

# **Studio di sistemi dinamici tramite FdT**

## **Risposta transitoria e risposta a regime**

## Alcune definizioni e richiami

- Consideriamo un **sistema LTI**, a tempo continuo oppure a tempo discreto, **asintoticamente stabile (as. s.)** (cfr. Parte 3, 4 e 6) e supponiamo che il sistema si trovi inizialmente nello stato nullo (**condizioni iniziali nulle**).
- Se si applica ora al sistema un **ingresso qualsiasi** (anche non limitato), che cosa si può dire dell'evoluzione dell'uscita del sistema in risposta a tale sollecitazione in ingresso?
- Cominciamo analizzando il caso dei sistemi a tempo continuo. Nel caso di sistemi a tempo discreto si potranno fare considerazioni analoghe.

# Sistema a tempo continuo as. s. : risposta transitoria e risposta a regime

- Consideriamo un **sistema a tempo continuo as. s. completamente descritto dalla funzione di trasferimento**

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

(cioè **non ci sono cancellazioni**) ed applichiamo al sistema un ingresso qualsiasi (anche non limitato)  $u(t)$  [ma che ammetta trasformata di Laplace razionale].

- Per la risposta (ancora in termini di trasformata di Laplace) vale che

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \cdot U(s)$$

- Ora, mettendo in evidenza nella scomposizione “in fratti semplici” della trasformata di Laplace della risposta  $Y(s)$  i termini associati a poli asintoticamente stabili, semplicemente stabili ed instabili si ottiene

$$\begin{aligned}
 y(t) = \mathcal{L}^{-1} & \left[ \sum_{i=1}^{n_{a.s.}} \frac{P_i}{s - p_i} \right] + \dots \\
 & + \mathcal{L}^{-1} \left[ \sum_{j=1}^{n_{s.s.}} \frac{Q_j}{s - p_j} \right] + \dots \\
 & + \mathcal{L}^{-1} \left[ \sum_{k=1}^{n_{inst.}} \frac{R_k}{s - p_k} \right]
 \end{aligned}$$

Contributo alla risposta dei poli as. stabili.

Contributo alla risposta dei poli sempl. stabili.

Contributo alla risposta dei poli instabili.

- Il contributo alla risposta dovuto ai termini associati ai poli a parte reale negativa è un contributo che svanisce a tempo lungo, poiché tende a zero al crescere del tempo:

– **Risposta transitoria**

$$y_{\text{trans.}}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \sum_{i=1}^{n_{a.s.}} \frac{P_i}{s - p_i} \right] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

- I contributi alla risposta dovuti ai termini associati ai poli sempl. stabili oppure instabili (sono termini da imputare al segnale d'ingresso) certamente non tendono a zero al crescere del tempo: in realtà man mano che il tempo passa la risposta diviene sempre più simile a quella ottenibile dai soli contributi considerati

– **Risposta a regime permanente**

$$y_{\text{reg.}}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \sum_{j=1}^{n_{s.s.}} \frac{Q_j}{s - p_j} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \sum_{k=1}^{n_{inst.}} \frac{R_k}{s - p_k} \right]$$

## Un esempio

- Si applica al sistema  $G(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+10)}$

in condizioni iniziali nulle, l'ingresso

$$u(t) = 4t \cdot 1(t)$$

- Espressa tramite la trasformata di Laplace, la risposta del sistema è data dall'espressione (si tratta della risposta forzata del sistema [cfr. Parte 2, slide 53-54] ):

$$Y(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+10)} \cdot \frac{4}{s^2}$$

- In base a quanto visto finora, nella risposta del sistema sono identificabili le parti:

– **Risposta transitoria**  $Y_{\text{trans.}}(s) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{9}{100} \cdot \frac{1}{s+10}$

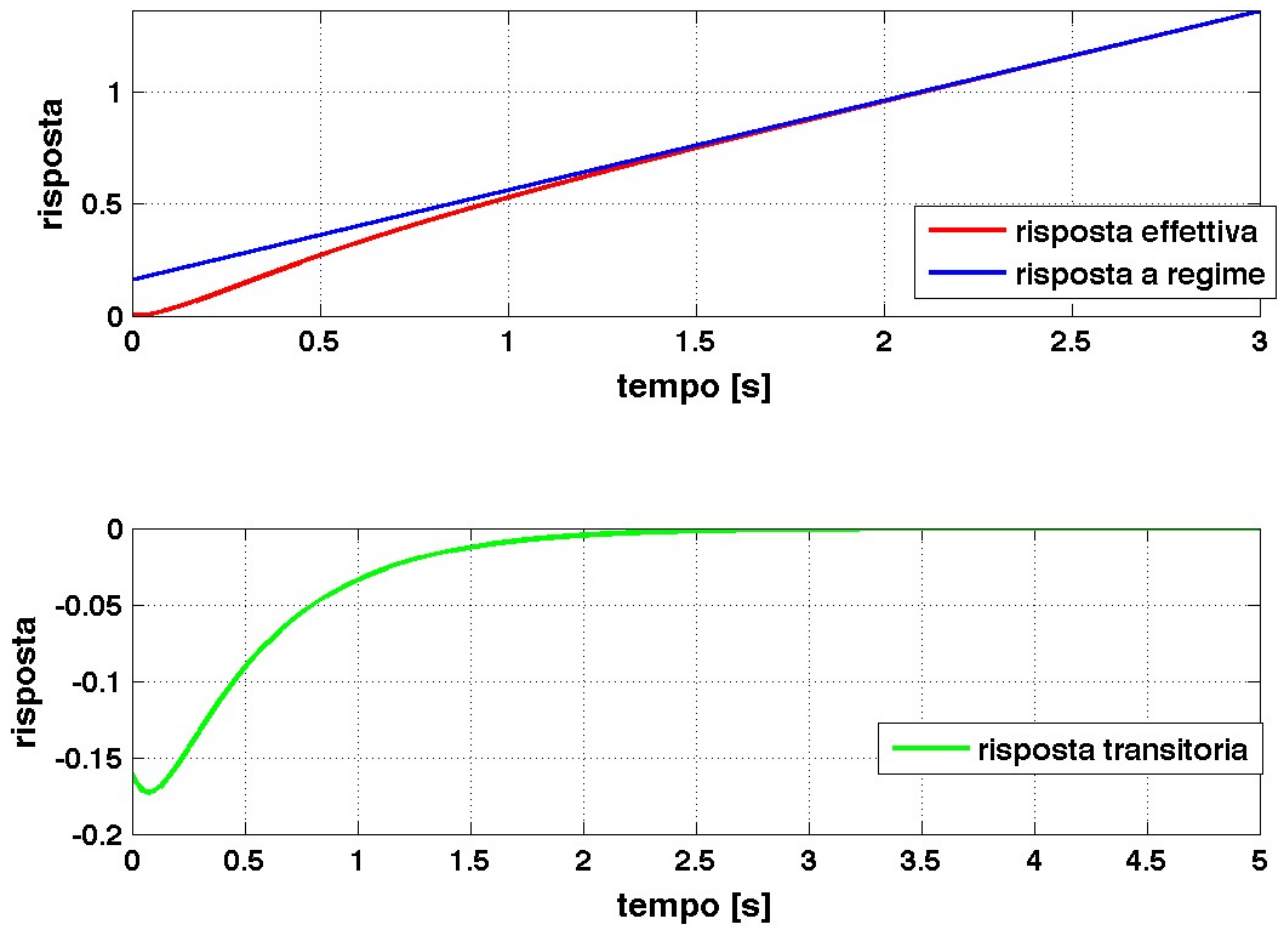
$$y_{\text{trans.}}(t) = \left[ -\frac{1}{4} e^{-2t} + \frac{9}{100} e^{-10t} \right] \cdot 1(t)$$

– **Risposta a regime permanente**

$$Y_{\text{reg.}} = \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{s} + \frac{9}{100} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$y_{\text{reg.}}(t) = \left[ \frac{4}{25} + \frac{9}{100} t \right] \cdot 1(t)$$

- Graficamente l'evoluzione della risposta è





# Sistema a tempo discreto as. s. : risposta transitoria e risposta a regime

- Consideriamo ora invece un **sistema a tempo discreto, as. s. completamente descritto dalla funzione di trasferimento**

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

(cioè **non ci sono cancellazioni**) ed applichiamo al sistema un ingresso qualsiasi (anche non limitato)  $u(k)$  [ma che ammetta Z-trasformata razionale].

- Per la risposta (espressa in termini di Z-trasformata) vale che

$$Y(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \cdot U(z)$$

- Valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per il caso a tempo continuo.
- Mettendo in evidenza nella scomposizione “in fratti semplici” i termini associati a poli asintoticamente stabili, semplicemente stabili ed instabili si ottiene

$$\begin{aligned}
 y(k) = \mathcal{Z}^{-1} & \left[ \sum_{i=1}^{n_{a.s.}} \frac{P_i z}{z - p_i} \right] + \dots && \text{Contributo alla risposta} \\
 & && \text{dei poli as. stabili.} \\
 & + \mathcal{Z}^{-1} \left[ \sum_{j=1}^{n_{s.s.}} \frac{Q_j z}{z - p_j} \right] + \dots && \\
 & && \text{Contributo alla risposta} \\
 & + \mathcal{Z}^{-1} \left[ \sum_{l=1}^{n_{inst.}} \frac{R_l z}{z - p_l} \right] && \text{dei poli} \\
 & && \text{instabili.}
 \end{aligned}$$

Contributo alla risposta dei poli sempl. stabili.

