

# Studio dei sistemi dinamici tramite FdT

## Risposta allo scalino

# Introduzione

- Assegnato un **sistema dinamico LTI** descritto tramite una **Funzione di Trasferimento** (a tempo continuo oppure a tempo discreto), e ' possibile trovare dei parametri che descrivano l'evoluzione della risposta allo scalino del sistema e che siano in qualche modo legati ai parametri tipici della FdT (zeri/poli, guadagno statico ecc.)?

# Tempo continuo vs tempo discreto

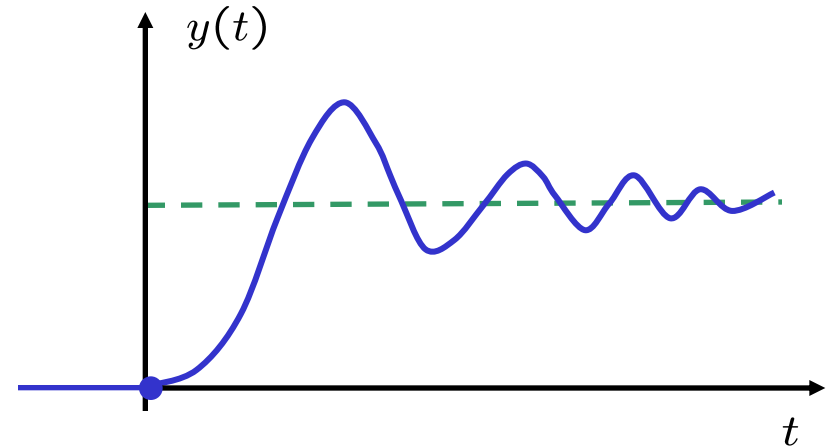
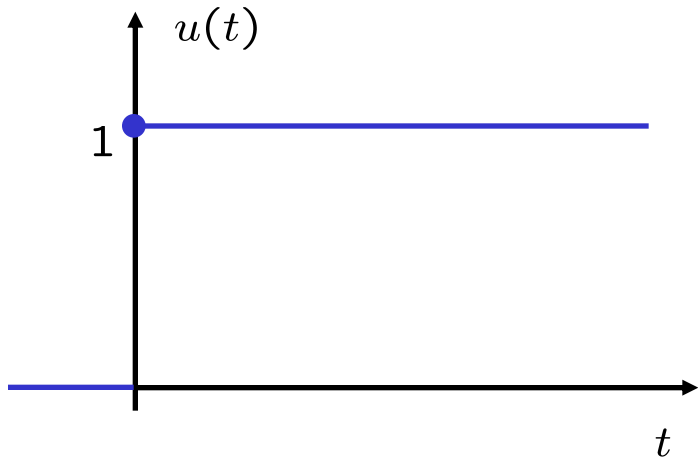
- Analizziamo **separatamente** anche stavolta il caso dei **sistemi LTI a tempo continuo** ed il caso dei **sistemi LTI a tempo discreto**.
- Infatti, come vedremo, i risultati dell'analisi svolta su sistemi a tempo continuo non sono tutti direttamente portabili al caso dei sistemi a tempo discreto e viceversa esistono dei comportamenti particolari che sono peculiarità dei sistemi a tempo discreto.

# Risposta allo scalino di sistemi LTI a tempo continuo

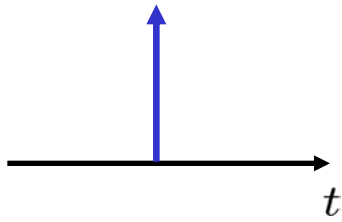
## - Risposta allo scalino

$$x(0) = 0$$

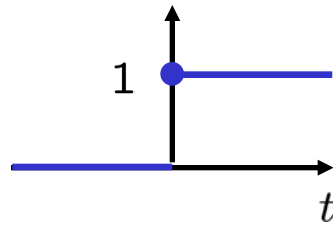
$$u(t) = 1(t)$$



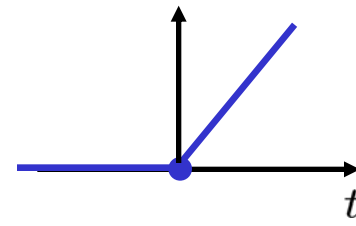
In sistemi asint. stabili descrive la transizione da un equilibrio ad un altro



$$\delta(t)$$



$$1(t)$$



$$t \cdot 1(t)$$

$$\frac{d}{dt} 1(t)$$

$$1$$

$$\int_0^t 1(\tau) d\tau$$

$$\frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s^2}$$

Risposta all'impulso =  $\frac{d}{dt}$  (risposta allo scalino)

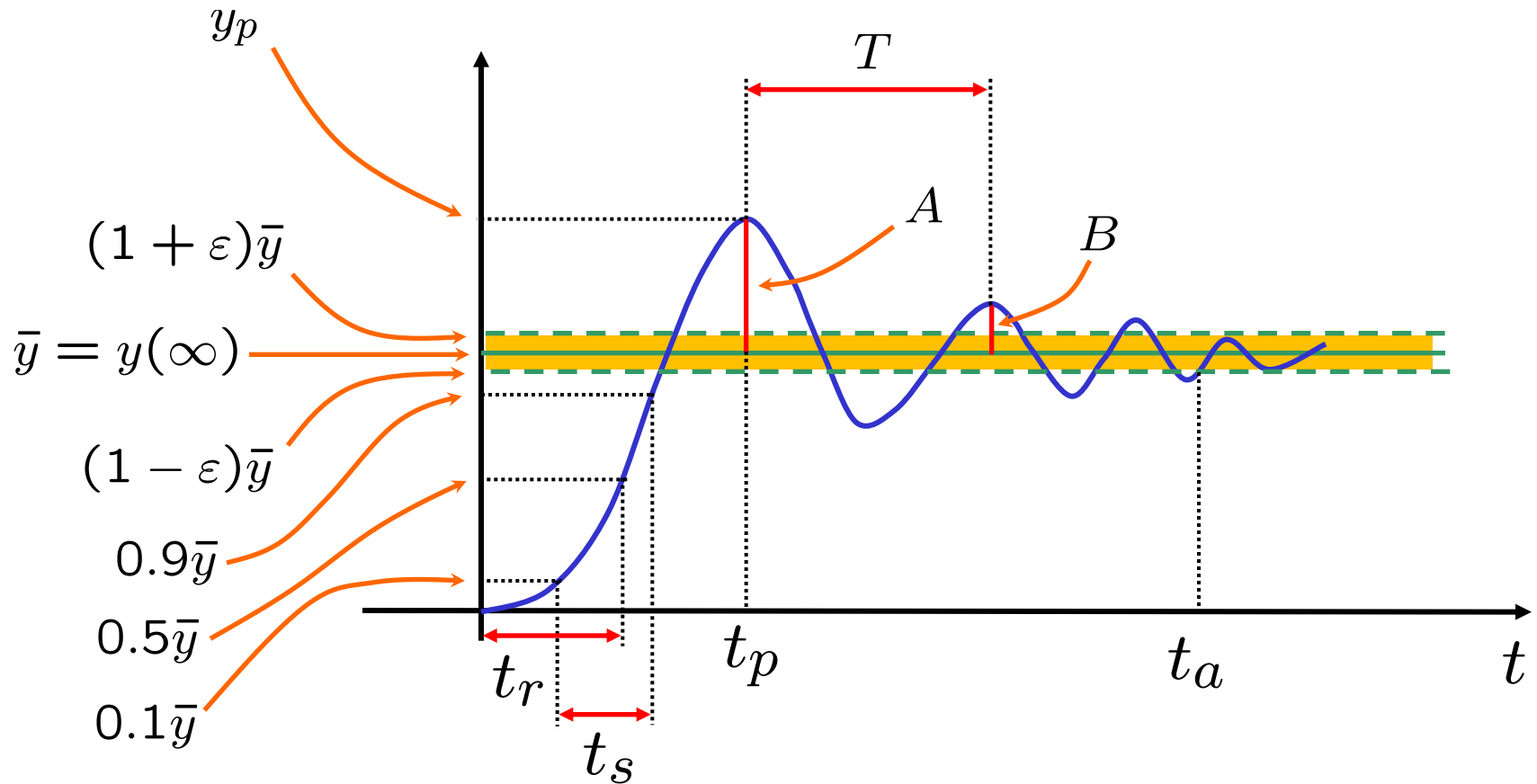
Risposta alla rampa =  $\int_0^t$  (risposta allo scalino)  $d\tau$

## - Risposta allo scalino: parametri caratteristici

- $\bar{y} = y(\infty)$  Valore di regime
- $t_a$  Tempo di assestamento
- $t_s$  Tempo di salita
- $t_r$  Tempo di ritardo
- $t_p$  Tempo di picco
- $y_p$  Valore di picco
- $A = y_p - y(\infty)$  Max sovraelongazione
- $\Delta = A/y(\infty)$  Max sovraelongazione relativa
- $T$  "Periodo" delle oscillazioni
- $B/A$  Fattore di smorzamento

# - Risposta allo scalino: parametri caratteristici

$$\varepsilon = 0.01$$





## - Risposta allo scalino: I ordine

**A)** 
$$G(s) = \frac{\mu}{1 + s\tau}$$

Strettamente proprio

**B)** 
$$G(s) = \frac{\mu(1 + sT)}{1 + s\tau}$$

Non strettamente proprio

$$\tau > 0$$

$$\mu > 0$$

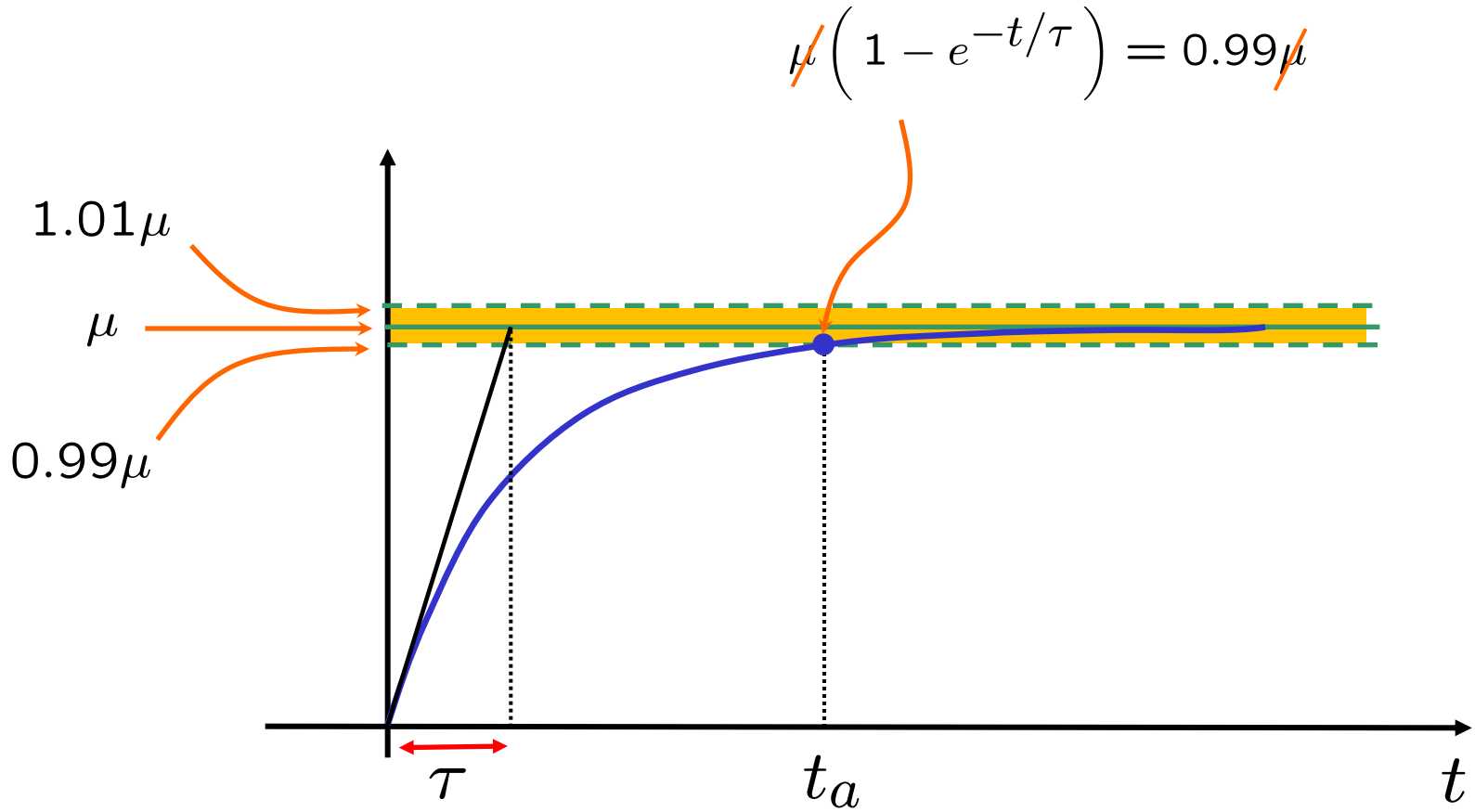
(As. Stabile)

