot{q}(t)$, ottengo $L(q(t), \dot{q}(t), t)$ che è una funz. int

Definisco **AZIONE HAMILTONIANA** il funzionale

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$$

→ Un moto $q(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, rende STAZIONARIO $S[q]$, per variazioni arbitrarie $\delta q(t)$ (nulle agli estremi) se e solo se $q(t)$ soddisfa le eq. di Lagr.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) = 0$$

→ Tra tutti i moti possibili tra $q_1 = q(t_1)$ e $q_2 = q(t_2)$ il moto reale è quello che rende stazionario

il funzionale AZIONE $S[q]$, cioè $q(t)$ t.c.

$$\delta S [q, \delta q] = 0 \quad \forall \delta q$$

Generalizziamo a n gradi di libertà

$$L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \quad L: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{Lagrangiana}$$

$$S[\bar{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) dt \quad \text{AZIONE HAMILTONIANA}$$

Prop. La variazione del funzionale S è data da

$$\delta S[\bar{q}, \delta \bar{q}] = \sum_{k=1}^n \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right] dt$$

=0 se δq_k si annulla in t_1 e t_2

Prop. **PRINCIPIO DI HAMILTON.** Il moto $\bar{q}(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, rende STAZIONARIO il funzionale AZIONE S , per variazioni $\delta q_1(t), \dots, \delta q_n(t)$ arbitrarie e nulle agli estremi

$$\Leftrightarrow \bar{q}(t) \text{ soddisfa le eq. di Lagrange}$$
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad k=1, \dots, n$$

Noi siamo partiti da PRINCIPIO di $\bar{F} = m\bar{a} \Rightarrow$ principio di Hamilton

Si poteva anche formulare la MECCANICA CLASSICA

assumendo come principio il PRINCIPIO di HAMILTON \Rightarrow

$$\Rightarrow \text{eq. Lag} \Rightarrow \text{eq. } \bar{F}_i = m\bar{a}_i$$

Proprietà di invarianza delle eq. di Lagr. :

1) Inv. in CAMBIAMENTO DI COORDINATE

$$\bar{q} = \bar{q}(\bar{q}, t)$$

$$\bar{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = L(\bar{q}(\bar{q}, t), \dot{\bar{q}}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t), t)$$

Il moto $\bar{q}(t) = \bar{q}(\bar{q}(t), t)$

Allora

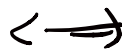
$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{L}(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) dt$$

stetionario in

$$\bar{q}(t)$$



$\bar{q}(t)$ risolve
eq. di Lagr.
in \bar{L}



stetionario in

$$\bar{q}(t) = \bar{q}(\bar{q}(t), t)$$



$\bar{q}(t)$ risolve
eq. di Lagr.
in L



2) Abbiamo stesse eq. di Lagr. se L e L' differiscono

in una certa $\varphi(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ t.c.

$$\varphi(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) = \frac{d}{dt} F(\bar{q}(t), t) \leftarrow \text{DERIVATA TOTALE}$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) dt \quad S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) dt$$

$$\begin{aligned}
 \text{ma} \quad \delta' &= \int_{t_1}^{t_2} L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F(\bar{q}(t), t) dt \\
 &= S + F(\bar{q}(t), t) \Big|_{t_1}^{t_2}
 \end{aligned}$$

Devo fare variazioni di termine di destra e di sinistra

$$\delta S' = \delta S + \delta \left(F(\bar{q}(t), t) \Big|_{t_1}^{t_2} \right)$$

\uparrow
 proporzionale a $\delta q(t_1)$
 o $\delta q(t_2)$

$$\Rightarrow = 0$$

\Downarrow

$$\delta S' = \delta S \quad //$$

LEGGI DI CONSERVAZIONE in meccanica Lagrangiana

Una funzione $I: \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ $(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \mapsto I(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$
è chiamata **COSTANTE DEL MOTO** (o integrale primo),
per un sistema Lagr. a n gradi di lib. con Lagrangiana L ,
se la funzione composta $I(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)$ è cost. in
 t per $\bar{q}(t)$ che soddisfa le eq. di Lagrange, cioè

$$\frac{d}{dt} (I(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)) = 0 \quad \text{in } \bar{q}(t) \text{ che risolve eq. Lagr.}$$

$$\sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial I}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_l} \ddot{q}_l \right) + \frac{\partial I}{\partial t}$$

→ Se conosco la funzione $I(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ e so che è
una cost. del moto, allora posso scrivere

l'eq.

$$I(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) = I_0$$

← famiglia (al variare
di I_0) di eq.
diff. del 1° ordine

che il moto reale sicuramente soddisfa

↳ posso utilizzarla per risolvere il problema
di integrare le eq. di Lagrange

Conservazione dell'ENERGIA in sist. Lagrangiani

Def. Per sist. Lagrangiani a n gradi di lib. e Lagr. $L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$

definiamo

$$E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \equiv \sum_{h=1}^n \dot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) - L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Calcoliamo la derivata $\frac{d}{dt}$ di $E(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)$

$$\frac{d}{dt} E(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) = \sum_{h=1}^m \left(\dot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} + q_h \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \right) -$$

$$- \sum_{h=1}^m \left(\frac{\partial L}{\partial q_h} q_h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \ddot{q}_h \right) - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= \sum_{h=1}^m \dot{q}_h \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} \right) - \frac{\partial L}{\partial t}$$

è valutata in $\bar{q}(t)$
 se $\bar{q}(t)$ risolve eq. di Lagr.

$$= - \frac{\partial L}{\partial t}$$

Invariante delle
 Lagrangiane sotto
 traslazioni temporali.

⇒ Se L NON DEP. ESPlicitATI. dal TEMPO ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$)

allora $E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ è una cost. del moto

Per un sistema meccanico conservativo

$$L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{h,k} a_{hk}(q) \dot{q}_h \dot{q}_k - V(\bar{q})$$

↑
 è una funzione
 OMOGENEA di grado 2
 nelle \dot{q}_h

$$E(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \sum_{h=1}^m \dot{q}_h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - L$$

Def. Funzione $f(x_1, \dots, x_N)$ si dice OMOGENEA di grado α se $\forall \lambda > 0$ e ogni scelta di x_1, \dots, x_N si ha

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_N) = \lambda^\alpha f(x_1, \dots, x_N)$$

ES. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2^2 + x_3 x_1 \quad \alpha = 2$
 $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + \frac{x_2^2}{x_1}} \quad \alpha = 1/2$

Lemma f omogenea di grado $\alpha \Rightarrow \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha f$

Dim. $0 = \frac{d}{d\lambda} \left[f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_N) - \lambda^\alpha f(x_1, \dots, x_N) \right] \Big|_{\lambda=1} =$
 $= \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_N)}{\partial x_i} x_i - \alpha \lambda^{\alpha-1} f(x_1, \dots, x_N) \right) \Big|_{\lambda=1} //$

$$E = \sum_{k=1}^m \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - L = \underbrace{\sum_{k=1}^m \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}}_{T \text{ omog. di grado 2}} - \sum_{k=1}^m \dot{q}_k \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} - T + V =$$

$$= 2T - T + V = T + V$$

- Nel caso in cui abbiamo forze conservative, E è l'ener. totale del sist. meccanico

↳ lineare omog. in $\dot{q} \leftarrow \alpha = 1$

- Se $V = V_0(\bar{q}) + V_1(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$

$$\Rightarrow - \sum_{k=1}^m \dot{q}_k \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = -V_1$$

$$E = 2T - V_1 - T + V_0 + V_1 = T + V_0$$