- Il contributo alla risposta dovuto ai termini associati ai poli a modulo inferiore all'unità è un contributo che svanisce a tempo lungo, poiché tende a zero al crescere del tempo:

- **Risposta transitoria**

$$y_{\text{trans.}}(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left[ \sum_{i=1}^{n_{a.s.}} \frac{P_i z}{z - p_i} \right] \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

- I contributi alla risposta dovuti ai termini associati ai poli sempl. stabili oppure instabili (sono termini da imputare al segnale d'ingresso) certamente non tendono a zero al crescere del tempo: in realtà man mano che il tempo passa la risposta diviene sempre più simile a quella ottenibile dai soli contributi considerati

- **Risposta a regime permanente**

$$y_{\text{reg.}}(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left[ \sum_{j=1}^{n_{s.s.}} \frac{Q_j z}{z - p_j} \right] + \mathcal{Z}^{-1} \left[ \sum_{k=1}^{n_{inst.}} \frac{R_k z}{z - p_k} \right]$$

# Riassumendo: sistemi LTI as. s. a tempo continuo ed a tempo discreto

- La **risposta in regime permanente** è soltanto una situazione **asintotica**, alla quale la risposta effettiva converge al crescere del tempo.
- La differenza tra risposta effettiva e risposta in regime permanente viene chiamata **risposta in regime transitorio** (o **risposta transitoria**). Quest'ultima tende effettivamente a zero al crescere del tempo.

# Studio dei sistemi dinamici tramite FdT

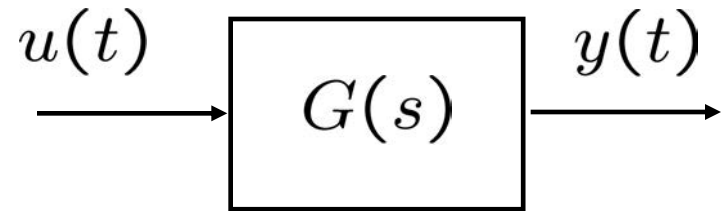
**Risposta in frequenza  
per sistemi LTI a tempo continuo**

## - Risposta alla sinusoidale

$$x(0) = 0$$

$$u(t) = A \sin(\omega t) 1(t)$$

$$\downarrow U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$



$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_{i=1}^m (1 + sT_i)}{\prod_{i=1}^n (1 + s\tau_i)}$$

Hp: as. stabilita`

$$Y(s) = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} = G(s) \frac{A\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)}$$

Supponiamo per semplicità che tutti i poli siano reali distinti

$$\begin{aligned} \hookrightarrow Y(s) = & \frac{\alpha_1}{1 + s\tau_1} + \frac{\alpha_2}{1 + s\tau_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{1 + s\tau_n} + \underbrace{\frac{\beta s + \gamma}{s^2 + \omega^2}}_{Y_2(s)} \\ & \underbrace{\hspace{15em}}_{Y_1(s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \hookrightarrow y(t) = & \boxed{y_1(t)} + y_2(t) \quad t \geq 0 \\ & \begin{array}{c} t \rightarrow \infty \downarrow \\ 0 \end{array} \quad (\text{as. stabilita'}) \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$  Per  $t \rightarrow \infty$  (a transitorio esaurito)  $y(t) \simeq y_2(t)$

## - Calcolo di $y_2(t)$


$$Y(s) = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} = G(s) \frac{A\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \quad \downarrow \quad y(t) \simeq y_2(t) = k_1 e^{j\omega t} + k_2 e^{-j\omega t} \quad t \geq 0$$

$$k_1 = G(s) \frac{A\omega}{s + j\omega} \Big|_{s=j\omega} = \frac{A}{2j} G(j\omega)$$

$$k_2 = G(s) \frac{A\omega}{s - j\omega} \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{A}{2j} G(-j\omega)$$



- Si dimostra che  $G(s^*) = G^*(s)$    $G(j\omega) = G^*(-j\omega)$
- Scriviamo ora i numeri complessi  $G(j\omega), G^*(-j\omega)$  in termini di modulo ed argomento, cioè:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \quad \text{dove } \varphi(\omega) := \arg G(j\omega)$$

$$G(-j\omega) = G^*(j\omega) = |G(j\omega)|e^{-j\varphi(\omega)}$$

$$\begin{aligned} \downarrow y(t) \simeq y_2(t) &= A|G(j\omega)| \frac{e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi(\omega)} - e^{-j\omega t} \cdot e^{-j\varphi(\omega)}}{2j} \\ &= A|G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2j} \\ &= A \cdot |G(j\omega)| \sin[\omega t + \varphi(\omega)], \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

## - Teorema Risposta in Frequenza (AS. STAB.)



A transitorio esaurito (in pratica per  $t > t_a$ )

$$y(t) \simeq B \sin(\omega t + \varphi)$$

Stessa pulsazione  
sinusoide in ingresso!

dove  $B = |G(j\omega)| \cdot A$

$$\varphi = \arg G(j\omega)$$

## - Definizione Risposta in Frequenza

$G(j\omega)$ ,  $\omega \geq 0$  funzione complessa di variabile reale

**- Esempio 1**

$$G(s) = \frac{1}{1 + s}$$

$$u(t) = 10 \sin(2t)1(t)$$



$$A = 10; \omega = 2 \text{ rad/s}$$

$$G(j2) = \frac{1}{1 + 2j} = \frac{1 - 2j}{(1 - 2j)(1 + 2j)} = \frac{1 - 2j}{5} = \frac{1}{5} - j\frac{2}{5}$$

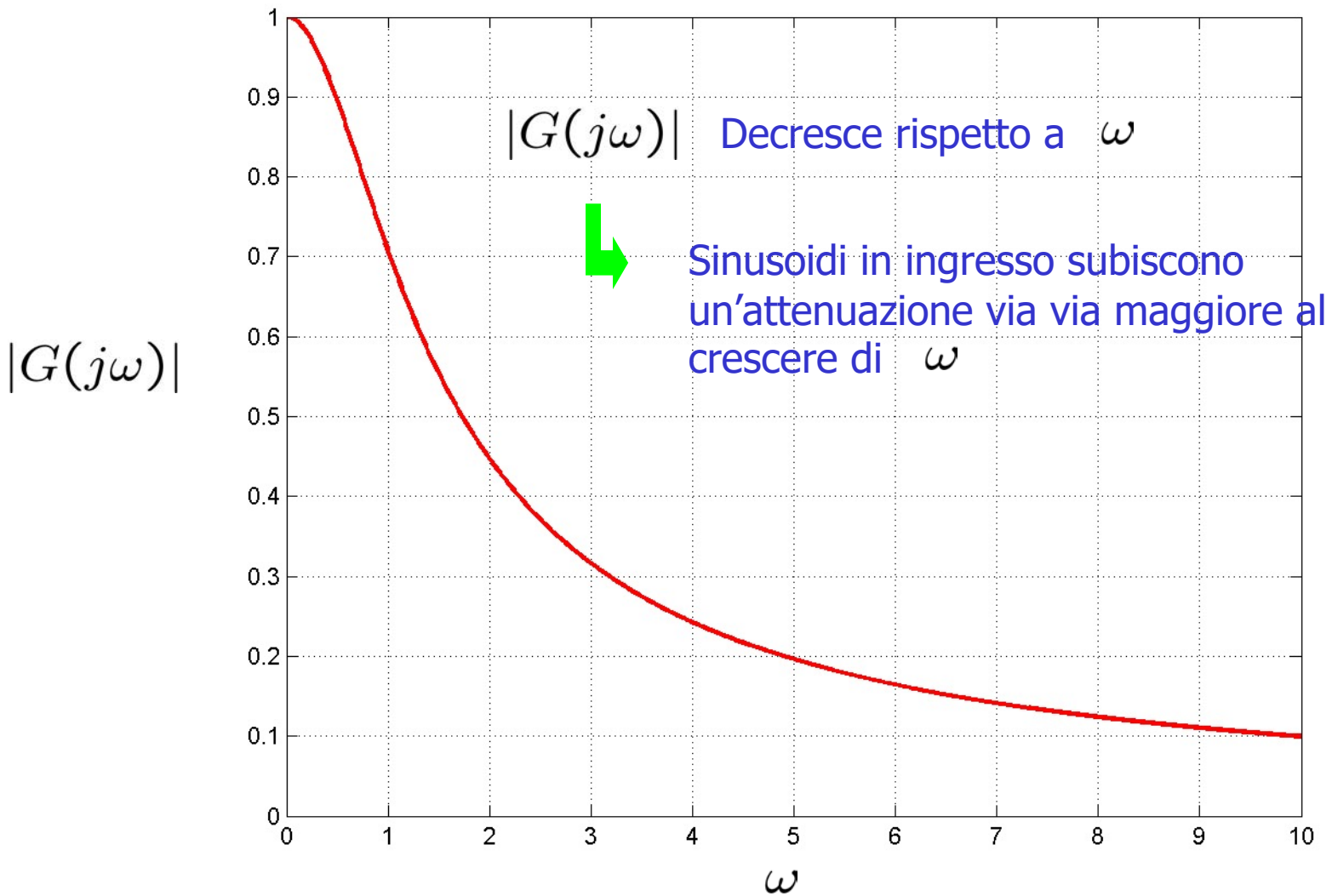


$$|G(j2)| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \simeq 0.447$$

$$\arg G(j2) = \text{arctg}(-2) = -63^\circ = -63^\circ \frac{\pi}{180} \simeq -1.1$$



