

## COORDINATE CICLICHE O IGNORABILI

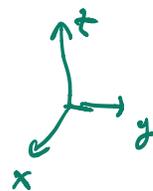
Consideriamo un sist. Lagr. a  $n$  gradi di lib. e supponiamo che  $L$  non dip. esplicitam. da alcune coordinate (dette **COORDINATE CICLICHE**),  $q_{m+1}, \dots, q_n$

$$L = L(q_1, \dots, q_m, \underbrace{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n}_{\text{velocità}}, t)$$

se  $L$  non dip. a una  $q_i$ , la matrice cinetica avrebbe una riga e una colonna di zeri e non sarebbe strettam. def. positiva

ES. Pt. materiale soggetto a forza di gravità.

$$T = \frac{1}{2} m (\underbrace{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}_{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3}) \quad V = mgz$$



$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz = L(z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$\rightarrow x$  e  $y$  sono COORD. CICLICHE

OSSERVAZIONE: quando  $q_{\bar{a}}$  è coordinata ciclica, la Lagrangiana è invariante sotto la trasformazione

$$\begin{aligned} q_h &\mapsto q_h & h \neq \bar{a} & & \dot{q}_h &\mapsto \dot{q}_h & \forall h \\ q_{\bar{a}} &\mapsto q_{\bar{a}} + c & & & & & c \text{ cost.} \end{aligned}$$

[ Possiamo definire delle funzioni (VARIABILI DINAMICHE)

$$p_{\bar{a}}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\bar{a}}}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

dette **MOMENTI CONIUGATI**. ]

Se  $q_{m+1}, \dots, q_n$  sono coord. cicliche, allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_l (q(t), \dot{q}(t), t) &= \quad \quad \quad l = m+1, \dots, n \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} (q(t), \dot{q}(t), t) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{se il moto } q(t) \\ \text{soddisfa le eq. di Lagr.}}}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} (q(t), \dot{q}(t), t) \stackrel{\substack{\uparrow \\ q_l \text{ \u00e9} \\ \text{ciclica}}}{=} 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  i momenti coniugati  $p_l$  ( $l = m+1, \dots, n$ ), relativi alle coord. cicliche, sono **COSTANTI DEL MOTO**

[  $p_l$  \u00e9 detto momento coniugato di  $q_l$  ]

ES)  $L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgyz$

$x$  \u00e9 ciclica  $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$   
 $y$  " "  $p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$   $\rightarrow$  quantit\u00e0 di moto lungo  $x$  e  $y$  \u00e9 conservate

Usiamo ora queste cost. del moto per "ridurre i gradi di libert\u00e0"

- Prendiamo  $p_l (q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} (q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m)$

- Scriviamo le relazioni

$\vec{P}_l \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} (q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \underbrace{\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n}_{\text{prendiamo p\u00e9 come le } m-m \text{ incognite di queste } m-m \text{ equazioni}})$   $l = m+1, \dots, n$   
 $\vec{P}_l$  \u00e9 una cost.

- Risolviamo  $\uparrow$  nelle  $\dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n$

$$\Rightarrow \dot{q}_e = u_e (q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n, t)$$

- Definiamo una Lagrangiana efficace (o Lagrangiana RIDOTTA)

$$L^* (q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, t; \underbrace{\tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n}_{\text{PARAMETRI}}) \equiv$$

$$\equiv L(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, u_{m+1}(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n, t) \\ \dots u_n(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n, t))$$

$$- \sum_{e=m+1}^n \tilde{p}_e u_e(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n, t)$$



$$L^* = \left( L - \sum_{k=m+1}^n \tilde{p}_k \dot{q}_k \right) \Big|_{\dot{q}_{e=m+1, \dots, n} = u_e}$$

Prendiamo  $L^*$  e lo trattiamo come la Lagrangiana di un sistema (ausiliario) a m gradi di libertà.

Eq. di Lagrange per  $L^*$   $h = 1, \dots, \underline{m}$

$$\frac{\partial L^*}{\partial q_h} = \frac{\partial L}{\partial q_h} + \sum_{e=m+1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_e} \frac{\partial u_e}{\partial q_h} - \sum_{e=m+1}^n \tilde{p}_e \frac{\partial u_e}{\partial q_h}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} + \sum_{e=m+1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_e} \frac{\partial u_e}{\partial \dot{q}_h} - \sum_{e=m+1}^n \tilde{p}_e \frac{\partial u_e}{\partial \dot{q}_h} \right]$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \quad | \text{ valutato in } q_h(t)$$

$h = 1, \dots, \underline{m}$

⇒ Le eq. di Lagrange di  $L^*$  coincidono con le prime  $m$  eq. di Lagrange di  $L$

⇒ le  $q_h(t)$  ( $h=1, \dots, m$ ) che risolvono le eq. di Lagrange di  $L^*$ , risolvono anche le eq. di Lagrange di  $L$ .

Come determiniamo le  $q_k(t)$   $k=m+1, \dots, n$ ?