A)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ G(s) \frac{1}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\mu}{s(1 + s\tau)} \right]$$


$$= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\mu}{s} - \frac{\mu\tau}{1 + s\tau} \right]$$


$$= \mu \left( 1 - e^{-t/\tau} \right), \quad t \geq 0$$





## - Calcolo tempo di assestamento

$$1 - e^{-t/\tau} = 0.99$$

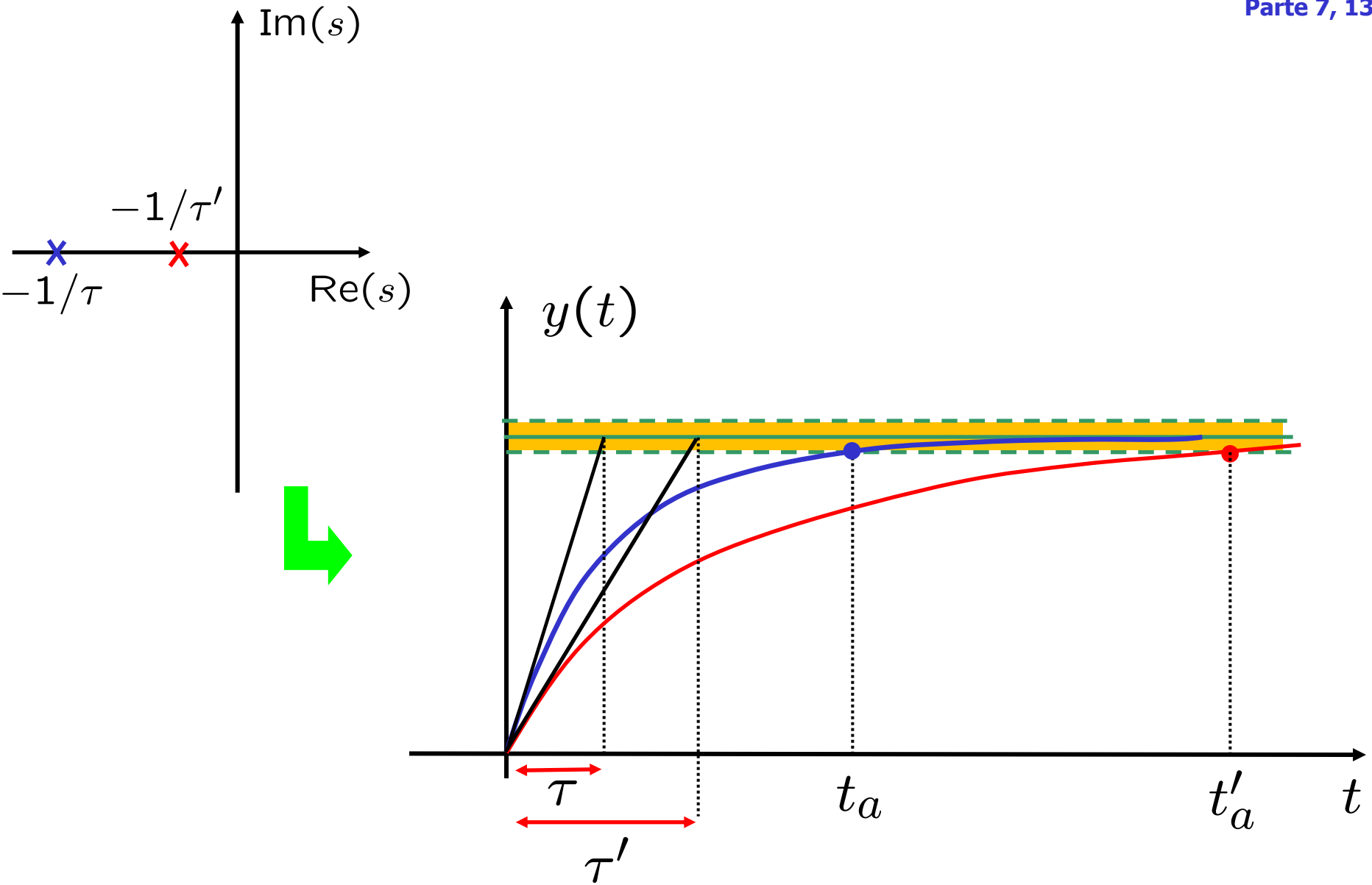

$$e^{-t/\tau} = 0.01$$


$$e^{t/\tau} = 100$$


$$t/\tau = \ln 100$$


$$t_a = \tau \ln 100 \simeq 5\tau$$

Esercizio a casa: calcolare  $t_s$ ,  $t_r$



**B)**

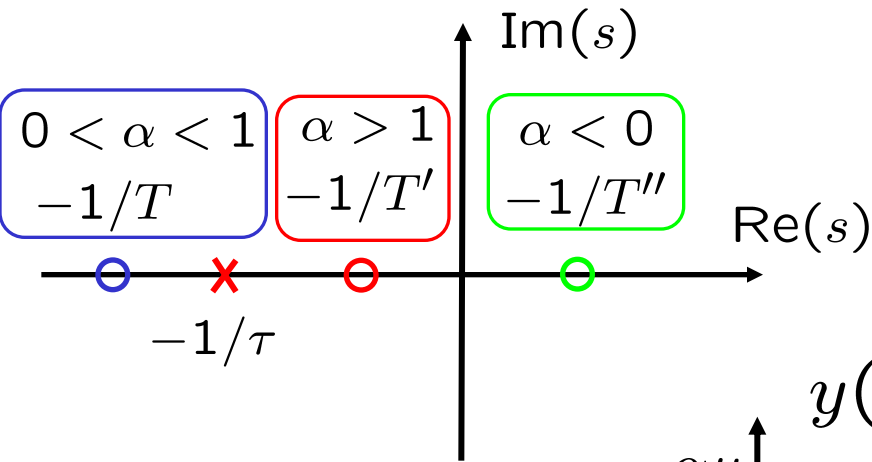
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ G(s) \frac{1}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\mu(1 + sT)}{s(1 + s\tau)} \right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\mu}{s} + \frac{\mu(T - \tau)}{1 + s\tau} \right]$$

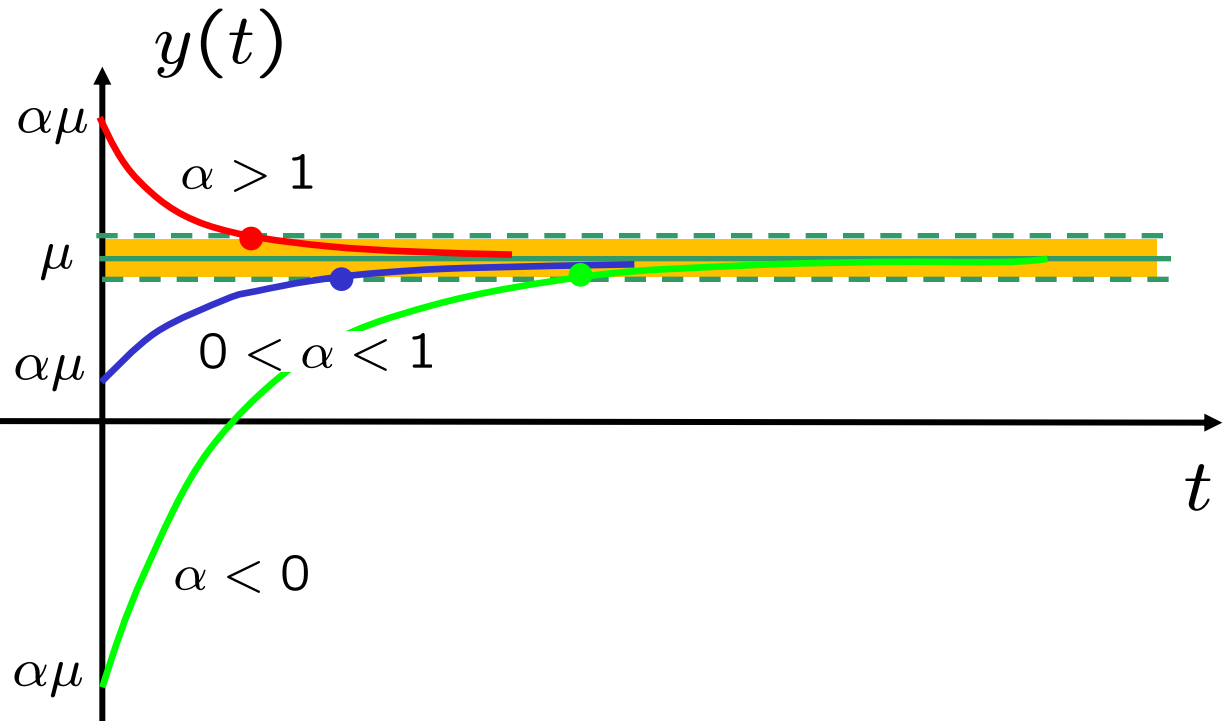
$$= \mu \left( 1 + \frac{T - \tau}{\tau} e^{-t/\tau} \right), \quad t \geq 0$$

**N.B.**  $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \mu \frac{T}{\tau} \neq 0$

Poniamo:  $T = \alpha\tau \longrightarrow y(t) = \mu \left[ 1 + (\alpha - 1)e^{-t/\tau} \right], \quad t \geq 0$



In prima appross:  $t_a \simeq 5\tau$



## - Risposta allo scalino: II ordine

$$\mathbf{A)} \quad G(s) = \frac{\mu}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$$

Poli reali senza zeri

$$\mathbf{B)} \quad G(s) = \frac{\mu(1 + sT)}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$$

Poli reali con zero

$$\mathbf{C)} \quad G(s) = \frac{\varrho}{(s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega)}$$

Poli complessi senza zeri

$$\mathbf{D)} \quad G(s) = \frac{\varrho(1 + sT)}{(s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega)}$$

Poli complessi con zero



$$\mathbf{A)} \quad G(s) = \frac{\mu}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$$

$$\tau_1 \neq \tau_2$$

$$\tau_1 > 0$$

$$\tau_2 > 0$$

} Asintotica stabilita`

Per esempio poniamo:  $\tau_1 > \tau_2$

$$\mu > 0$$


$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ G(s) \frac{1}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\mu}{s(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)} \right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{A}{s} + \frac{B}{1 + s\tau_1} + \frac{C}{1 + s\tau_2} \right]$$

$$A = \frac{\mu}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)} \Big|_{s=0} = \mu$$

$$B = \frac{\mu}{s(1 + s\tau_2)} \Big|_{s=-1/\tau_1} = \frac{\mu}{-\frac{1}{\tau_1} \left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_1}\right)} = \frac{\mu\tau_1^2}{\tau_2 - \tau_1}$$

$$C = \frac{\mu}{s(1 + s\tau_1)} \Big|_{s=-1/\tau_2} = \frac{\mu}{-\frac{1}{\tau_2} \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2}\right)} = \frac{\mu\tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2}$$



$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\mu}{s} + \frac{\frac{\mu\tau_1^2}{\tau_2 - \tau_1}}{1 + s\tau_1} + \frac{\frac{\mu\tau_2^2}{\tau_1 - \tau_2}}{1 + s\tau_2} \right]$$

$$= \mu \left( 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2} \right), \quad t \geq 0$$

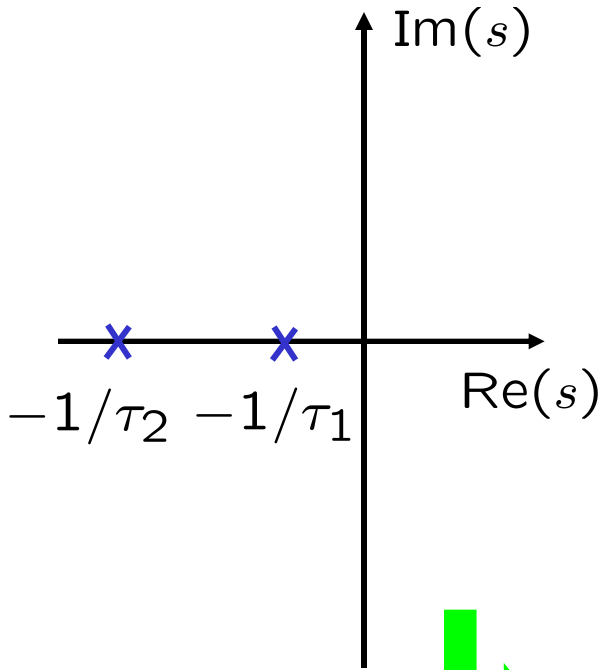
Alcune caratteristiche:

$$y(\infty) = \mu > 0$$

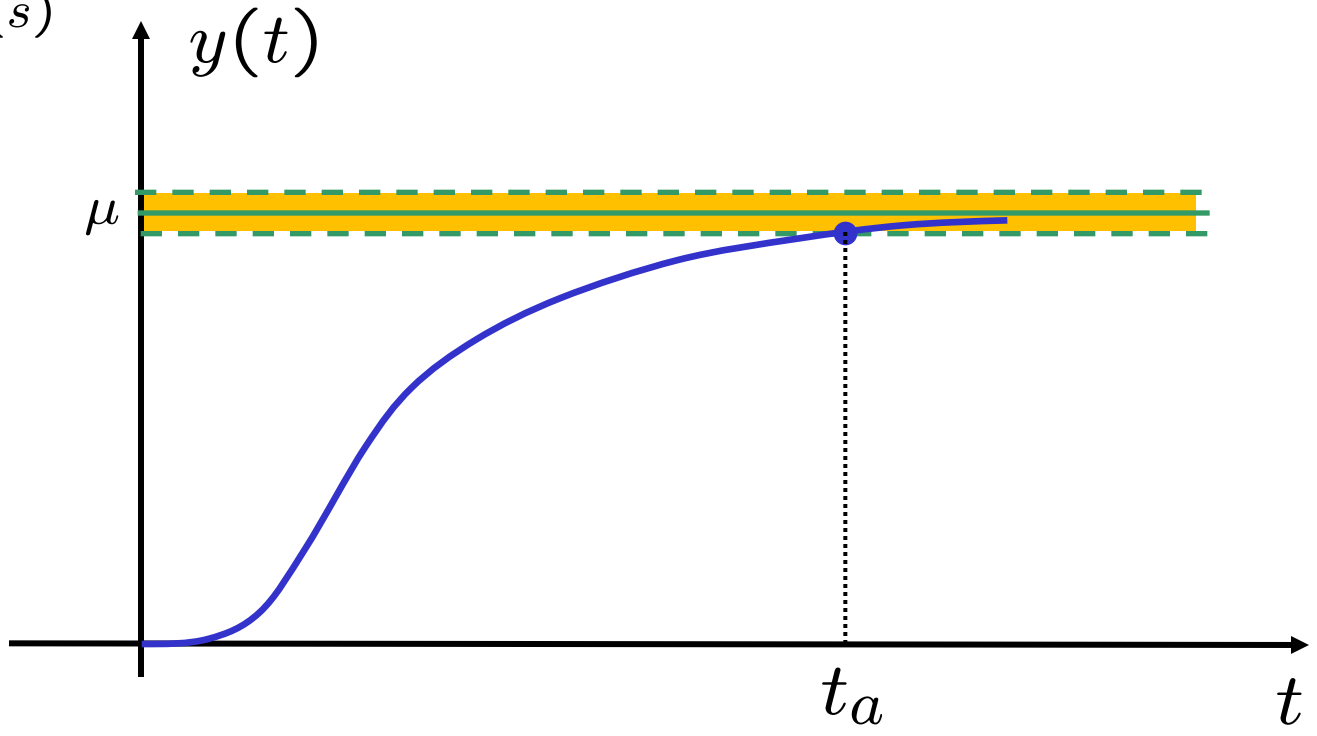
$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$\ddot{y}(0) = \frac{\mu}{\tau_1\tau_2} > 0$$