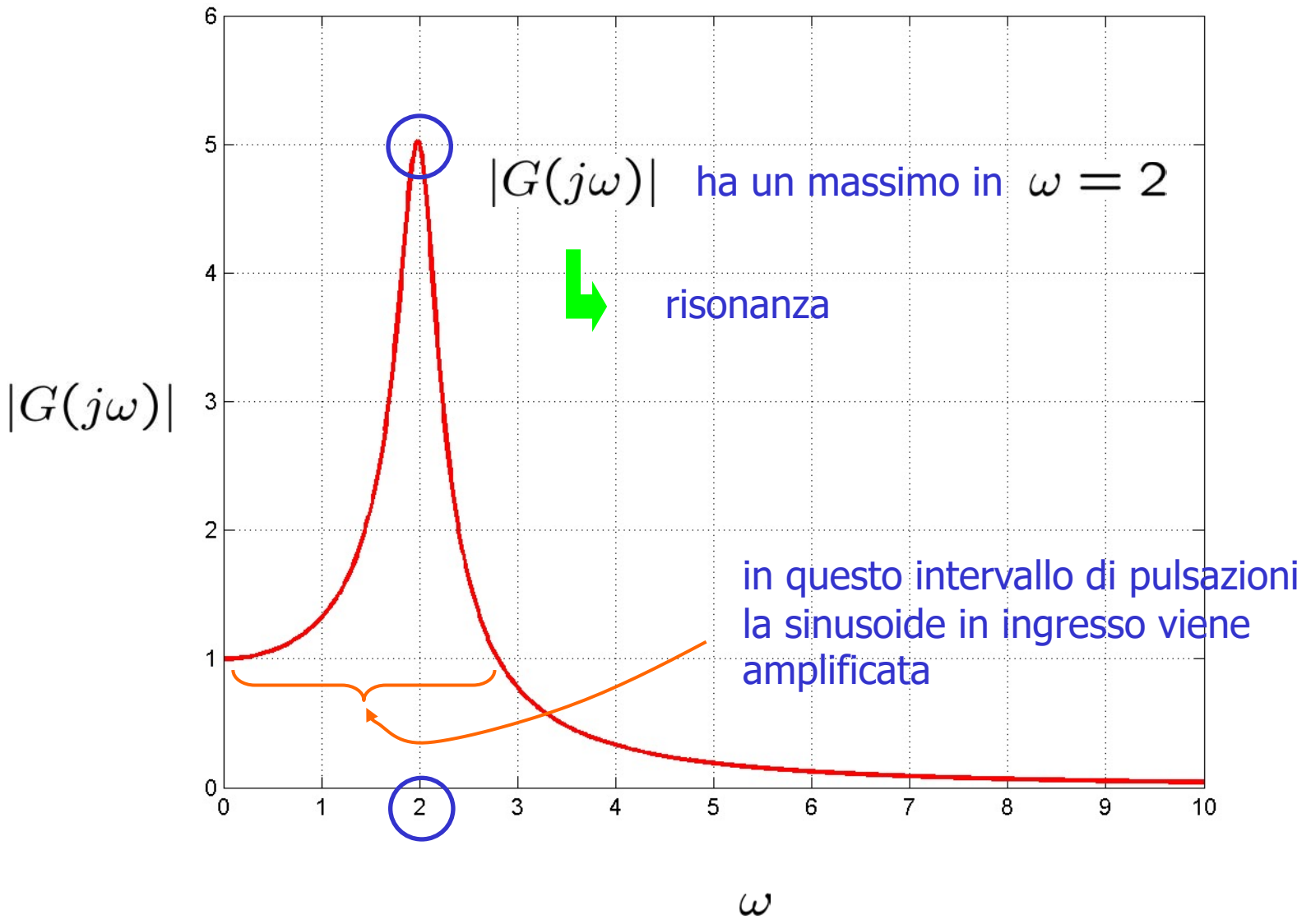
$$y(t) \simeq \frac{10}{\sqrt{5}} \sin(2t - 1.1), \quad t > t_a \simeq 5$$



## - Esempio 2

$$G(s) = \frac{1}{1 + 0.1s + \frac{s^2}{4}}$$

$$\downarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{\left|1 + j0.1\omega + \frac{(j\omega)^2}{4}\right|} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{4}\right)^2 + 0.01\omega^2}}$$



## - Estensioni del Teorema Risposta in Frequenza

- $u(t)$  multi-sinusoidale
- $u(t)$  periodico
- $u(t)$  "generico"

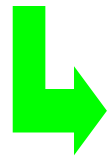


## - Ingresso multi-sinusoidale

$$u(t) = \sum_{k=1}^N c_k \sin(\omega_k t + \gamma_k)$$

Sovrapposizione effetti + teo. risposta in frequenza

(a transitorio esaurito)



$$y(t) = \sum_{k=1}^N c_k |G(j\omega_k)| \sin[\omega_k t + \gamma_k + \arg G(j\omega_k)]$$

$$t \geq 0$$


- Ingresso periodico di periodo  $T$

Serie di Fourier

$$u(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\omega_0 t + \gamma_k), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Sovrapposizione effetti + teo. risposta in frequenza

(a transitorio esaurito)



$$y(t) = G(0)c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k |G(jk\omega_0)| \sin[k\omega_0 t + \gamma_k + \arg G(jk\omega_0)]$$

$$t \geq 0$$

## - Ingresso "generico"

Sotto ipotesi blande si può scrivere

$$u(t) = \int_0^{\infty} C(\omega) \sin[\omega t + \gamma(\omega)] d\omega$$

Spettro di ampiezza

Spettro di fase

Integrale di Fourier

Sovrapposizione effetti + teo. risposta in frequenza

(a transitorio esaurito)

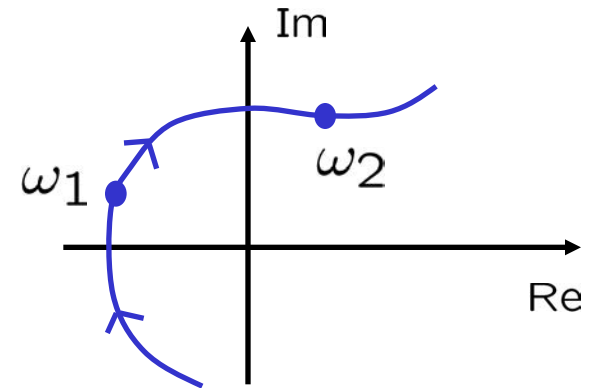


$$y(t) = \int_0^{\infty} \underbrace{C(\omega) |G(j\omega)|}_{C'(\omega)} \sin[\omega t + \underbrace{\gamma(\omega) + \arg G(j\omega)}_{\gamma'(\omega)}] d\omega \quad t \geq 0$$