Le rispettive eq. di Lagrange sono state utilizzate per ricavare le  $\dot{q}_k$  in funz. delle  $q_h, \dot{q}_h$   $h=1, \dots, m$  ( $u_k$ )

$$\rightarrow \dot{q}_k(t) = u_k(q_1(t), \dots, q_m(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_m(t), \tilde{p}_{m+1}, \dots, \tilde{p}_n, t)$$

↓

eq. diff. del 1° ordine in le  $q_k(t)$ ,  
del tipo  $\dot{x} = f(t)$ , cioè sono risolvibili  
per integrazione (quadratura)

ES)  $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgyz$   $m=3$   $m=1$

$$- \tilde{p}_x = m\dot{x} \qquad \hat{p}_y = m\dot{y}$$

$$- \dot{x} = \frac{\tilde{p}_x}{m} \qquad \dot{y} = \frac{\tilde{p}_y}{m}$$

$$- L^* = L - \tilde{p}_x \dot{x} - \tilde{p}_y \dot{y} \Big|_{\dot{x} = \frac{\tilde{p}_x}{m}, \dot{y} = \frac{\tilde{p}_y}{m}} =$$

$$= \frac{1}{2}m \left( \left( \frac{\tilde{p}_x}{m} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{p}_y}{m} \right)^2 + \dot{z}^2 \right) - mgyz - \tilde{p}_x \frac{\tilde{p}_x}{m} - \tilde{p}_y \frac{\tilde{p}_y}{m}$$

$$= \frac{1}{2}m \dot{z}^2 - mgyz - \frac{\tilde{p}_x^2}{2m} - \frac{\tilde{p}_y^2}{2m} = L^*(z, \dot{z}, \tilde{p}_x, \tilde{p}_y)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{z}} = m \ddot{z} \quad \frac{\partial L}{\partial z} = -mg \Rightarrow \ddot{z} = -g$$

$$\rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + z_0$$

$$\dot{x} = \frac{\tilde{p}_x}{m} \rightarrow x(t) = \frac{\tilde{p}_x}{m} t + x_0$$

$$\dot{y} = \frac{\tilde{p}_y}{m} \rightarrow y(t) = \frac{\tilde{p}_y}{m} t + y_0$$

Osservazione: Quanto visto finora può essere formulato nel seguente modo. Prendiamo  $q_i$  coord. cicliche:

-  $L$  invariante sotto le seguenti transf.

$$\bar{q} \mapsto \bar{q}' = \bar{\Phi}(\alpha, \bar{q})$$

$$\dot{\bar{q}} \mapsto \dot{\bar{q}}' = \bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}})$$

dove (nel caso sopra)

$$\Phi_n(\alpha, \bar{q}) = q_n + \alpha \delta_{ne} \quad (*)$$

$$\Psi_n(\alpha, \bar{q}) = \dot{q}_n$$

$L$  indep.  $q_i \iff L$  è INVARIANTE sotto  
 le transf. (\*)

$\Downarrow$   
 $\exists$  cost. del  
 moto  
 (suo mom. con.)

$$L(\bar{\Phi}(\alpha, \bar{q}), \bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}), t) = L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Legge di  
 conservazione  
 ( $\exists$  cost. del moto)



Proprietà di  
 INVARIANTE di  $L$   
 (SIMMETRIA)

## Prop. TEOREMA DI NÖTHER

Sia  $\bar{q} \mapsto \bar{\Psi}(\alpha, \bar{q})$  una trasformazione di simmetria CONTINUA\*  
(una famiglia di diffeomorfismi locali dipendenti da  
un parametro  $\alpha$ )

che sia definita e differenziabile in  $\alpha$  in  
un intorno di  $\alpha = 0$ , e soddisfacente

$$\bar{\Psi}(0, \bar{q}) = \bar{q}$$

$$\text{Inoltre sia } \dot{\bar{q}} \mapsto \bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \sum_k \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k$$

\* [ES]    trasf. continue     $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad \alpha \in [0, 2\pi]$   
            trasf. discrete     $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha q_1 \\ \alpha q_2 \end{pmatrix} \quad \alpha = 1, -1$  ]

Se per ogni scelta di  $\bar{q}$ ,  $\dot{\bar{q}}$  e  $\alpha$  risulta che

$$L(\bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}), \bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}), t) = L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \quad **$$

allora la funzione (variabile d'azione)

$$P(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \sum_{m=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}_m(0, \bar{q})}{\partial \alpha} p_m(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \quad p_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}$$

è una COSTANTE DEL MOTO per le eq. di  
Lag. associate a  $L$ .