$t_a = ?$



Curva monotona crescente, con flesso

- Se  $\tau_1 \gg \tau_2$

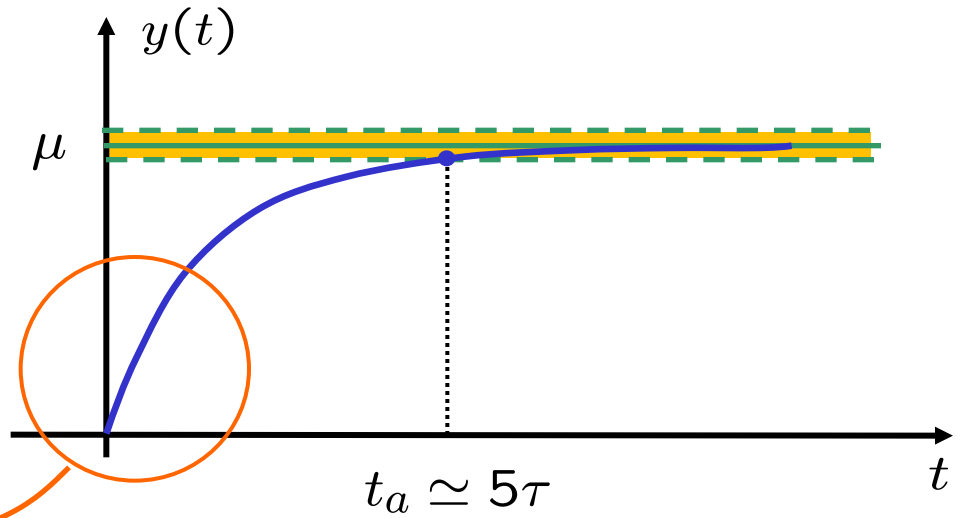
$$\begin{aligned} \rightarrow y(t) &= \mu \left( 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2} \right), \quad t \geq 0 \\ &\simeq \mu \left( 1 - e^{-t/\tau_1} \right), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow$  In prima approx:  $t_a \simeq 5\tau_1$

In generale, in assenza di zeri, i poli piu` influenti sull'andamento qualitativo della risposta sono quelli vicini all'asse immaginario

**- Riepilogando:**

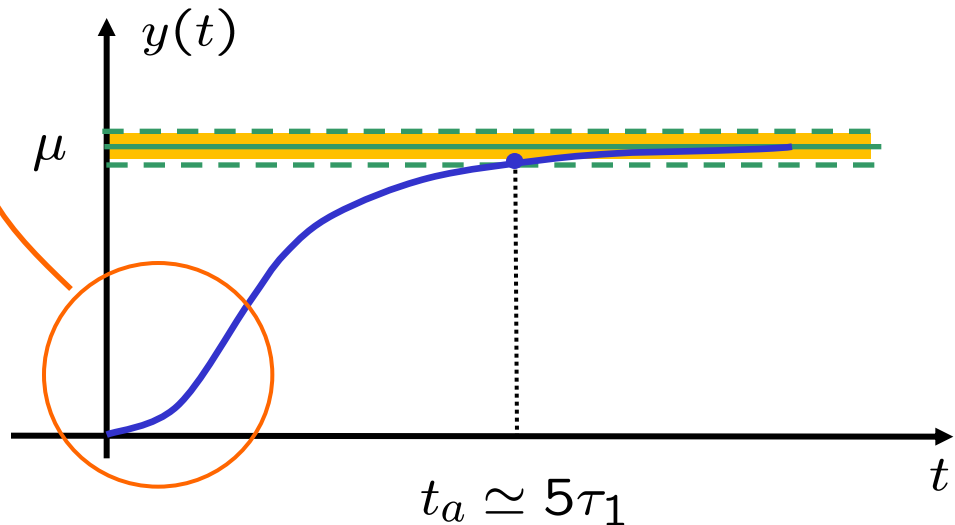
$$G(s) = \frac{\mu}{1 + s\tau}$$



A parita` di tempo di assestamento e` diverso il tempo di salita, ovvero la velocita` di risposta

$$G(s) = \frac{\mu}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$$

$$\tau_1 \gg \tau_2$$



$$\mathbf{B)} \quad G(s) = \frac{\mu(1 + sT)}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}$$

$$\tau_1 \neq \tau_2$$

$$\tau_1 > 0$$

$$\tau_2 > 0$$

} Asintotica stabilita`

Per esempio poniamo:  $\tau_1 > \tau_2$

$$\mu > 0$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ G(s) \frac{1}{s} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\mu(1 + sT)}{s(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)} \right]$$


$$= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{A}{s} + \frac{B}{1 + s\tau_1} + \frac{C}{1 + s\tau_2} \right]$$

$$A = \frac{\mu(1 + sT)}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)} \Big|_{s=0} = \mu$$

$$B = \frac{\mu(1 + sT)}{s(1 + s\tau_2)} \Big|_{s=-1/\tau_1} = \frac{\mu(1 - T/\tau_1)}{-\frac{1}{\tau_1}(1 - \frac{\tau_2}{\tau_1})} = \frac{\mu\tau_1(\tau_1 - T)}{\tau_2 - \tau_1}$$

$$C = \frac{\mu(1 + sT)}{s(1 + s\tau_1)} \Big|_{s=-1/\tau_2} = \frac{\mu(1 - T/\tau_2)}{-\frac{1}{\tau_2}(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2})} = \frac{\mu\tau_2(\tau_2 - T)}{\tau_1 - \tau_2}$$



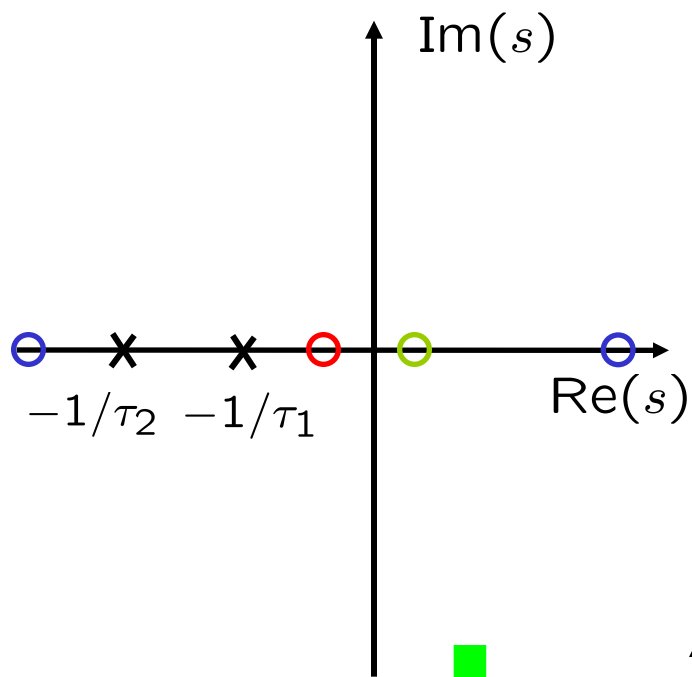

$$y(t) = \mu \left( 1 - \frac{\tau_1 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2 - T}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2} \right), \quad t \geq 0$$

Alcune caratteristiche:

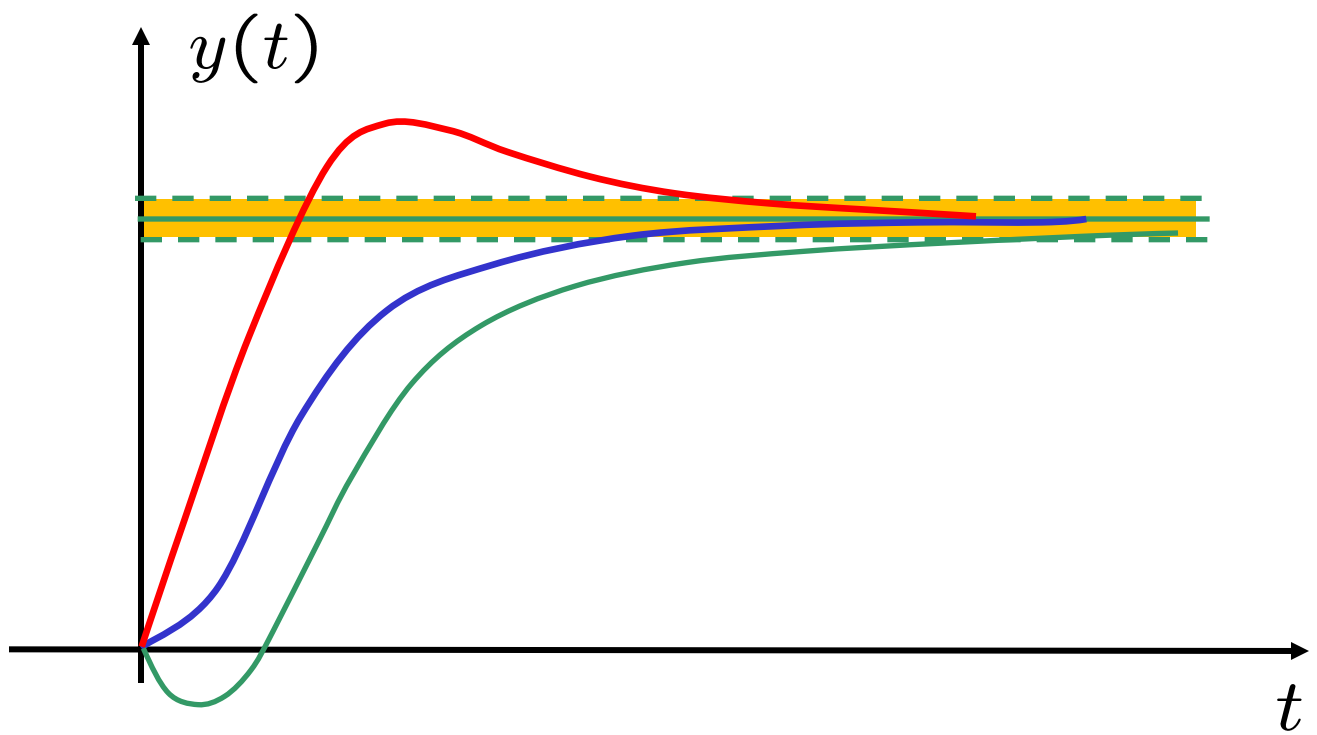
$$y(\infty) = \mu > 0$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = \frac{\mu T}{\tau_1 \tau_2} > 0, \quad \text{se } T > 0$$
$$< 0, \quad \text{se } T < 0$$



- zero approx irrilevante
- sovraelongazione
- sottoelongazione



$$\mathbf{c)} \quad G(s) = \frac{\varrho}{(s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega)}$$

$$\mu = G(0) = \frac{\varrho}{\sigma^2 + \omega^2}$$

Poli:  $-\sigma \pm j\omega$

$\sigma > 0$     asintotica stabilita`

$\omega > 0$

$\varrho > 0$


$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2}$$

$$\rightarrow As^2 + 2A\sigma s + A\sigma^2 + A\omega^2 + Bs^2 + Cs = \rho$$

$$\rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 2A\sigma + C = 0 \\ A(\sigma^2 + \omega^2) = \rho \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{\rho}{\sigma^2 + \omega^2} = \mu \\ B = -\mu \\ C = -2\sigma\mu \end{cases}$$

$$\rightarrow Y(s) = \mu \left[ \frac{1}{s} - \frac{s + 2\sigma}{s^2 + 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2} \right] = \mu \left[ \frac{1}{s} - \frac{s + \sigma + \sigma}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} \right]$$

$$= \mu \left[ \frac{1}{s} - \frac{s + \sigma}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} - \frac{\sigma}{\omega} \frac{\omega}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} \right]$$



$$y(t) = \mu \left[ 1 - e^{-\sigma t} \cos(\omega t) - \frac{\sigma}{\omega} e^{-\sigma t} \sin(\omega t) \right], \quad t \geq 0$$

$$= \mu \left[ 1 - e^{-\sigma t} \left( \cos(\omega t) + \frac{\sigma}{\omega} \sin(\omega t) \right) \right], \quad t \geq 0$$