## - Rappresentazioni grafiche della r.i.f.

- Diagramma polare

$$G(j\omega), \quad \omega \geq 0$$

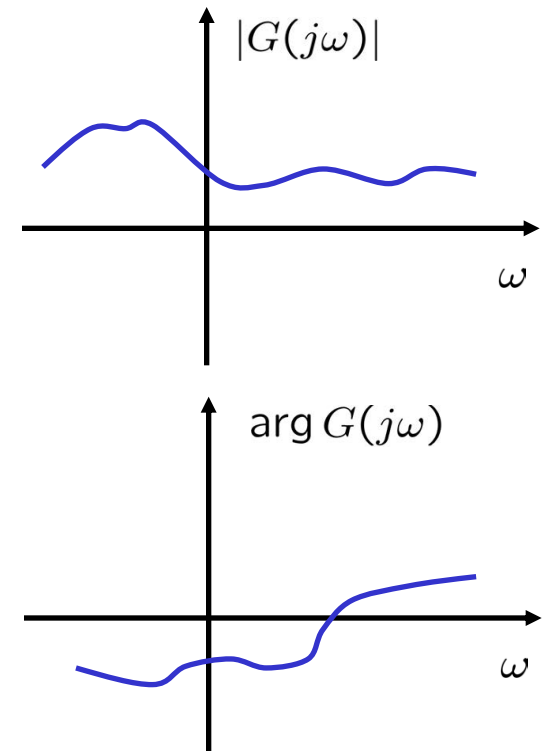


- Diagrammi di Bode

$$|G(j\omega)|, \quad \omega \geq 0$$

$$\arg G(j\omega), \quad \omega \geq 0$$

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$



## - Diagrammi di Bode: convenzioni

- Modulo

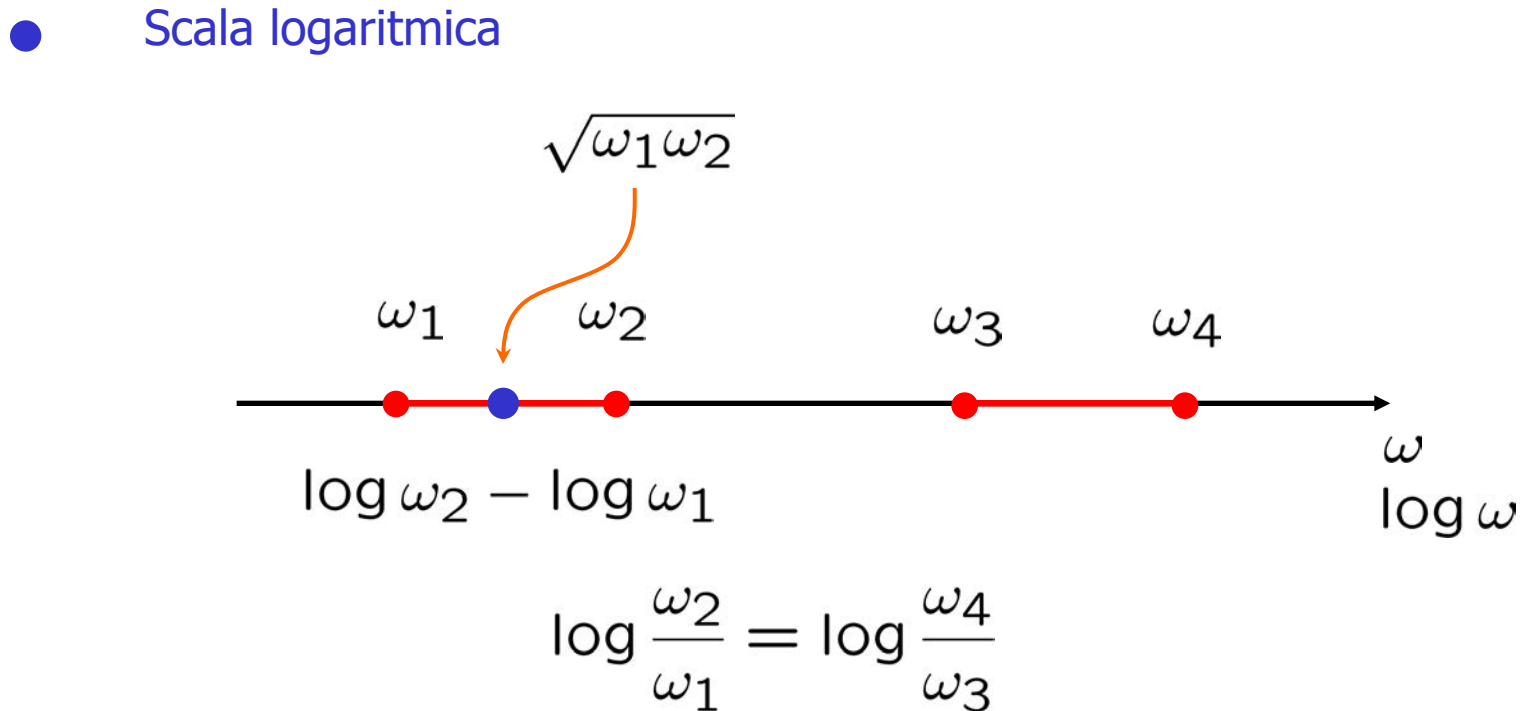
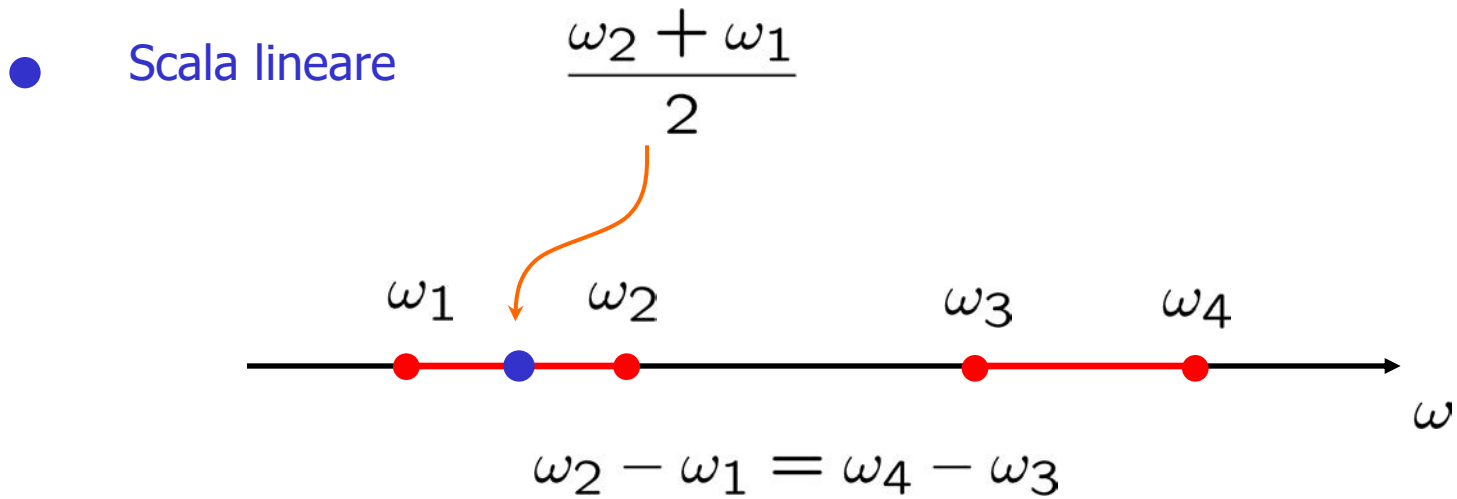
- ascisse:  $\log \omega$

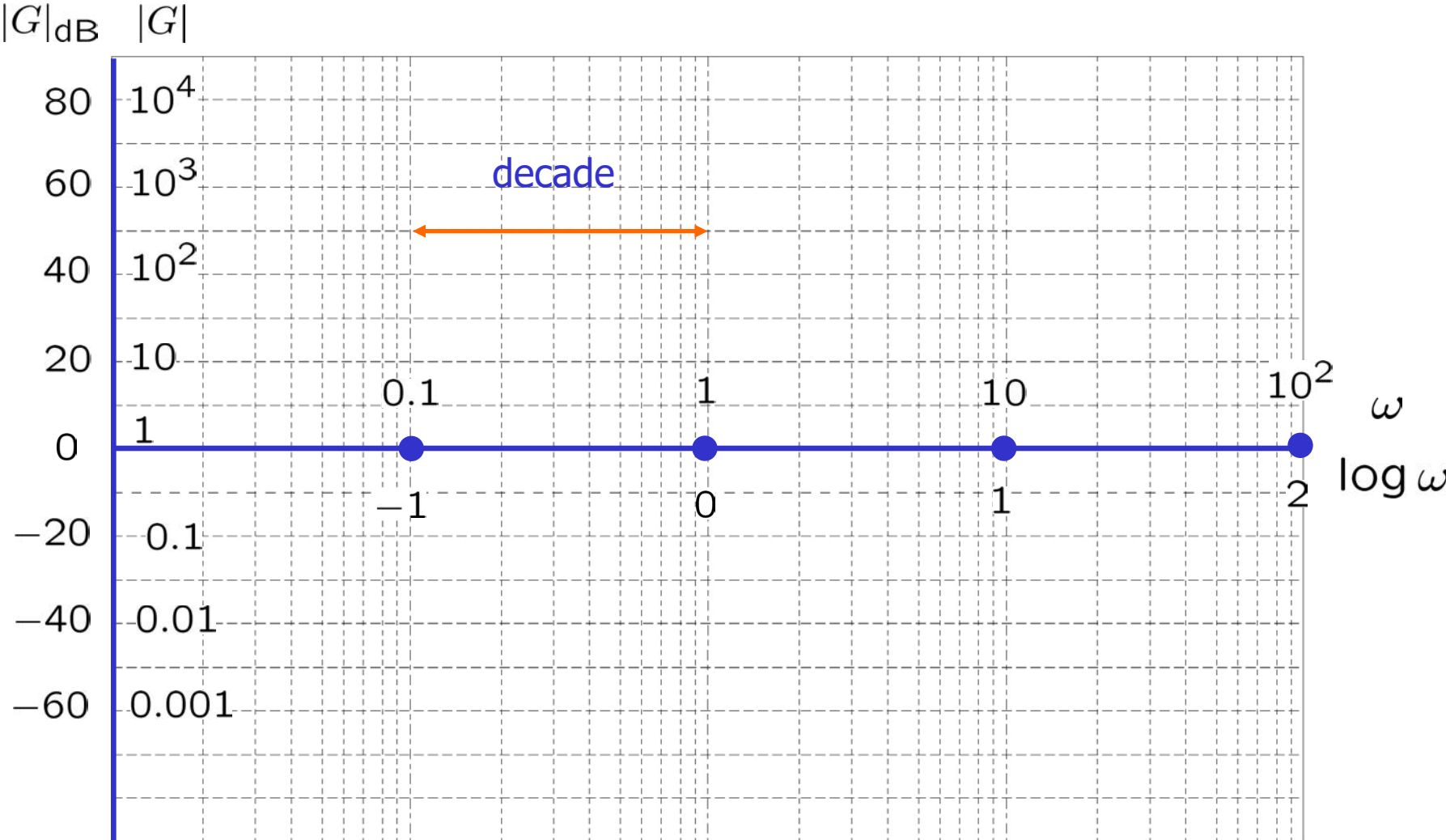
- ordinate:  $|G(j\omega)|_{\text{dB}}$       ( $x_{\text{dB}} := 20 \log x$ )

- Fase

- ascisse:  $\log \omega$

- ordinate:  $\arg G(j\omega)$  in gradi





## - Diagrammi di Bode: Modulo

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_{i=1}^m (1 + sT_i)}{\prod_{i=1}^n (1 + s\tau_i)}$$

↳

$$|G(j\omega)| = \frac{|\mu|}{|j\omega|^g} \frac{\prod_{i=1}^m |1 + j\omega T_i|}{\prod_{i=1}^n |1 + j\omega \tau_i|}$$

↳

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = \boxed{20 \log |\mu|} \quad \text{(A)}$$

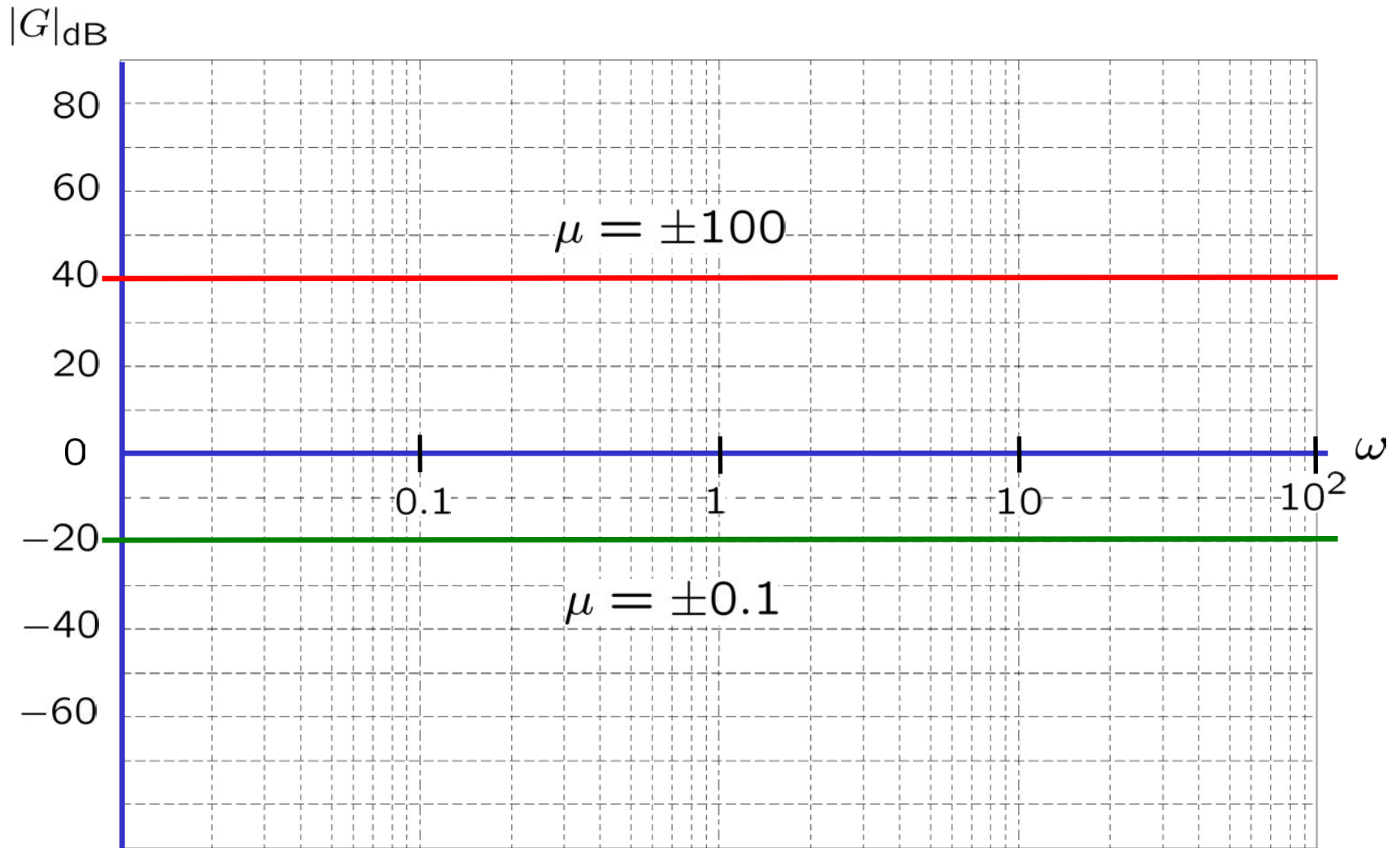
$$\boxed{-20 \log |j\omega|^g} \quad \text{(B)}$$