[\*\* ES]  $L$  invariante sotto rotazioni

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{m\omega^2}{2} (q_1^2 + q_2^2)$$

$$\bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \bar{q} = \begin{pmatrix} \cos \alpha q_1 + \sin \alpha q_2 \\ -\sin \alpha q_1 + \cos \alpha q_2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \dot{\bar{q}}$$

$$\begin{aligned} L(\bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}), \bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}})) &= \frac{m}{2} \left( (\cos \alpha \dot{q}_1 + \sin \alpha \dot{q}_2)^2 + (-\sin \alpha \dot{q}_1 + \cos \alpha \dot{q}_2)^2 \right) \\ &\quad - \frac{m\omega^2}{2} \left( (\cos \alpha q_1 + \sin \alpha q_2)^2 + (-\sin \alpha q_1 + \cos \alpha q_2)^2 \right) \\ &= \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{m\omega^2}{2} (q_1^2 + q_2^2) = \\ &= L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \end{aligned}$$

Dim del teorema di Noether.

$$L(\bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}), \bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}), t) = L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Derivo entrambi i membri  $\mu \frac{d}{d\alpha}$  e alla fine faccio  $\alpha=0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\alpha} L(\bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}), \bar{\Psi}(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}}), t) \Big|_{\alpha=0} = \psi_h = \sum_k \frac{\partial \psi_h}{\partial q_k} \dot{q}_k \\ &= \sum_{h=1}^m \left[ \frac{\partial L(\bar{\Psi}, \bar{\Psi}, t)}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \psi_h(\alpha, \bar{q})}{\partial \alpha} + \frac{\partial L(\bar{\Psi}, \bar{\Psi}, t)}{\partial \dot{q}_h} \cdot \frac{\partial \psi_h(\alpha, \bar{q}, \dot{\bar{q}})}{\partial \alpha} \right] \Big|_{\alpha=0} \\ &= \sum_{h=1}^m \left[ \frac{\partial L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \psi_h(0, \bar{q})}{\partial \alpha} + \frac{\partial L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)}{\partial \dot{q}_h} \cdot \frac{\partial \psi_h(0, \bar{q}, \dot{\bar{q}})}{\partial \alpha} \right] \end{aligned}$$

Valutiamo il termine a destra dell'uguale (che è una funzione nelle  $2n+1$  variabili  $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t$ ) lungo un traiettoria che soddisfa le EQ. di LAGR. di L

$$0 = \sum_{h=1}^n \left[ \underbrace{\frac{\partial L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)}{\partial q_h}}_{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}} \frac{\partial \phi_h(0, \bar{q}(t))}{\partial \alpha} + \frac{\partial L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)}{\partial \dot{q}_h} \underbrace{\frac{\partial \phi_h(0, \bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t))}{\partial \alpha}}_{\sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \frac{\partial \phi_h}{\partial \alpha} \right) \cdot \dot{q}_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial \phi_h}{\partial \alpha}} \right]$$

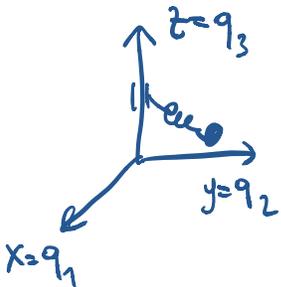
$$= \sum_{h=1}^n \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \right) \frac{\partial \phi_h}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \phi_h}{\partial \alpha} \right) \right] =$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{h=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \frac{\partial \phi_h}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt} \sum_{h=1}^n \underbrace{p_h(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{soddisf. eq. di Lagr.}}} \frac{\partial \phi_h(0, \bar{q}(t))}{\partial \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} P(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) = 0 \Rightarrow P \text{ è cost. del moto. //}$$

ES) INVARIANZA PER ROTAZ.

$$L = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - \frac{m\omega^2}{2} (q_1^2 + q_2^2) - mgq_3$$



$L$  è invariante sotto ROTAZIONI nel piano  $xy$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_3 = q_3 \quad \psi_3 = \dot{q}_3$$

$$P = \sum_{h=1}^3 \frac{\partial \phi_h(0, \bar{q})}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}$$

$$\varphi_1 = \cos \alpha q_1 + \sin \alpha q_2$$

$$\varphi_2 = -\sin \alpha q_1 + \cos \alpha q_2$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = -\sin \alpha q_1 + \cos \alpha q_2 \Big|_{\alpha=0} = q_2$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = -\cos \alpha q_1 - \sin \alpha q_2 \Big|_{\alpha=0} = -q_1$$

$$\varphi_3 = q_3$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m \dot{q}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m \dot{q}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = m \dot{q}_3$$

$$P = q_2 \cdot m \dot{q}_1 + (-q_1) \cdot m \dot{q}_2 + (0) \cdot m \dot{q}_3 =$$

$$= m(\dot{q}_1 q_2 - \dot{q}_2 q_1) = -m \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ij3} q_i \dot{q}_j =$$

$$= - (\bar{q} \times m \dot{\bar{q}})_3 = - M_z$$

$$\bar{r} \times m \bar{v} = M$$

COMPONENTE DEL MOMENTO  
ANGOLARE LUNGO  
L'ASSE DI ROTAZIONE

→ Se un sistema ( $L$ ) è invariante per ROTAZIONI attorno a un asse, la componente lungo tale asse del MOMENTO ANGOLARE è CONSERVATA lungo il moto

Invariante per  
ROTAZIONI



Conserv. del  
MOMENTO ANGOLARE

Invariante per  
TRASLAZIONI  
SPAZIALI



Conserv. della  
QUANTITA' DI MOTO

Invariante per  
TRASLAZIONI  
TEMPORALI



Conserv. dell'  
ENERGIA