Oscillazioni smorzate

Alcune caratteristiche:

$$y(\infty) = \mu > 0$$

$$y(0) = 0$$

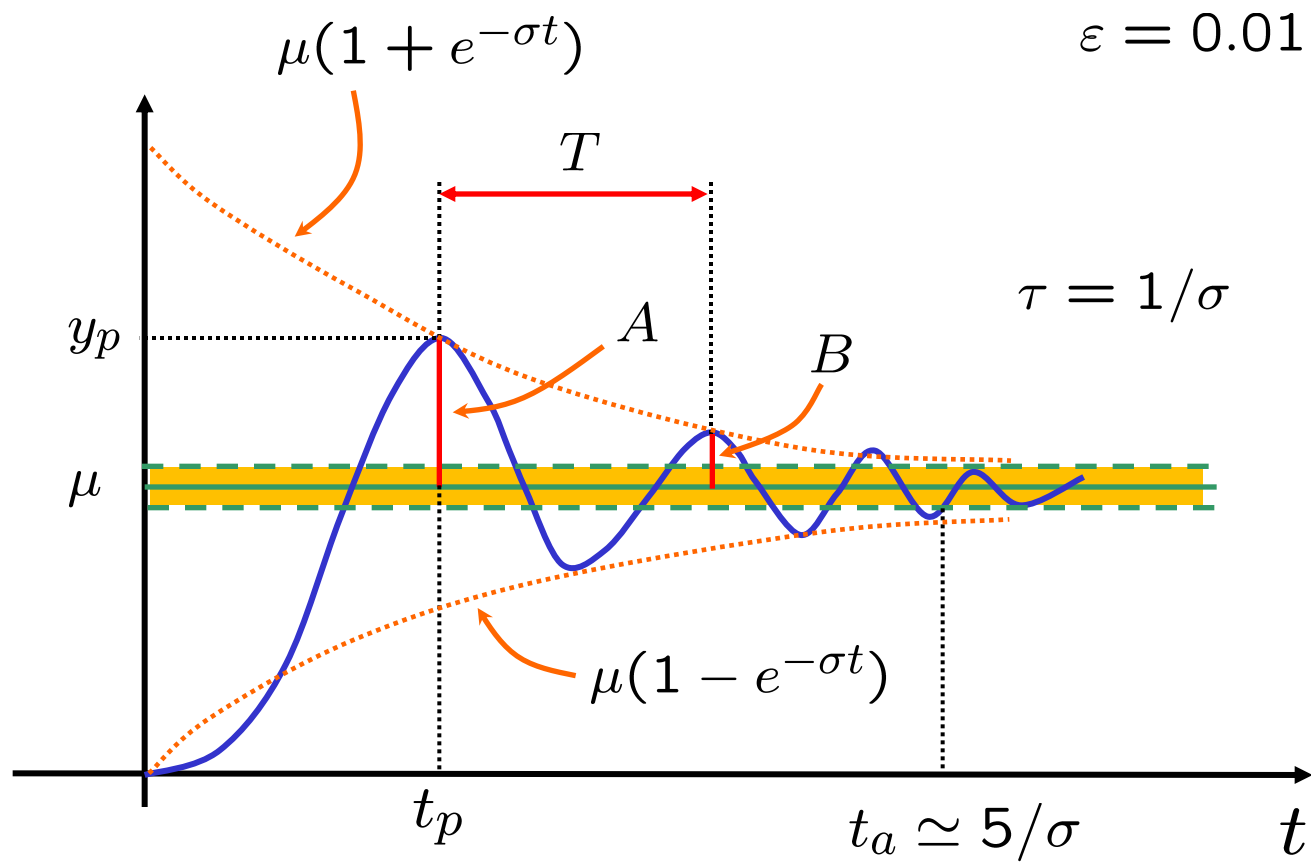
$$\dot{y}(0) = 0$$

$$\ddot{y}(0) = \rho > 0$$

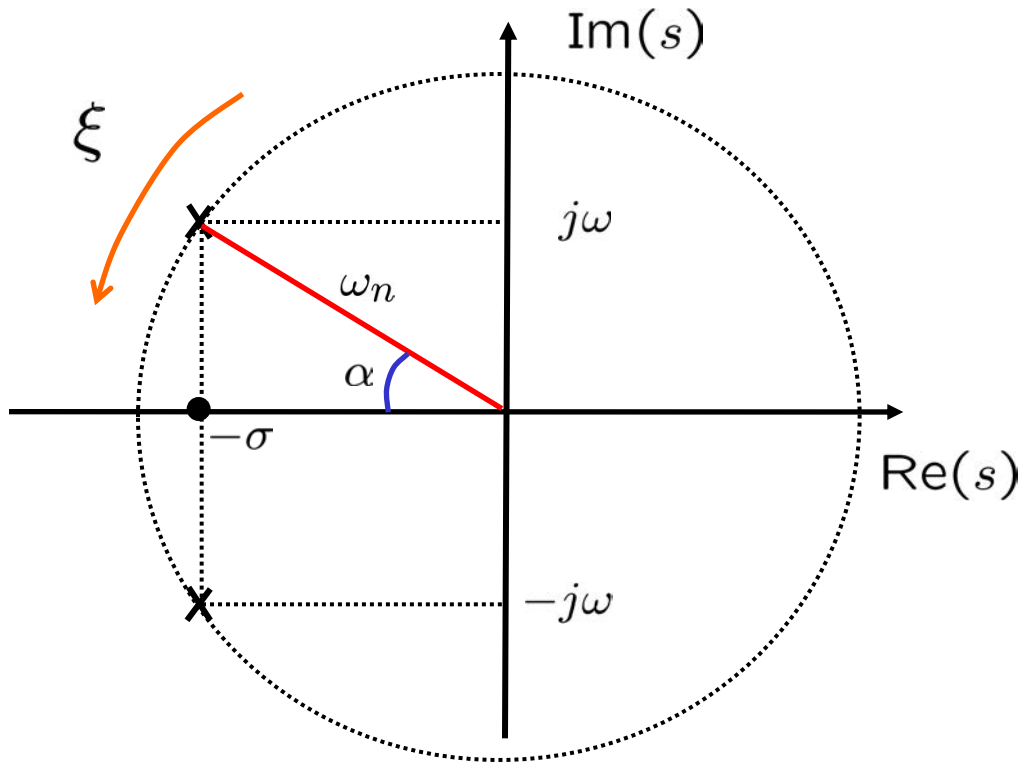
Per esercizio dimostrare che si può riscrivere la risposta così :

$$y(t) = \mu \left[ 1 - \frac{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}{\omega} e^{-\sigma t} \sin(\omega t + \varphi) \right], \quad t \geq 0$$

Dove:  $\varphi = \arccos \left( \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} \right)$



## - Diversa parametrizzazione



$$\omega_n^2 = \sigma^2 + \omega^2$$

$$\omega_n \xi = \sigma$$

$$\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = \omega$$

$\omega_n$

Pulsazione naturale

$$\cos \alpha = \xi$$

Smorzamento

$$0 \leq \xi \leq 1$$



$$G(s) = \frac{\rho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$



## - Espressione della FdT

$$G(s) = \frac{\rho}{(s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega)} = \frac{\rho}{(s + \sigma)^2 + \omega^2}$$

$$= \frac{\rho}{s^2 + \underbrace{2\sigma s}_{2\xi\omega_n} + \underbrace{\sigma^2 + \omega^2}_{\omega_n^2}} = \frac{\rho}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \frac{\rho/\omega_n^2}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2} = \frac{\mu}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2}$$

dove  $\mu := \frac{\rho}{\omega_n^2}$

## - Parametri caratteristici

- $t_a \simeq \frac{5}{\sigma} = \frac{5}{\xi\omega_n}$

- $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$

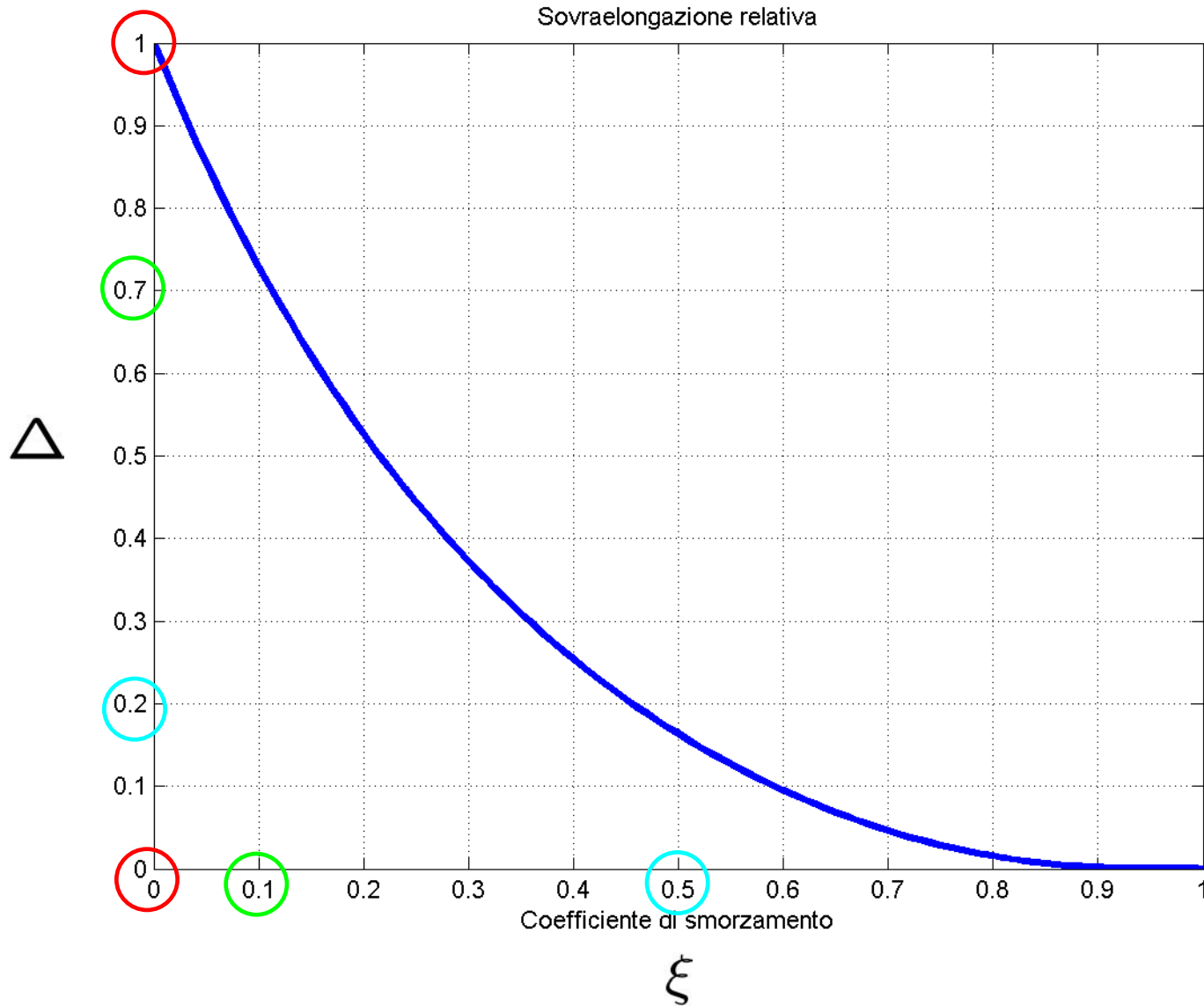
- $t_p = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$

- $y_p = \mu \left[ 1 + e^{-\frac{\sigma\pi}{\omega}} \right] = \mu \left[ 1 + e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \right]$

- $\Delta = \frac{A}{\mu} = e^{-\sigma\pi/\omega} = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

- $\frac{B}{A} = \dots = \Delta^2 = e^{-2\sigma\pi/\omega} = e^{-\frac{2\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

Dipendono solo da  $\xi$   
e non da  $\omega_n$



## - Casi limite

- $\xi = 0$        $G(s) = \frac{\rho}{s^2 + \omega_n^2}$       Poli:  $\pm j\omega_n$



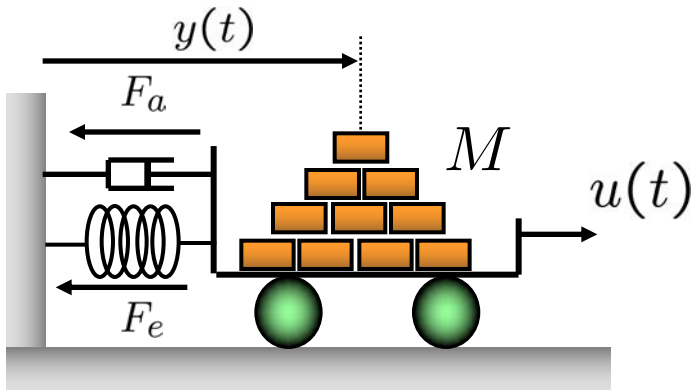
Oscillazioni non smorzate

- $\xi = 1$        $G(s) = \frac{\rho}{(s + \omega_n)^2}$       Poli:  $-\omega_n, -\omega_n$



Assenza di oscillazioni

# - Esempio 1



$$\mu = G(0) = \frac{1}{k}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$\Delta = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$G(s) = \frac{1}{Ms^2 + hs + k}$$

$$= \frac{1/M}{s^2 + \frac{h}{M}s + \frac{k}{M}}$$

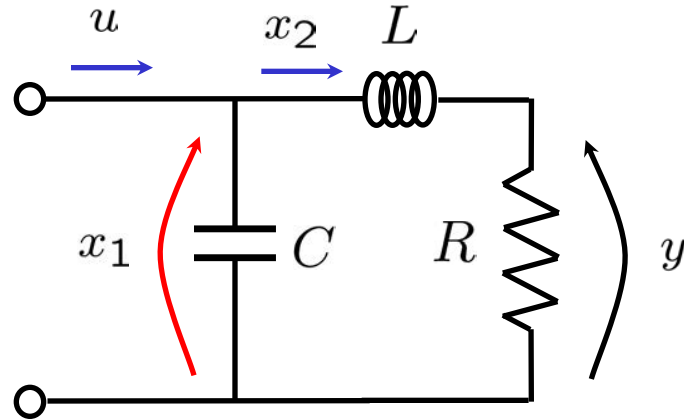
$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$2\xi\omega_n = \frac{h}{M} \quad \omega_n^2 = \frac{k}{M}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

$$\xi = \frac{h}{2\sqrt{kM}}$$



**- Esempio 2**

$$\begin{cases} C\dot{x}_1 = u - x_2 \\ L\dot{x}_2 = x_1 - Rx_2 \\ y = Rx_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & -1/C \\ 1/L & -R/L \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad R]$$

$$\rightarrow G(s) = [0 \quad R] \begin{bmatrix} s & 1/C \\ -1/L & s + R/L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix} = \dots = \frac{R/(LC)}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

$$\rightarrow \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \mu = R$$

D)

$$G(s) = \frac{\mu(1 + sT)}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{1}{\omega_n^2}s^2}$$