$$+ \sum_i \boxed{20 \log |1 + j\omega T_i|} \quad \text{(C),(D)}$$

$$- \sum_i \boxed{20 \log |1 + j\omega \tau_i|} \quad \text{(C),(D)}$$



(A)  $20 \log |\mu|$  retta costante

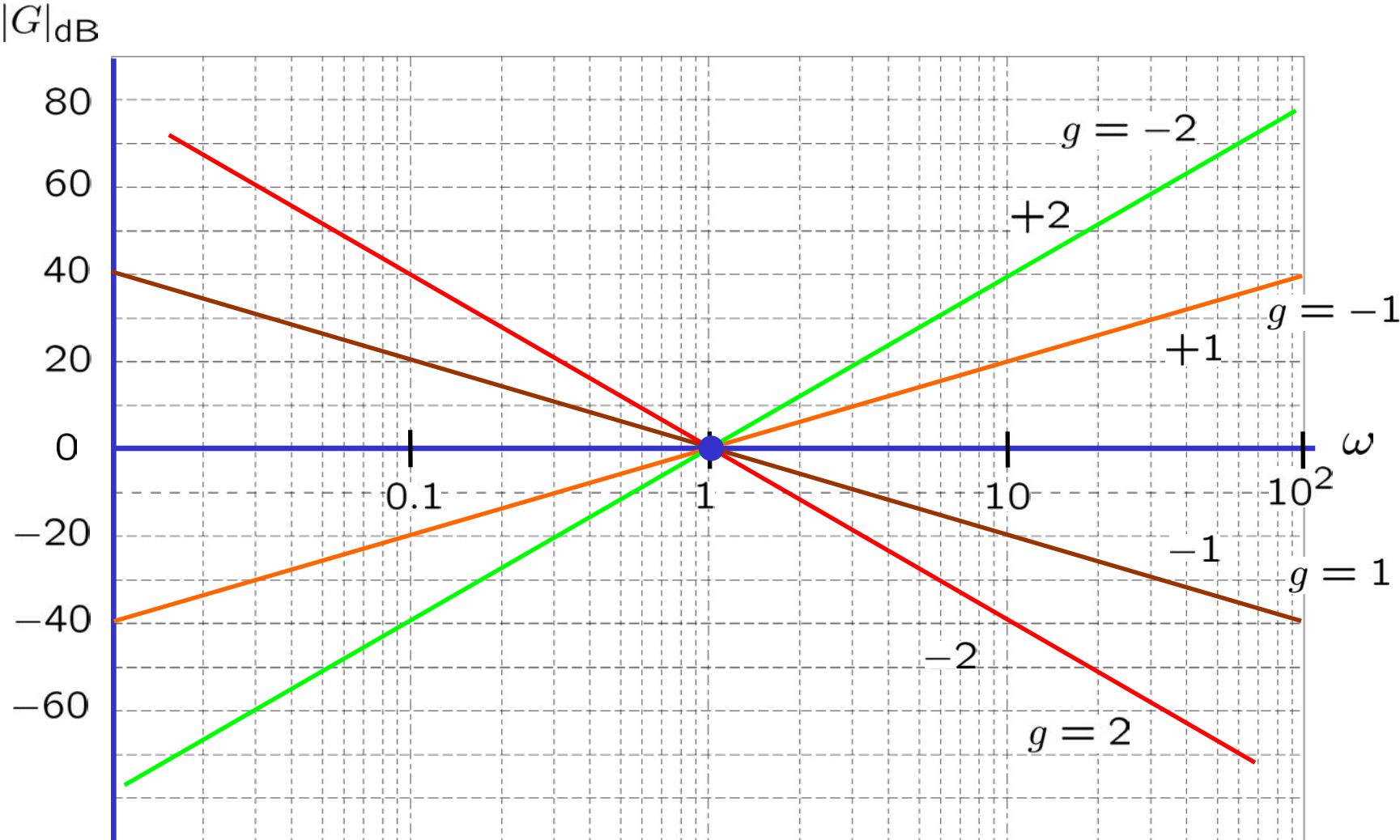


$$(B) \quad -20 \log |j\omega|^g$$

$$\downarrow \quad -20 \log |j\omega|^g = -20 g \underbrace{\log \omega}_x$$

Per convenzione:

retta con pendenza  $[-20 g \text{ dB/decade}]$  passante per 0 dB in  $\omega = 1$



(C)

$$20 \log |1 + j\omega T|$$

– Caso  $T \in \mathfrak{R}$

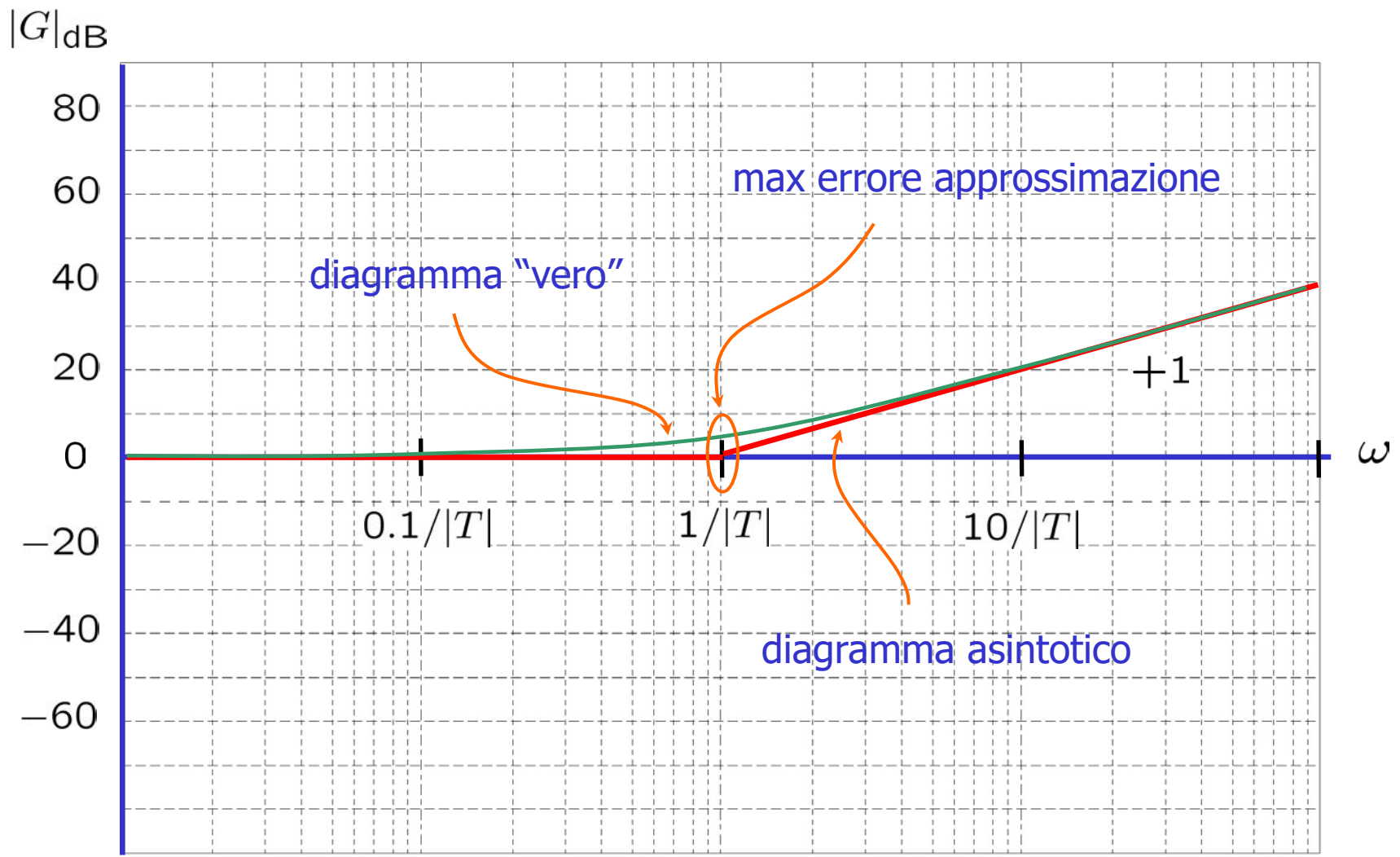
$$\rightarrow 20 \log |1 + j\omega T| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

- Se  $\omega^2 T^2 \ll 1$  ovvero  $\omega \ll \frac{1}{|T|}$


$$\rightarrow 20 \log |1 + j\omega T| \simeq 0$$

- Se  $\omega^2 T^2 \gg 1$  ovvero  $\omega \gg \frac{1}{|T|}$

$$\begin{aligned} \rightarrow 20 \log |1 + j\omega T| &\simeq 20 \log |j\omega T| \\ &= 20 \log \omega |T| \\ &= 20 \underbrace{\log \omega}_x + 20 \log |T| \end{aligned}$$



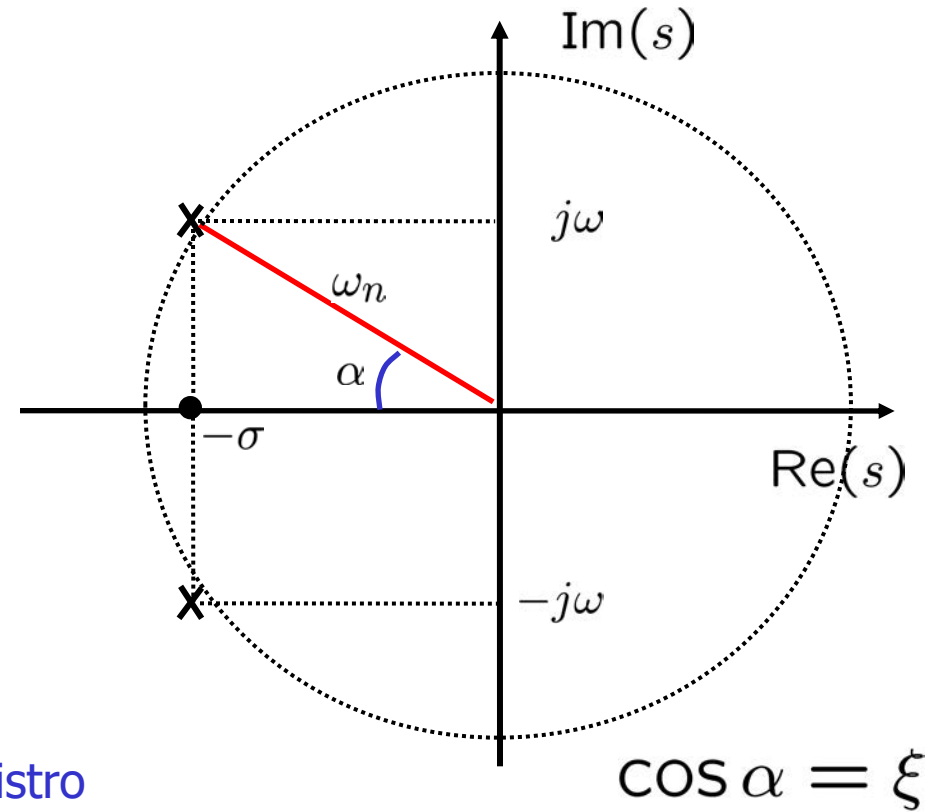
Errore di approssimazione in  $\omega = \frac{1}{|T|}$

  $20 \log \sqrt{2} = 10 \log 2 \simeq 3 \text{ dB}$

$$(D) \quad 20 \log |1 + j\omega T| + 20 \log |1 + j\omega T^*|$$

– Caso  $T \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \downarrow & (1 + sT)(1 + sT^*) \\ & = 1 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + \frac{1}{\omega_n^2} s^2 \end{aligned}$$



$$0 < \xi < 1 \quad \text{semipiano sinistro}$$

$$-1 < \xi < 0 \quad \text{semipiano destro}$$



$$20 \log |1 + j\omega T| + 20 \log |1 + j\omega T^*|$$

$$= 20 \log \left| 1 + \frac{2\xi}{\omega_n} j\omega - \frac{1}{\omega_n^2} \omega^2 \right| = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2 \omega^2}{\omega_n^2}}$$

- Se  $\omega \rightarrow 0$



$$20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2 \omega^2}{\omega_n^2}} \simeq 0$$

- Se  $\omega \rightarrow \infty$

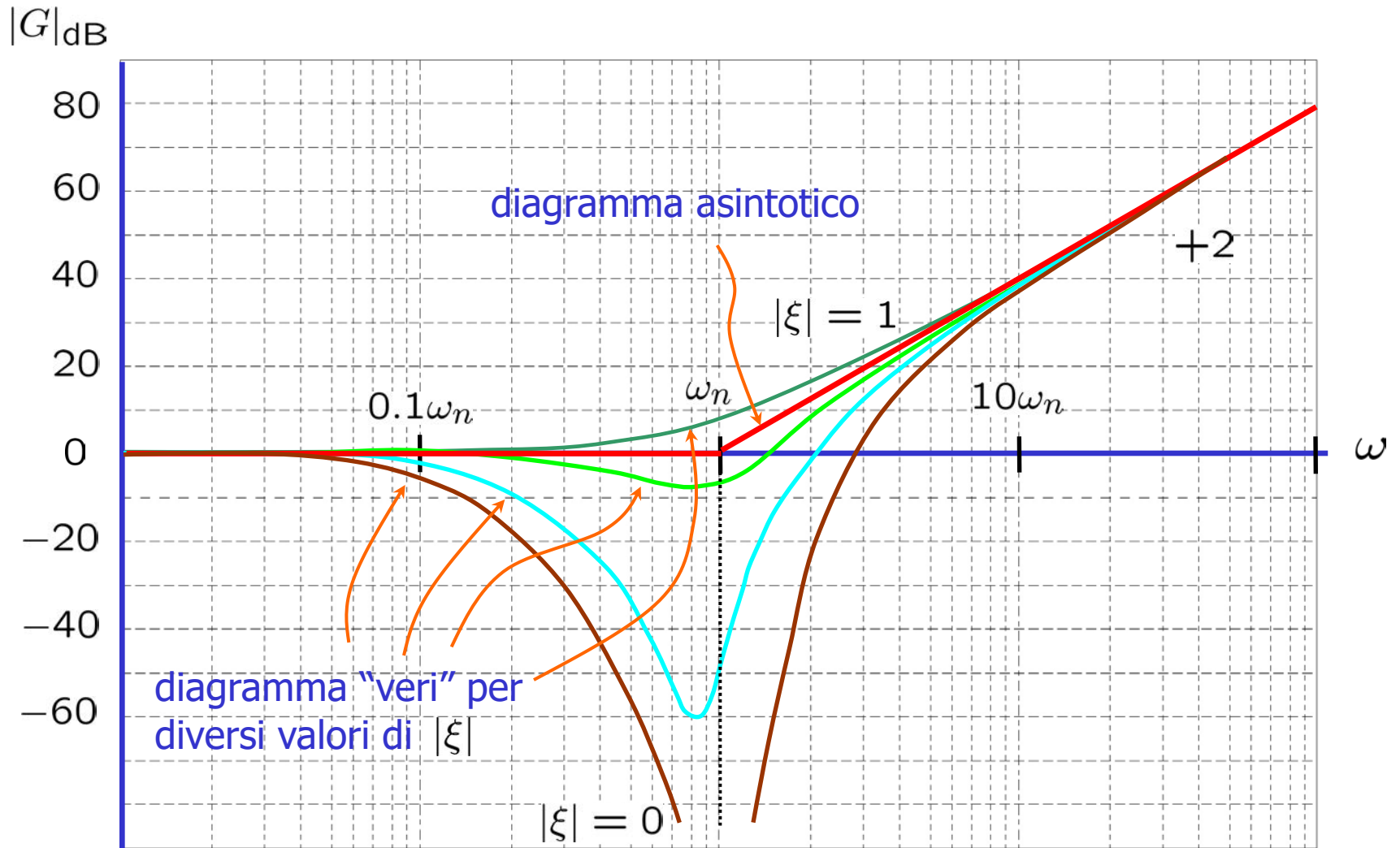


$$20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2 \omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$\simeq 20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2} = 20 \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 40 \log \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$= 40 \log \omega - 40 \log \omega_n$$