$$0 < \xi < 1$$

$$\omega_n > 0$$

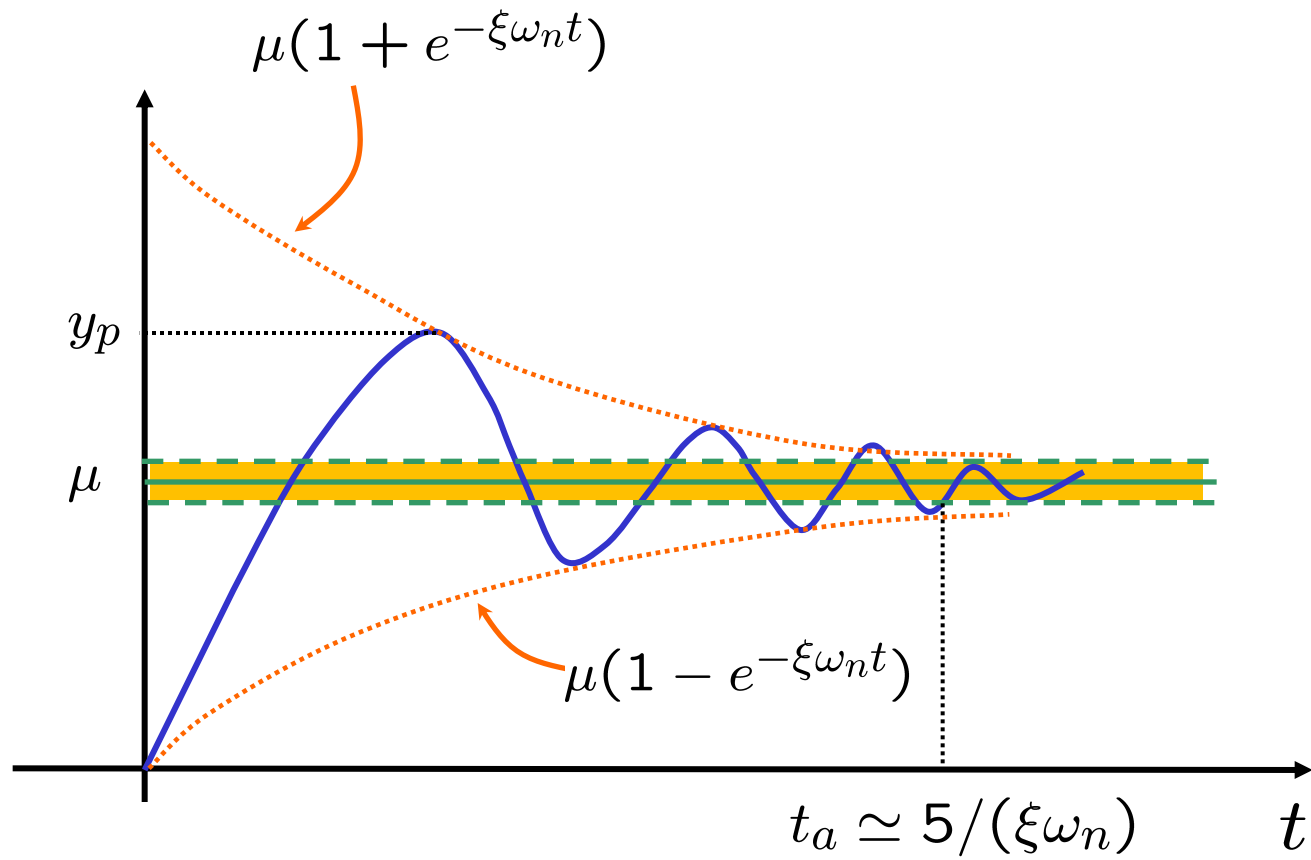
$$\mu > 0$$

Alcune caratteristiche della risposta:

$$y(\infty) = \mu > 0$$

$$y(0) = 0$$

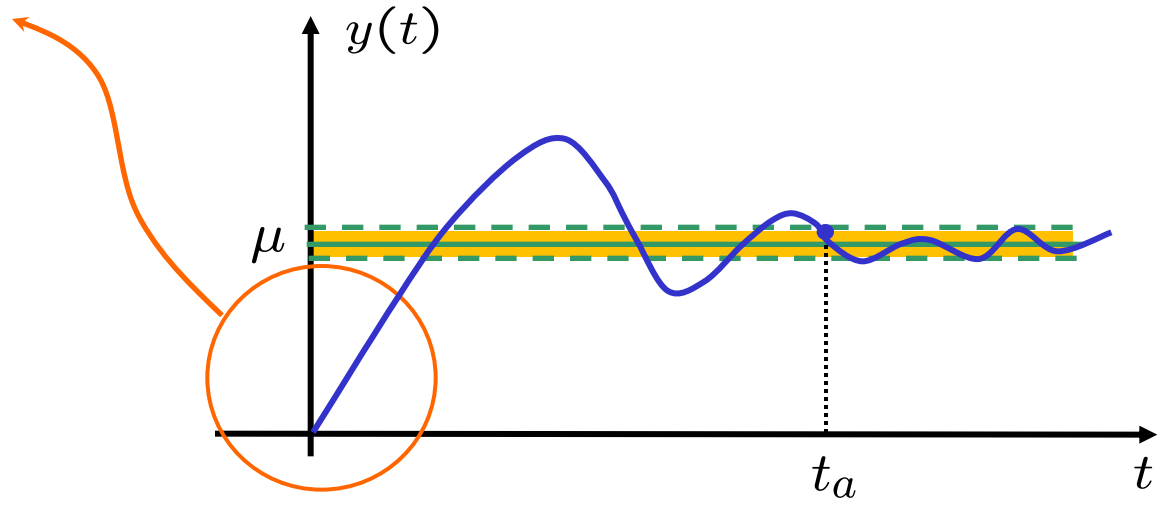
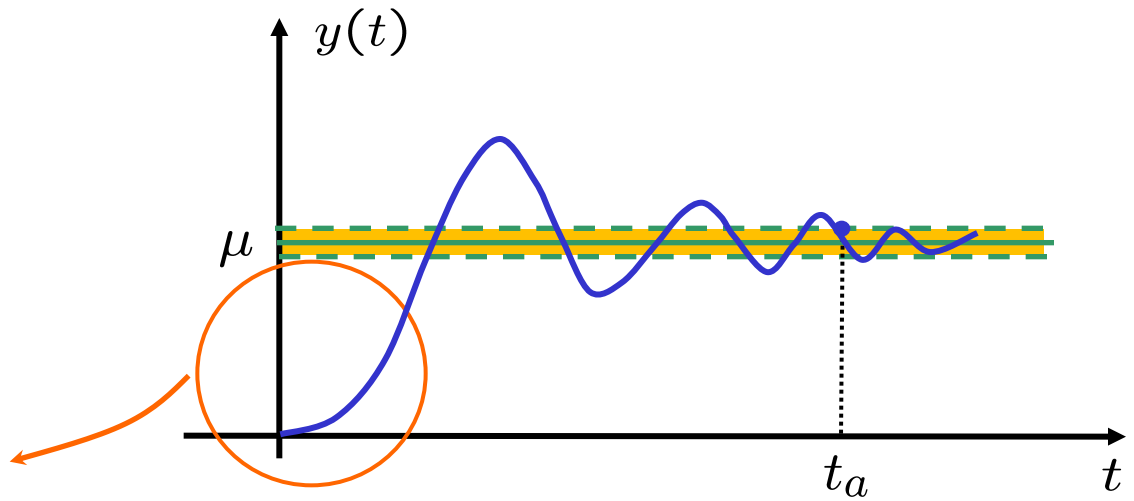
$$\dot{y}(0) = \mu T \omega_n^2 \begin{cases} > 0, & \text{se } T > 0 \\ < 0, & \text{se } T < 0 \end{cases}$$





- Confrontando C) e D):

A parità di tempo di assestamento e' diverso il tempo di salita, ovvero la velocita' di risposta



## - Risposta allo scalino – Ordine > 2

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_{i=1}^m (1 + sT_i)}{\prod_{i=1}^n (1 + s\tau_i)}$$

As. stabilita`



Re (poli) < 0

$g \leq 0$

**salvo cancellazioni**

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ G(s) \frac{1}{s} \right]$$

## - Teo. valore iniziale

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \cancel{s} \frac{1}{\cancel{s}} G(s) \quad = 0, \quad \text{se } m < n$$

$$\neq 0, \quad \text{se } m = n$$

## - Teo. valore finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \cancel{s} \frac{1}{\cancel{s}} G(s) \quad = \mu, \quad \text{se } g = 0$$

$$= 0, \quad \text{se } g < 0$$

## - Approssimazione a poli dominanti

- Caso semplice – Poli reali distinti

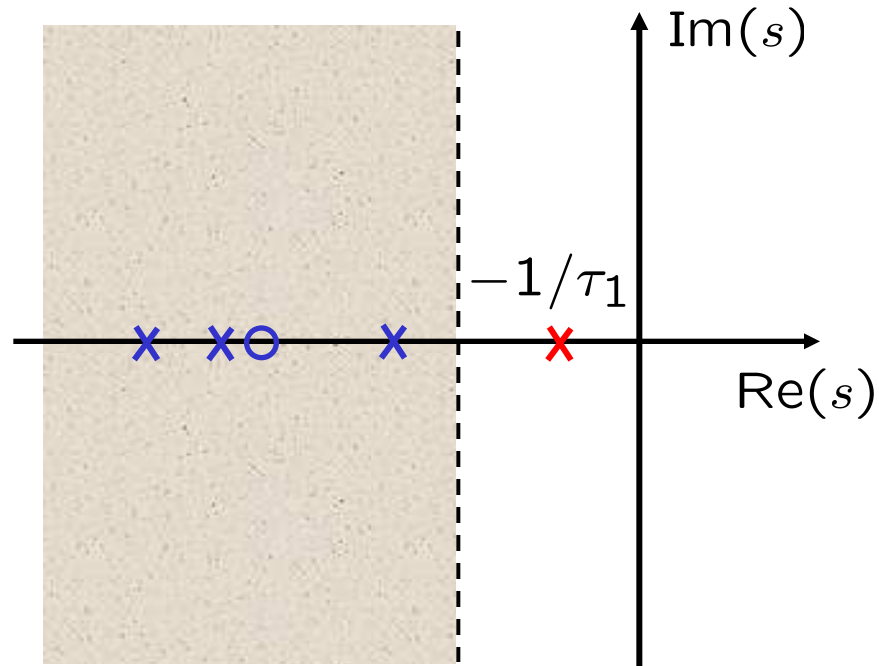
$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{\alpha_0}{s} + \frac{\alpha_1}{1 + s\tau_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{1 + s\tau_n}$$

$$\begin{aligned} \downarrow y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ G(s) \frac{1}{s} \right] \\ &= \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{\tau_n} e^{-t/\tau_n} \end{aligned}$$

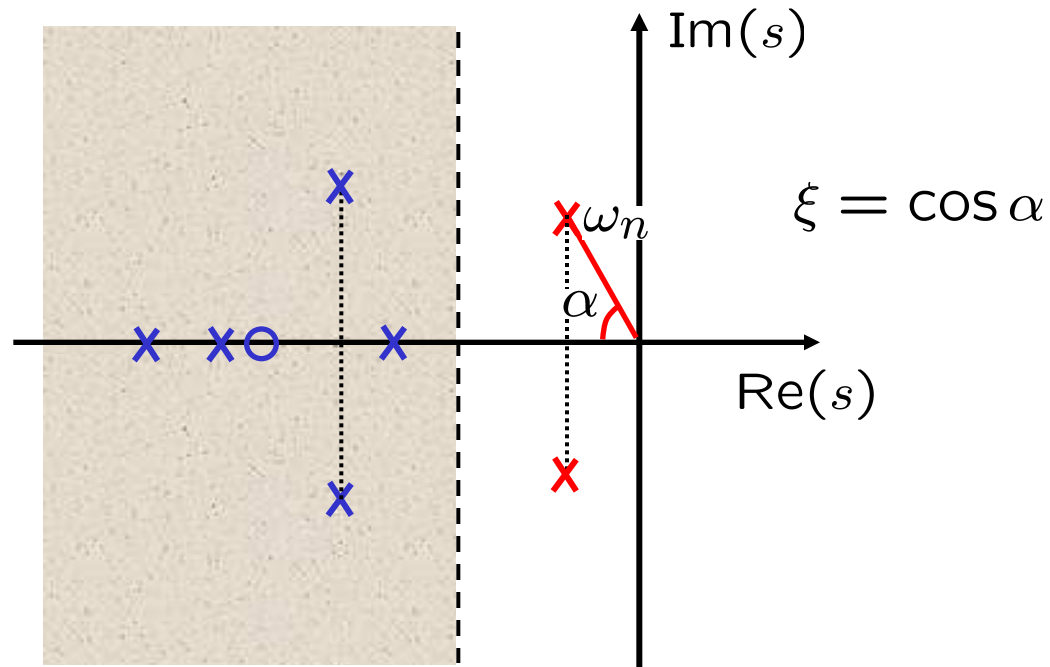
Se  $\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_n$

$$\begin{aligned} \downarrow y(t) &= \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{\tau_n} e^{-t/\tau_n} \\ &\simeq \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} \quad \text{componente dominante} \quad t_a \simeq 5\tau_1 \end{aligned}$$

## - Polo dominante reale



## - Poli dominanti complessi



- AVVERTENZA



Nell'approssimazione a poli dominanti e' necessario

- Tener conto di zeri "vicini" all'asse immaginario
- Conservare il guadagno  $\mu$

**- Esempio**

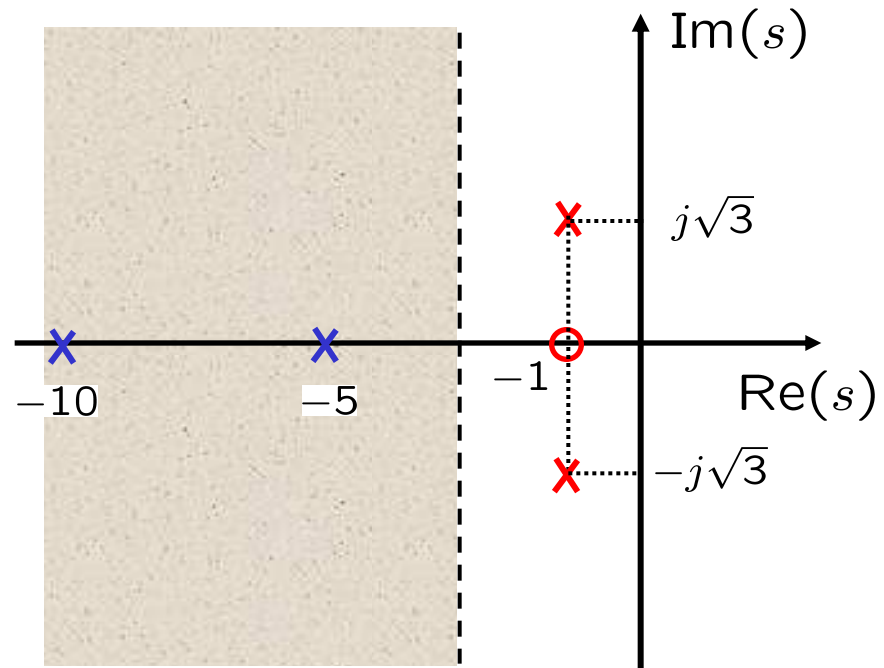
$$G(s) = \frac{400(1 + s)}{(1 + 0.2s)(1 + 0.1s)(s^2 + 2s + 4)}$$

$$\mu = G(0) = 100$$

Poli: -5  
-10

$$-1 \pm j\sqrt{3}$$

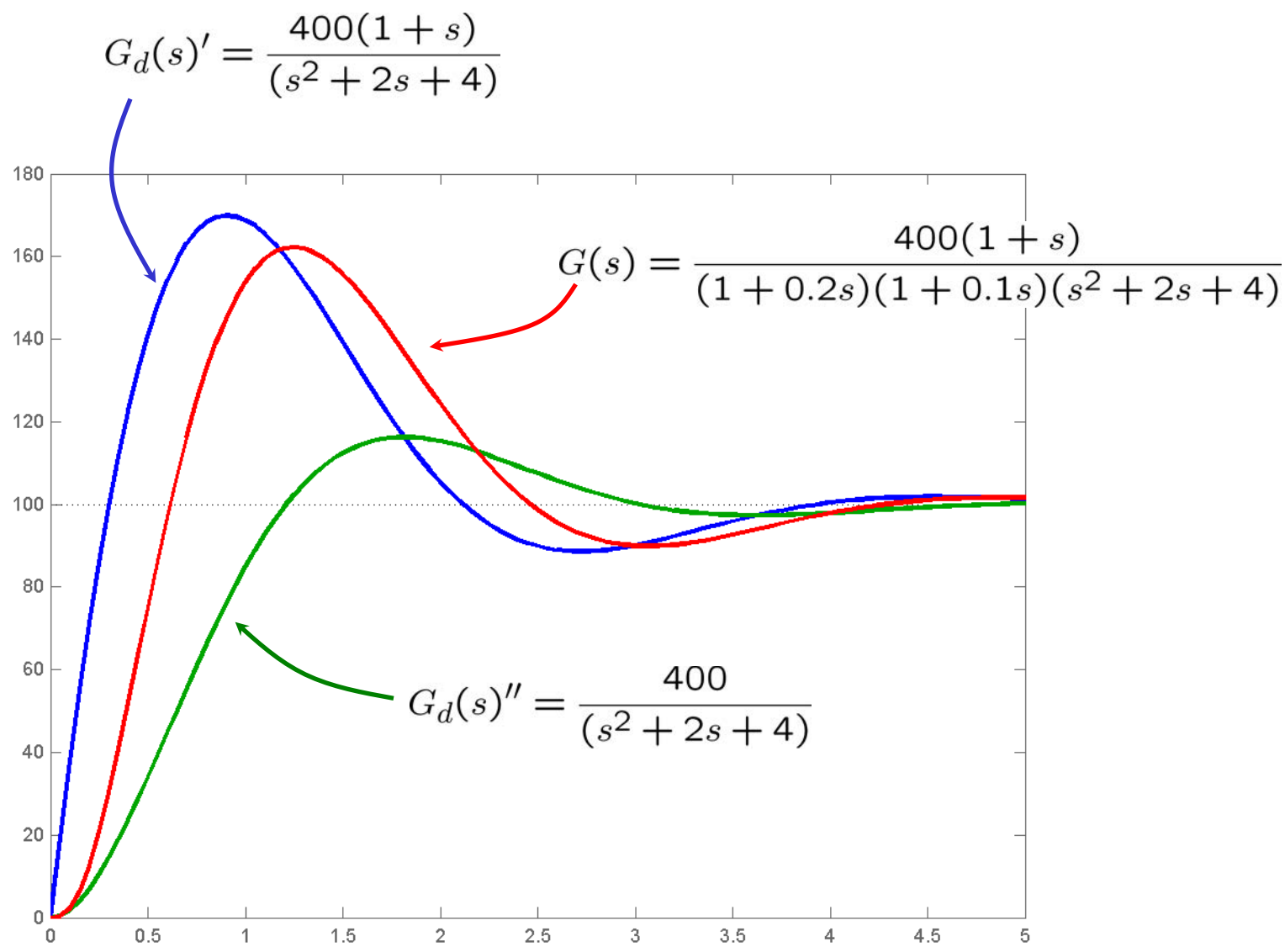
Zero: -1



$$\omega_n = 2$$

$$\xi = 1/2$$





## - Approssimazione a polo equivalente

–Hp: poli reali negativi

$$G(s) = \frac{\mu}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2) \cdots (1 + s\tau_n)} \quad \tau_i > 0$$

$$G_e(s) = \frac{\mu}{1 + s\tau_e}, \quad \tau_e := \sum_{i=1}^n \tau_i$$

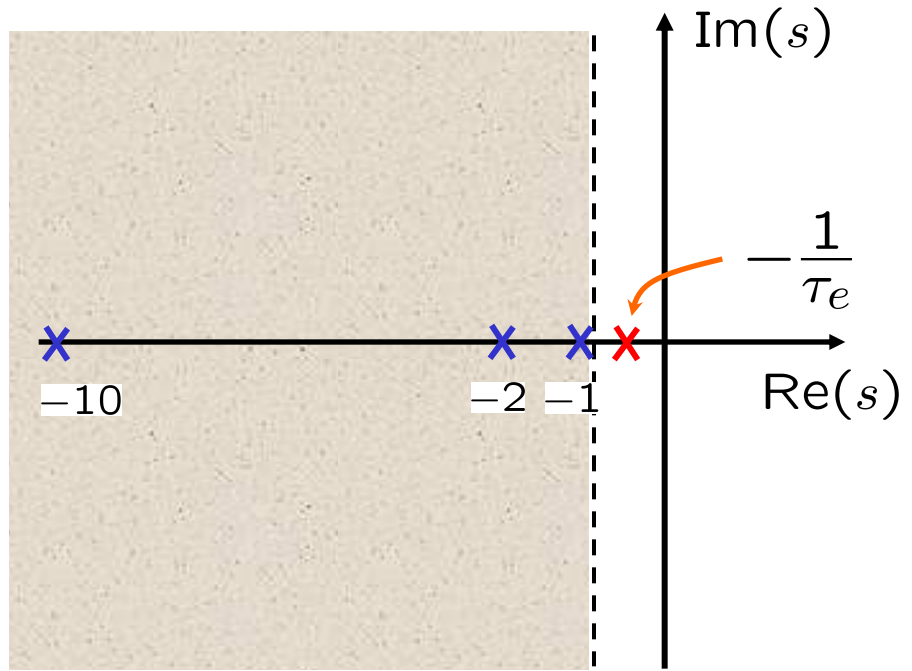
Componente dominante  $t_a \simeq 5\tau_e$

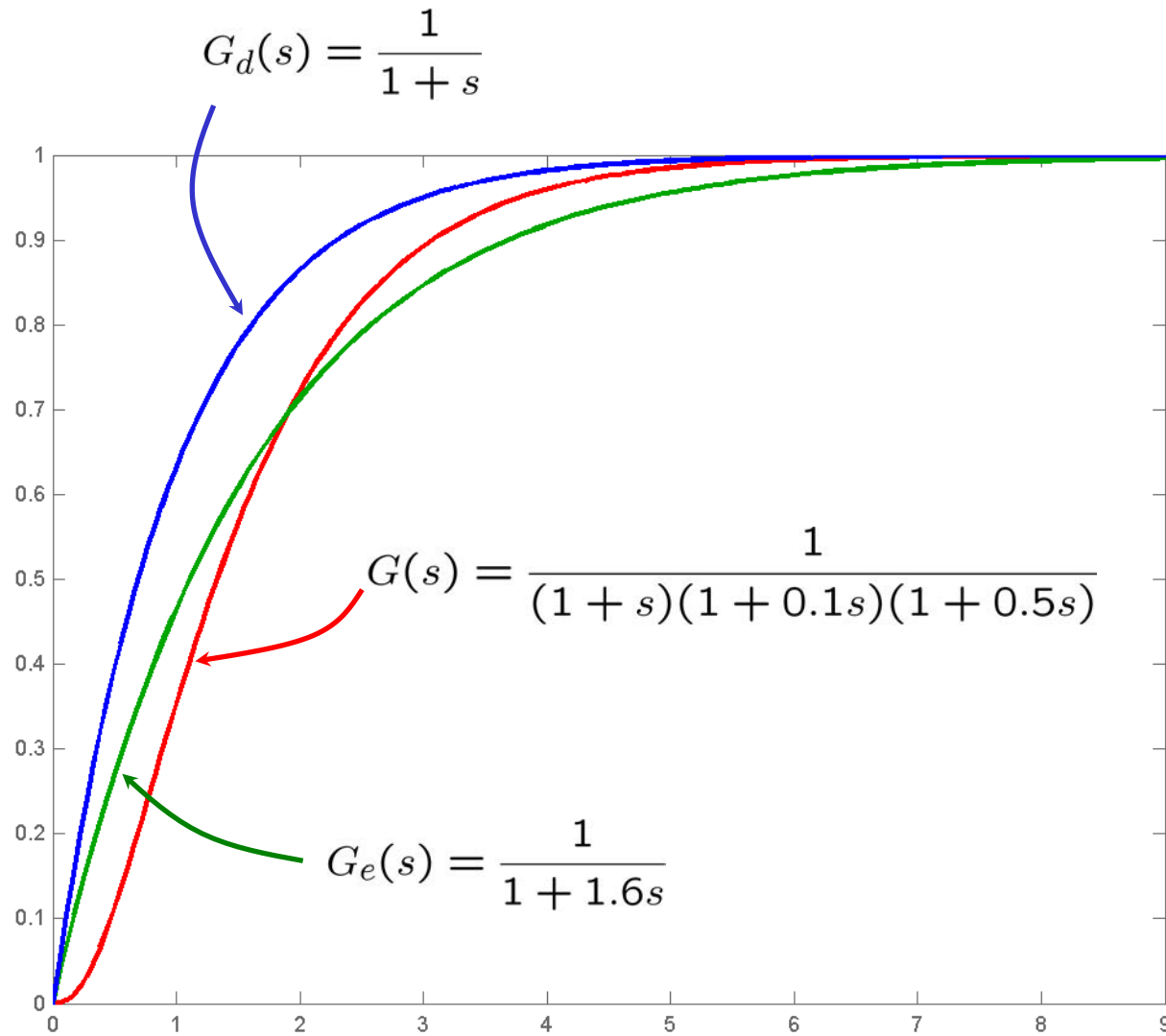
**- Esempio**

$$G(s) = \frac{1}{(1 + s)(1 + 0.1s)(1 + 0.5s)}$$

$\mu = G(0) = 1$

- Poli: -1  
 -2  
 -10

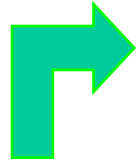




# Risposta allo scalino di sistemi LTI a tempo discreto

# Risposta allo scalino

$$x(0) = 0$$

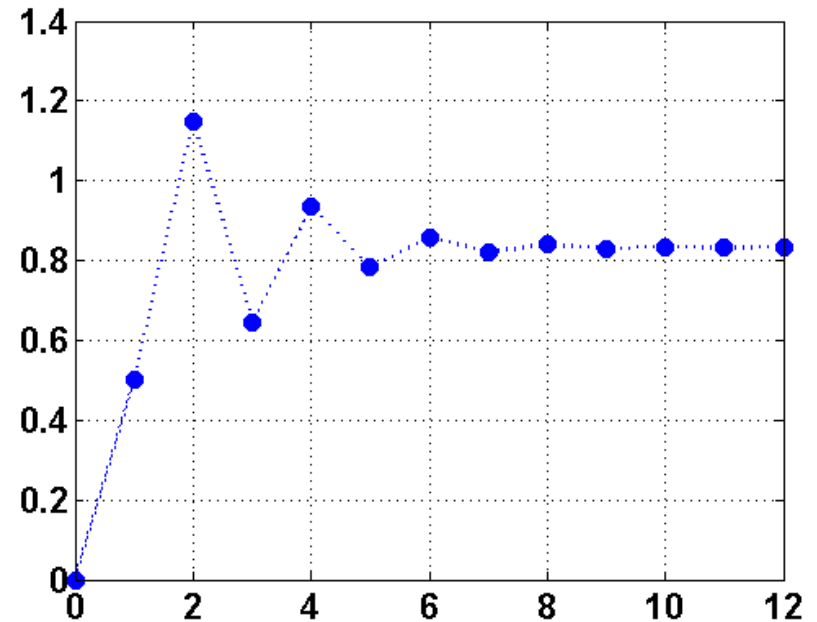
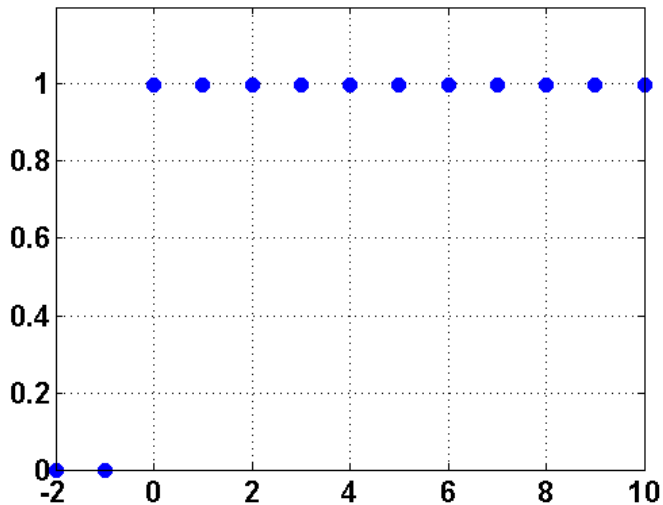