  
 $x$



Errore di approssimazione in  $\omega = \omega_n$

↳  $20 \log \sqrt{4\xi^2} = 20 \log(2|\xi|)$

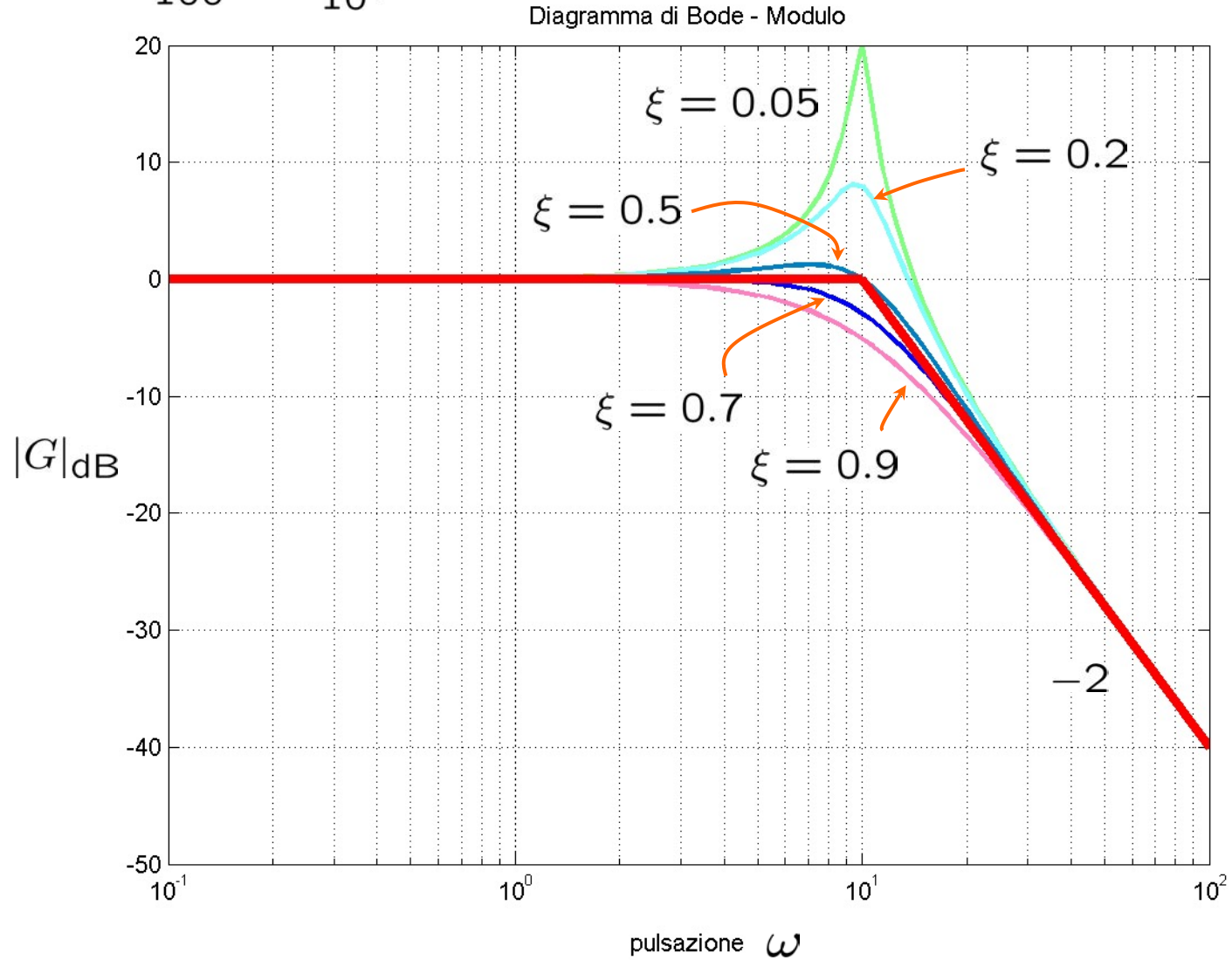
- Se  $|\xi| = 1$

↳  $20 \log(2) \simeq 6\text{dB}$

- Se  $\xi \rightarrow 0$

↳  $\rightarrow -\infty$

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{100}s + \frac{1}{10^4}s^2}$$



## - Regole per il tracciamento del diagr. asint. del modulo

- Pendenza iniziale  $-g$
- Tratto iniziale passa in  $\omega = 1$  per  $|\mu|_{\text{dB}}$
- Cambi di pendenza in corrispondenza di poli e zeri:
  - zero  $+1$
  - polo  $-1$
- Pendenza finale = nr. zeri – nr. poli
  - $\leq 0$
  - $= 0$  solo se  $G(s)$  non str. propria

## - Esempio 1

$$G(s) = \frac{100(1 + 10s)}{s(1 + 2s)(1 + 0.4s + s^2)}$$

$$g = 1$$

$$\mu = 100 \implies \mu_{\text{dB}} = 40\text{dB}$$

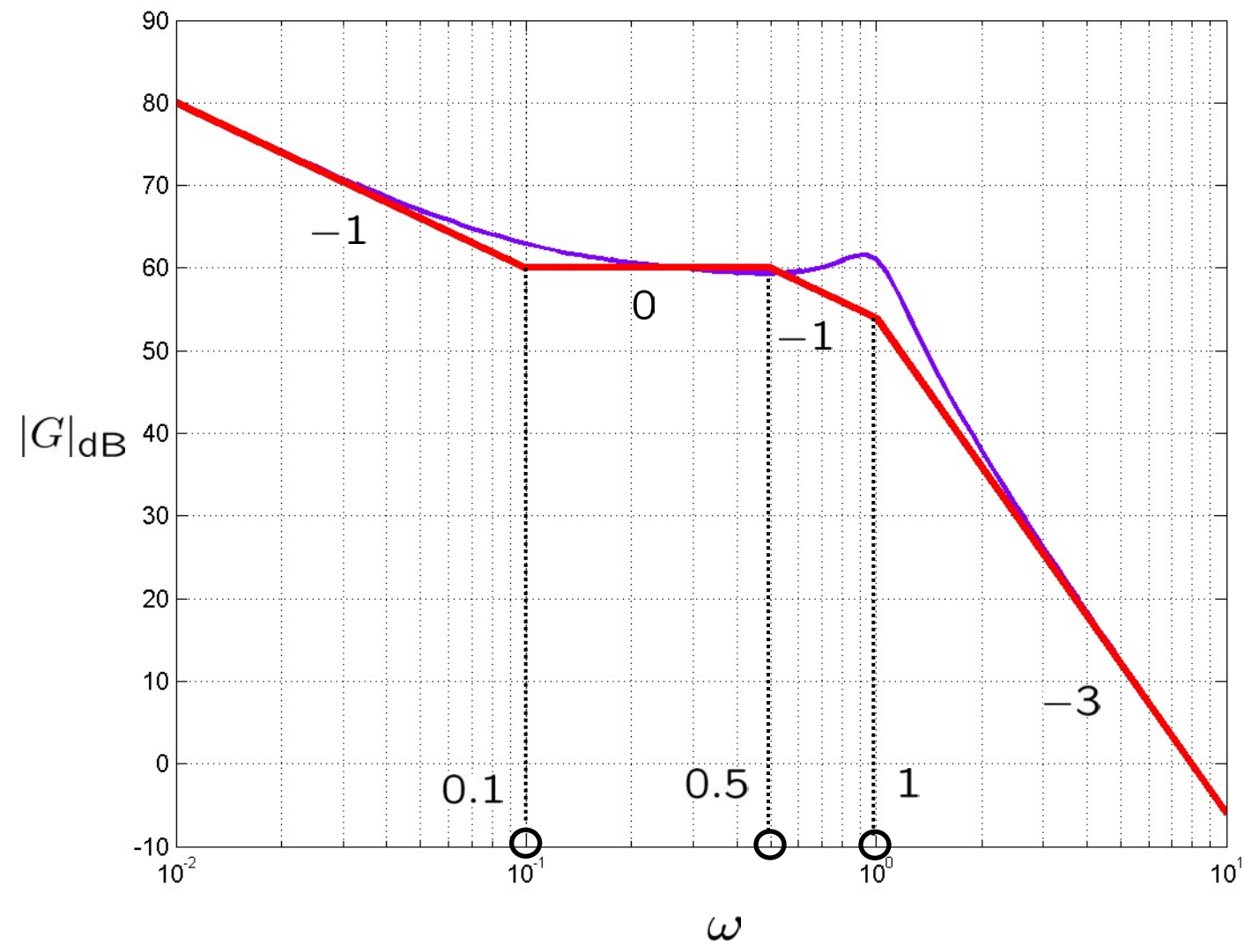
$$z_1 = -0.1$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = -0.5$$

$$p_{3,4} = -0.2 \pm j\sqrt{0.96}$$

$$\omega_n = 1; \xi = 0.2$$



## - Esempio 2

$$G(s) = \frac{100(1 + 10s)}{s(1 + s)^2}$$

$$g = 1$$

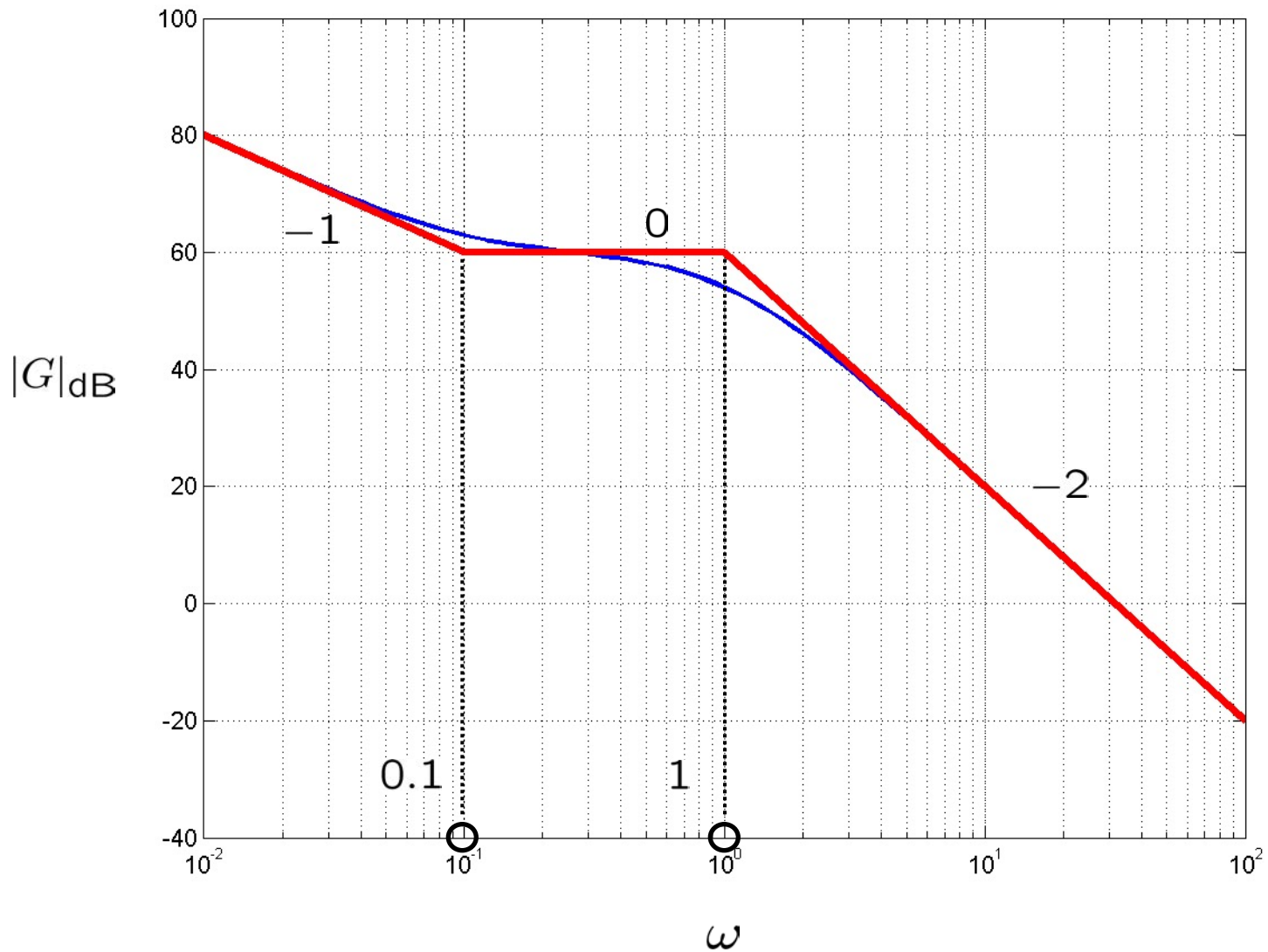
$$\mu = 100 \implies \mu_{\text{dB}} = 40\text{dB}$$