$$G(z)$$

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$



$$y(k) = ?$$

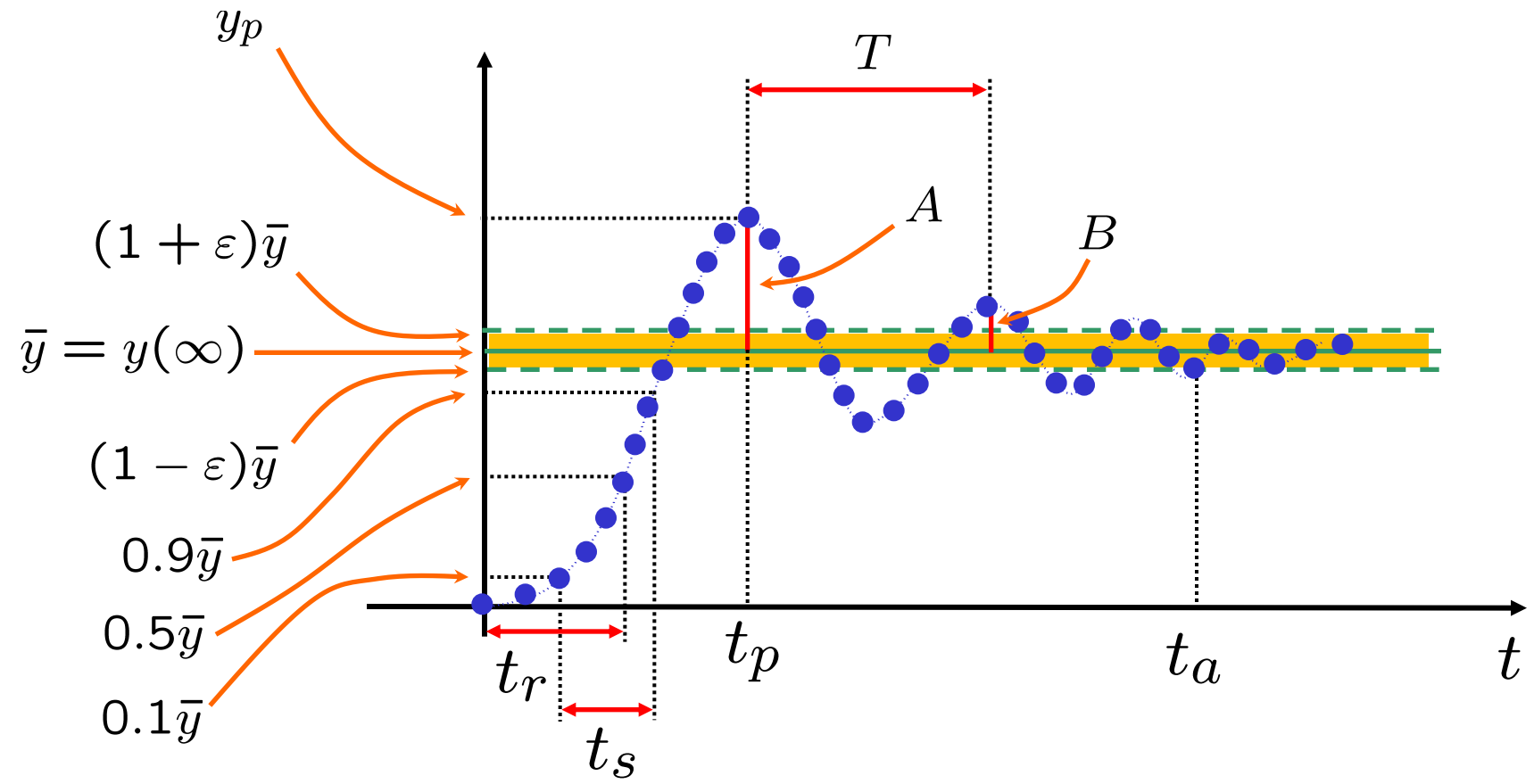


## - Risposta allo scalino: parametri caratteristici

- I **parametri** definiti in precedenza per la **risposta allo scalino unitario** di sistemi LTI a tempo continuo ( cfr. Parte 7, slide #7, 8) sono definibili allo stesso modo anche nel caso di sistemi LTI a tempo discreto (si veda la slide successiva).
- Tuttavia le **formule** trovate in precedenza (Parte 7, slide # 12 e 34) per calcolare (in modo esatto oppure approssimato) i valori di quei parametri nel caso di sistemi a tempo continuo **non sono applicabili ne' facilmente adattabili al caso a tempo discreto.**

# - Risposta allo scalino: parametri caratteristici

$\varepsilon = 0.01$





## Valore iniziale e finale

$$Y(z) = \frac{\beta_m z^m + \beta_{m-1} z^{m-1} + \dots + \beta_1 z + \beta_0}{\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0} \frac{z}{z-1}$$

### Valore iniziale

Uso il teorema del valore iniziale

$$y(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\beta_m z^m + \beta_{m-1} z^{m-1} + \dots + \beta_1 z + \beta_0}{\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0} \frac{z}{z-1}$$

$$= \begin{cases} 0 & , m < n \\ \frac{\beta_m}{\alpha_n} & , m = n \end{cases}$$

Iterando il procedimento posso calcolare anche i campioni successivi 

Nell' ipotesi che sia  $m < n$ , si arriva così al risultato seguente

$$y(k) = \begin{cases} 0 & , k < n - m - 1 \\ \frac{\beta_m}{\alpha_n} & , k = n - m \end{cases}$$

Il numero dei campioni nulli iniziali della risposta allo scalino prende il nome di **tempo di latenza**

$$n - m \triangleq \text{tempo di latenza}$$

Il tempo di latenza è pari al **grado relativo della FdT** (cioè alla differenza di grado tra polinomio a denominatore e polinomio a numeratore della stessa).

## Valore finale

Supponendo **verificate le ipotesi** di applicabilità, utilizzo il teorema del valore finale

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)^g} \gamma \frac{\prod_i (z - z_i)}{\prod_i (z - p_i)} \frac{\prod_i (z^2 - 2\delta_i \cos(\zeta_i) z + \delta_i^2)}{\prod_i (z^2 - 2\rho_i \cos(\vartheta_i) z + \rho_i^2)}$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) Y(z) \right] = \begin{cases} \mu = y(\infty) & , g = 0 \\ 0 = y(\infty) & , g < 0 \\ \infty & , g > 0 \end{cases}$$

In quest'ultimo caso il teorema non è applicabile! Perché? 

## Riassumendo

Utilizzando i teoremi del **valore iniziale** e del **valore finale** (quando applicabile) siamo in grado di determinare quantitativamente l'andamento della **risposta allo scalino** negli **istanti iniziali** (**tempo di latenza** ed istanti immediatamente successivi) ed il **valore di regime** della risposta (quindi la risposta a tempo lungo) allo scalino.

In realtà i due teoremi permettono di analizzare gli istanti iniziali ed il comportamento a tempo lungo della risposta di un sistema dinamico a tempo discreto asintoticamente stabile, qualsiasi sia l'ingresso applicato.

# Studio del transitorio

$$G(z) = \frac{N_G(z)}{D_G(z)} = \frac{N_G(z)}{\prod_i (z - p_i) \prod_h (z^2 - 2\rho_h \cos(\vartheta_h) z + \rho_h^2)}$$

Supponiamo che i poli siano tutti distinti,  $|p_i| < 1 \forall i$  e  $g = 0$ . Allora si ottiene

$$y(k) = \frac{N_G(1)}{D_G(1)} 1(k) + \sum_i P_i p_i^k + \sum_h 2|Q_h| \rho_h^k \cos(\vartheta_h k + \angle Q_h) 1(k)$$

$$P_i = \frac{N_G(p_i)}{(p_i - 1) \left. \frac{dD_G(z)}{dz} \right|_{z=p_i}}$$

$$Q_h = \frac{N_G(\rho_h e^{j\vartheta_h})}{(\rho_h e^{j\vartheta_h} - 1) \left. \frac{dD_G(z)}{dz} \right|_{z=\rho_h e^{j\vartheta_h}}}$$

$$y(k) = \underbrace{\mu 1(k)}_{\text{Regime permanente}} + \underbrace{\sum_i P_i p_i^k + \sum_h 2 |Q_h| \rho_h^k \cos(\vartheta_h k + \angle Q_h)}_{\text{transitorio}} 1(k)$$

La risposta allo scalino, nelle ipotesi adottate, possiede un **transitorio**, determinato sia dai poli reali che da quelli complessi coniugati della FdT, che **tende a svanire** al trascorrere del tempo  $k$ .

Esiste inoltre un termine di **regime**, dato da un **segnale a scalino** di ampiezza pari al guadagno statico della FdT.

# Sistemi del primo ordine

$$G(z) = \frac{\mu(1-p)}{z-p}, \quad p \neq 0$$

$$|p| < 1$$



$$y(k) = \mu(1-p^k) 1(k)$$

Se  $0 < p < 1$  la risposta è monotona, altrimenti è oscillante.

In ogni caso, la risposta raggiunge la condizione di regime tanto più velocemente quanto più è piccolo  $|p|$

Cfr. slide # 55

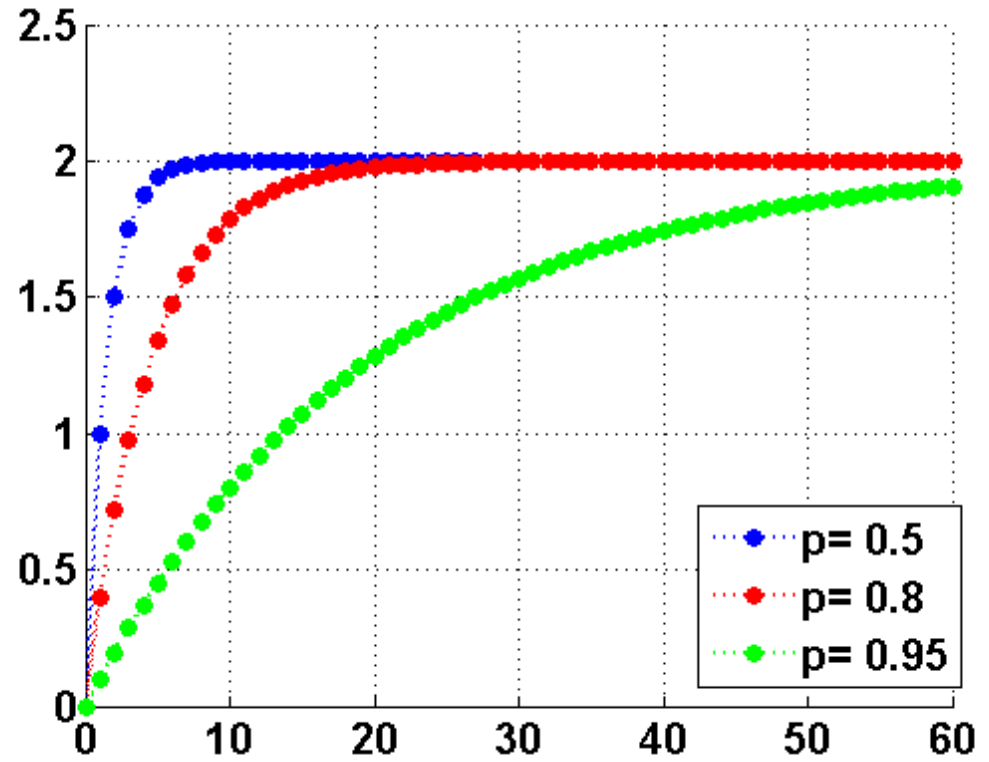
**Tempo di assestamento al  $(100-\varepsilon)\%$**

Il più piccolo numero intero che rispetta la relazione

$$k_{as} \geq \frac{\ln 0.01\varepsilon}{\ln |p|}$$

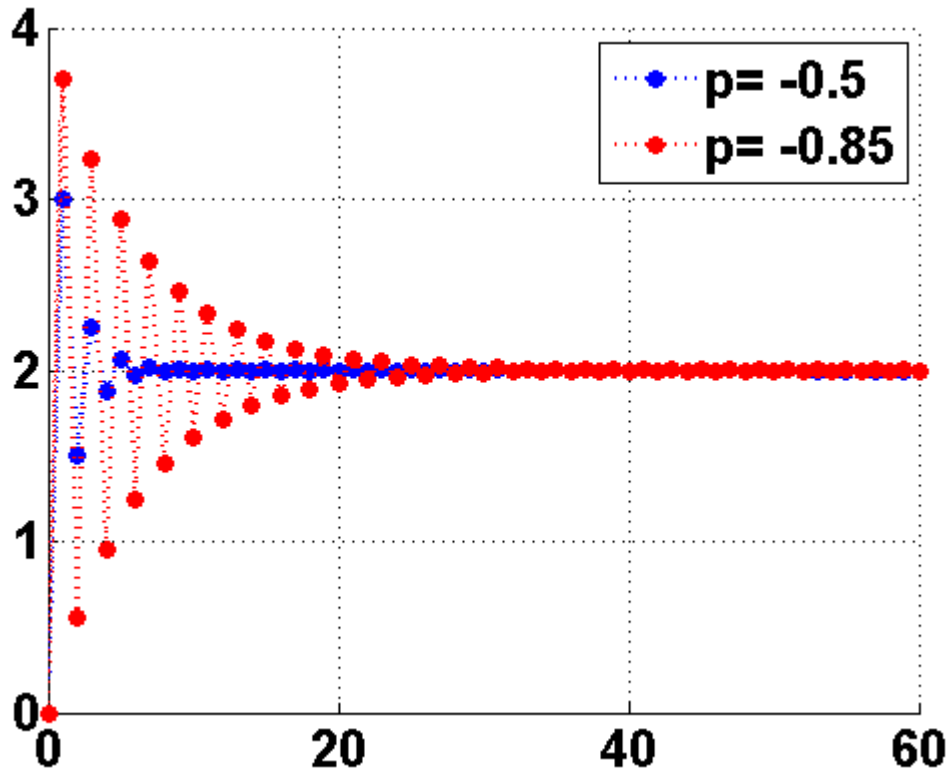
Risposta allo scalino del sistema del 1° ordine, al variare della posizione del polo.

$$0 < p < 1$$



- La risposta allo scalino in queste condizioni è sempre monotona crescente.
- Quanto più il polo si avvicina ad 1, tanto più lenta è la risposta del sistema.





Risposta allo scalino del sistema del 1° ordine, al variare della posizione del polo.

$$-1 < p < 0$$

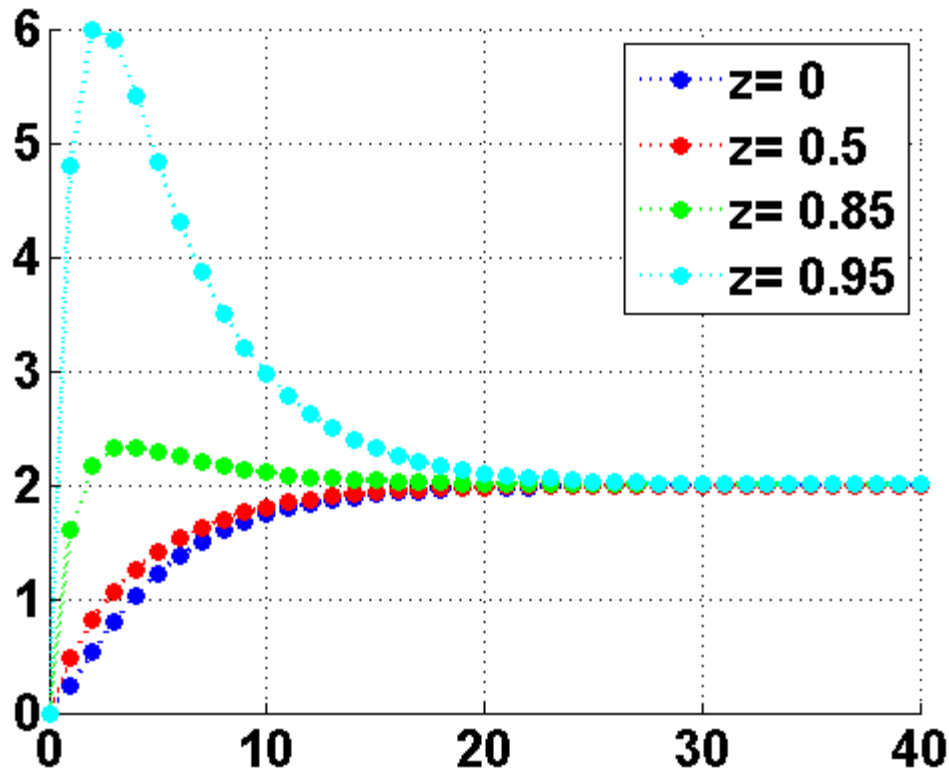
- La risposta allo scalino in queste condizioni è sempre oscillante, con campioni alternativamente sopra/sotto il valore di regime.
- Quanto più  $|p| \rightarrow 1$ , tanto più lenta è la risposta del sistema.

## Sistemi del secondo ordine: poli reali

$$G(z) = \frac{\mu(1 - p_1)(1 - p_2)}{1 - z_1} \frac{z - z_1}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

$$y(k) = \mu 1(k) + P_1 p_1^k 1(k) + P_2 p_2^k 1(k)$$

- L'andamento della risposta dipende dalla **posizione relativa** tra lo zero ed i due poli. Lo **zero** può **velocizzare** la risposta, oppure provocare **sovra/sotto-elongazioni**, oppure essere ininfluente a seconda della sua posizione rispetto ai due poli.
- Per il contributo dei poli valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per i sistemi del primo ordine.



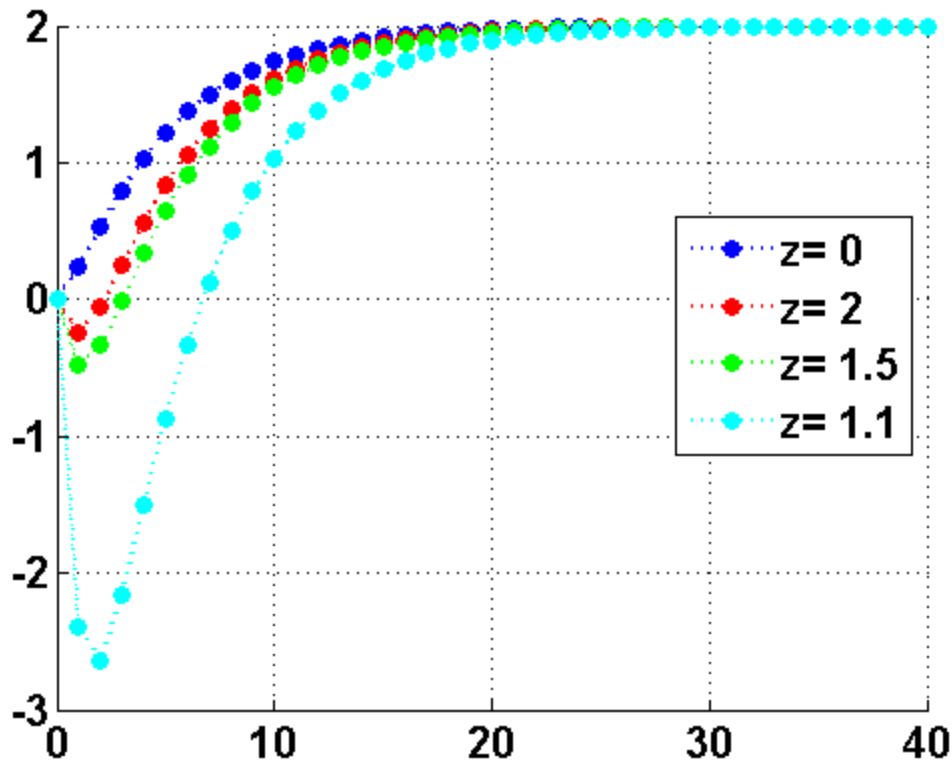
Risposta allo scalino del sistema del 2° ordine, al variare della posizione dello zero.

$$p_1 = 0.4$$

$$p_2 = 0.8$$

$$0 < z_1 < 1$$

- Se  $p_2 > p_1$  e  $z_1 < p_2$ , la risposta allo scalino è tanto più **veloce**, quanto più aumenta  $z_1$
- Per  $z_1 > p_2$  la risposta presenta una **sovraelongazione**, tanto più marcata quanto più  $z_1 \rightarrow 1$
- Per  $z_1 < p_1$ , la posizione dello zero diviene tanto **meno influente**, quanto più  $z_1 \rightarrow 0$



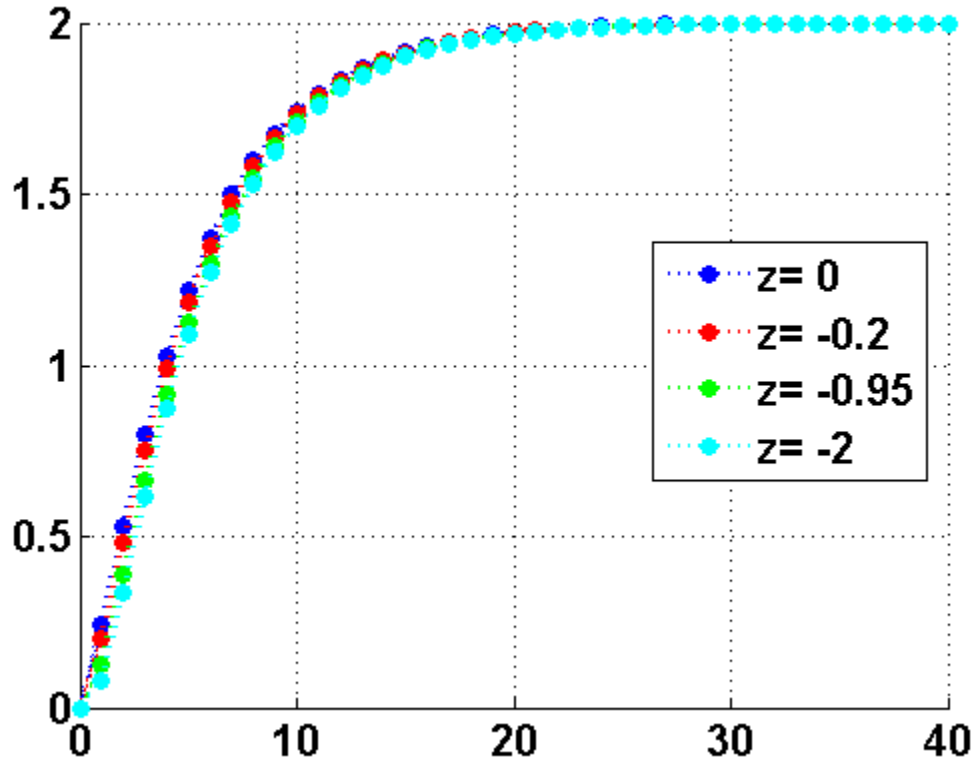
Risposta allo scalino del sistema del 2° ordine, al variare della posizione dello zero.

$$p_1 = 0.4$$

$$p_2 = 0.8$$

$$z_1 > 1$$

- Per  $z_1 > 1$  la risposta presenta una **sottoelongazione**, tanto più pronunciata quanto più  $z_1 \rightarrow 1$



Risposta allo scalino del sistema del 2° ordine, al variare della posizione dello zero.

$$p_1 = 0.4$$

$$p_2 = 0.8$$

$$z_1 < 0$$

- Per  $z_1 < 0$  lo zero è **sostanzialmente ininfluenza**, sia che abbia modulo inferiore o superiore all'unità. Il motivo è la “lontananza” dai poli “dominanti” del sistema.

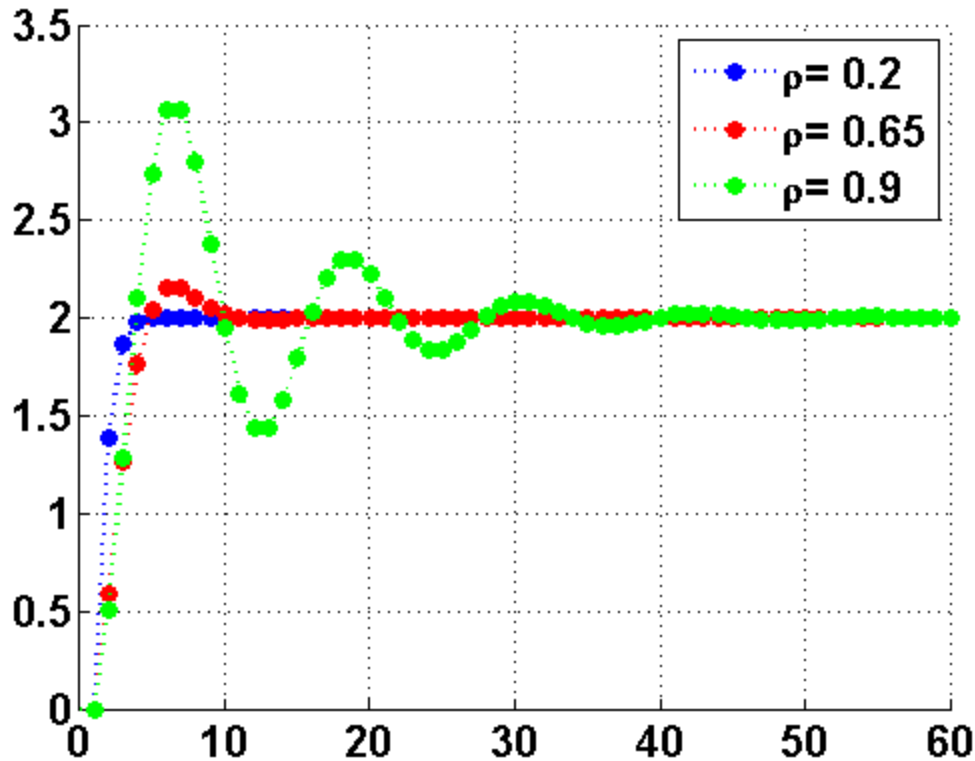
# Sistemi del secondo ordine: poli complessi coniugati

$$G(z) = \frac{\mu (1 - 2\rho \cos(\vartheta) + \rho^2)}{(z^2 - 2\rho \cos(\vartheta)z + \rho^2)}$$

$$p_{1,2} = \rho e^{\pm j\vartheta} \quad |p_{1,2}| = \rho < 1$$

$$y(k) = \mu 1(k) + 2|Q| \rho^k \cos(\vartheta k + \angle Q) 1(k)$$

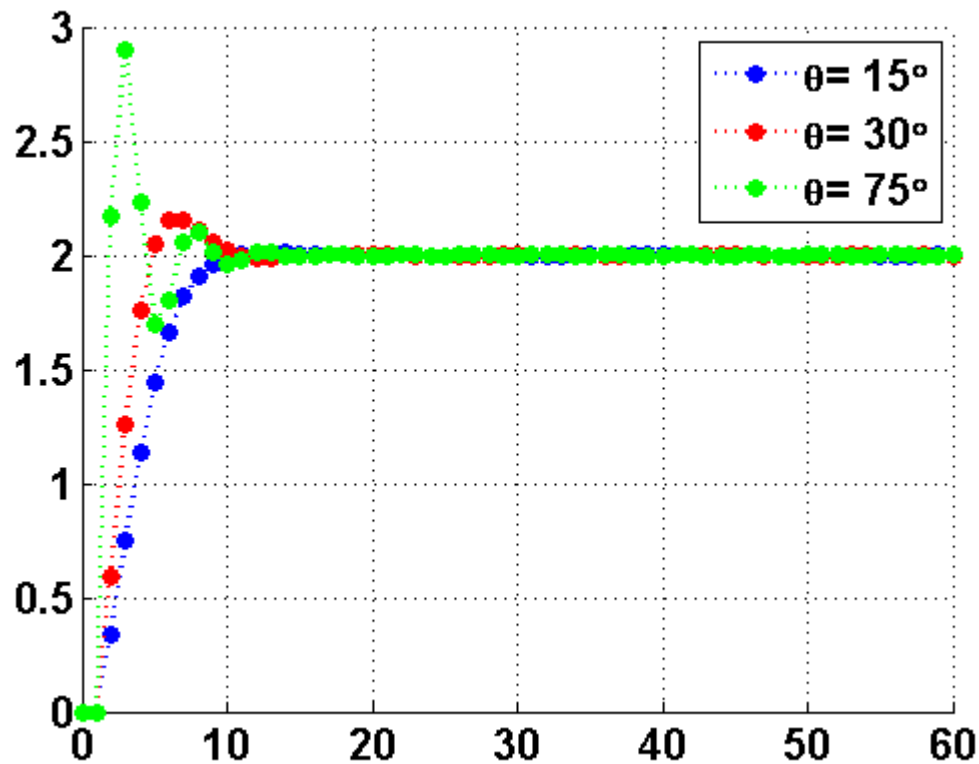
- Le **oscillazioni** sono **smorzate** (  $|\rho| < 1$  ) e modulate dal termine  $\rho^k$  .
- Il **tempo di assestamento** è tanto maggiore quanto più il modulo dei poli è prossimo ad 1.



Risposta allo scalino del sistema del 2° ordine, con due poli complessi coniugati, al variare del modulo dei poli  $\rho$ .

$$p_{1,2} = \rho e^{\pm j30^\circ}$$

- Al crescere del modulo  $\rho$  aumentano la sovralongazione ed il tempo di assestamento.



Risposta allo scalino del sistema del 2° ordine, con due poli complessi coniugati, al variare della fase dei poli  $\theta$ .

$$p_{1,2} = 0.65 e^{\pm j\theta}$$

- Al crescere della fase  $\theta$  aumenta la sovraelongazione.
- Il tempo d'assestamento rimane pressoché invariato.