$$z_1 = -0.1$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = p_3 = -1$$





### - Esempio 3

$$G(s) = \frac{0.1s(1+s)}{(1+5s)^2(1+0.2s)(1-0.1s)}$$

$$g = -1$$

$$\mu = 0.1 \implies \mu_{\text{dB}} = -20\text{dB}$$

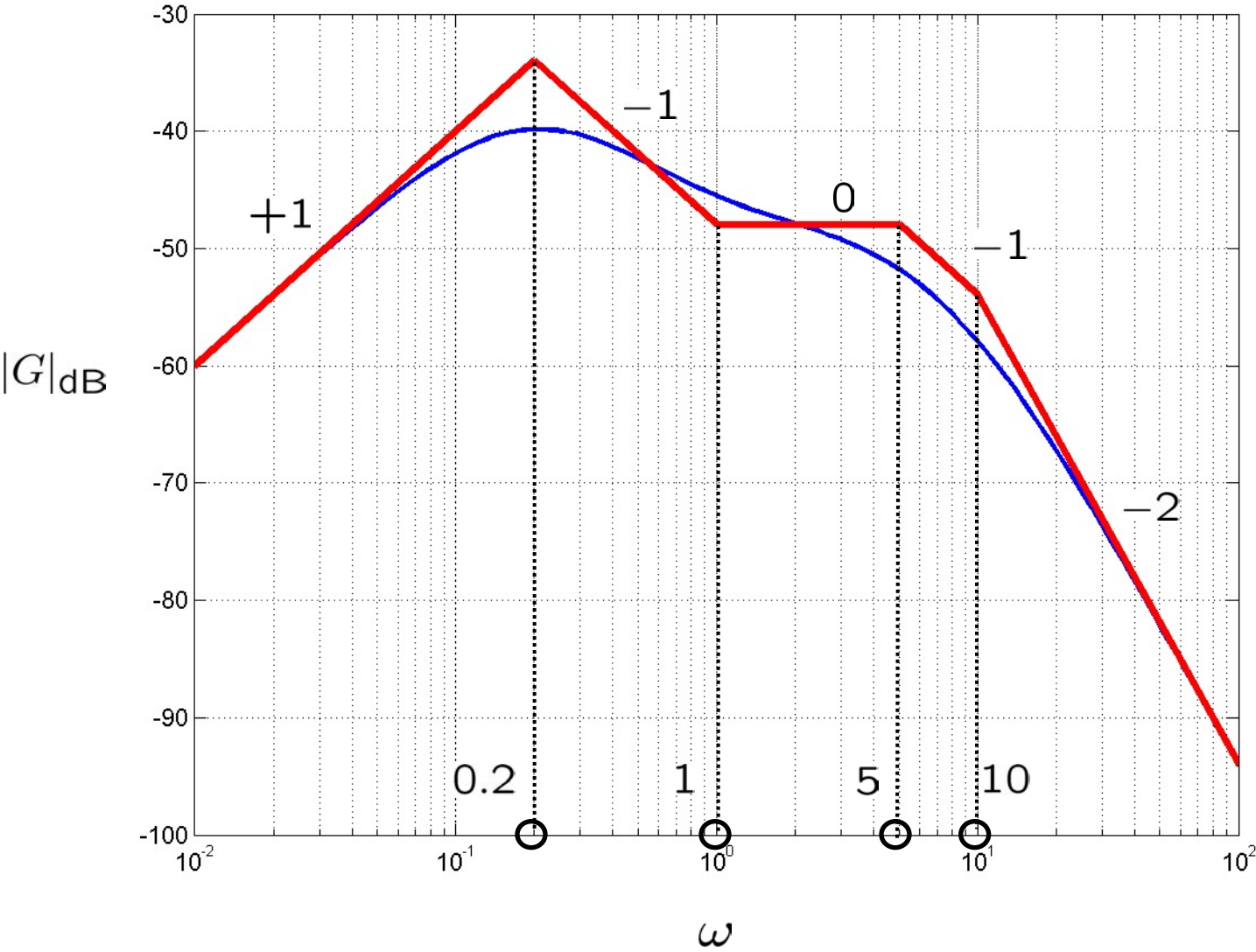
$$z_1 = 0$$

$$z_2 = -1$$

$$p_1 = p_2 = -0.2$$

$$p_3 = -5$$

$$p_4 = +10$$



**- Esempio 4**

$$G'(s) = \frac{50(1 + 0.4s)}{(1 + 10s)(1 + 0.2s + s^2)}$$

$$G''(s) = \frac{50(1 + 0.4s)}{(1 + 10s)(1 + 1.6s + s^2)}$$

$$g = 0$$

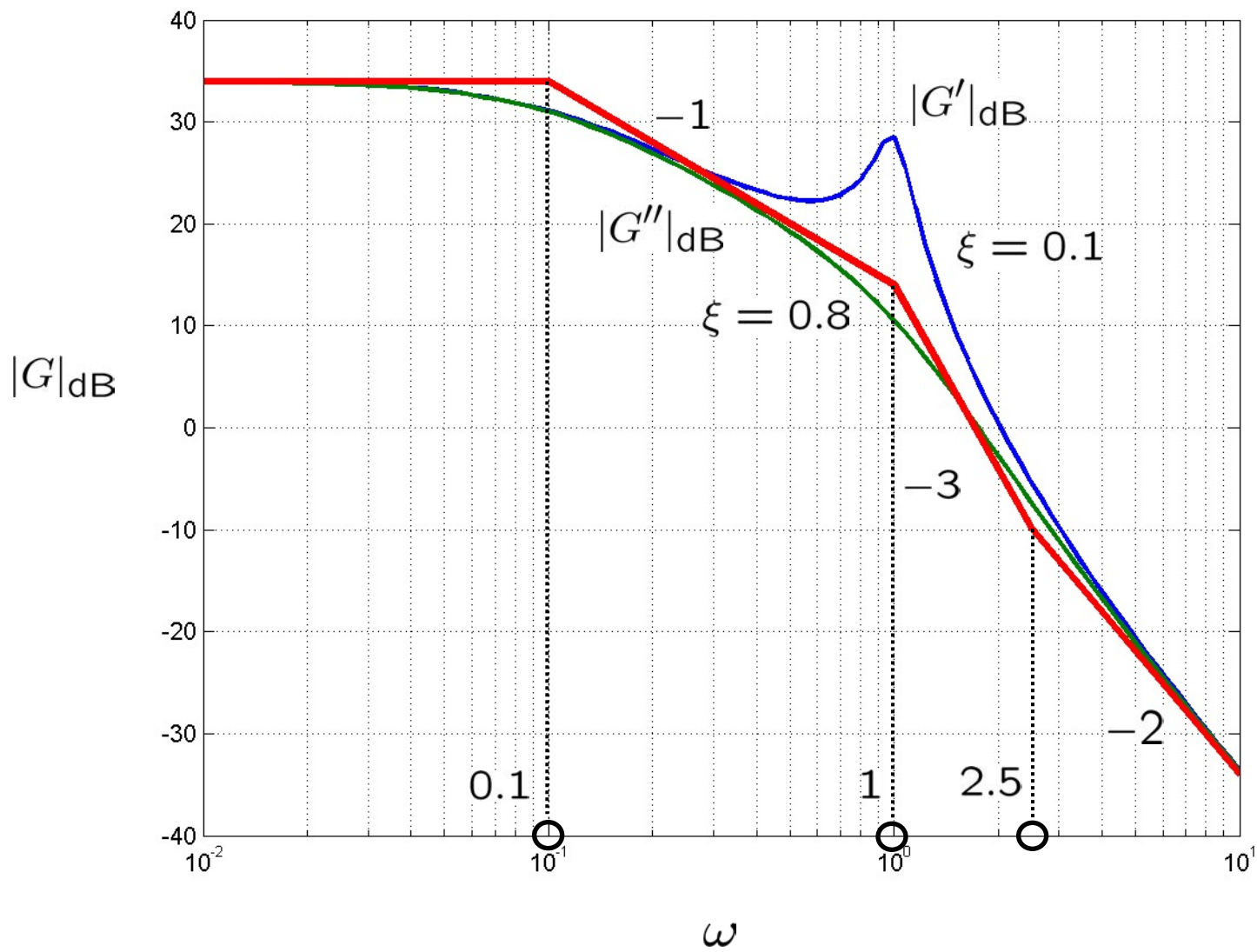
$$\mu = 50 \implies \mu_{\text{dB}} \simeq 34\text{dB}$$

$$z_1 = -2.5$$

$$p_1 = -0.1$$

$$p'_{2,3} = -0.1 \pm j\sqrt{0.99}; \omega_n = 1, \xi = 0.1$$

$$p''_{2,3} = -0.8 \pm j\sqrt{0.36}; \omega_n = 1, \xi = 0.8$$



## - Diagrammi di Bode: Fase

- ascisse:  $\log \omega$
- ordinate:  $\arg G(j\omega)$  in gradi

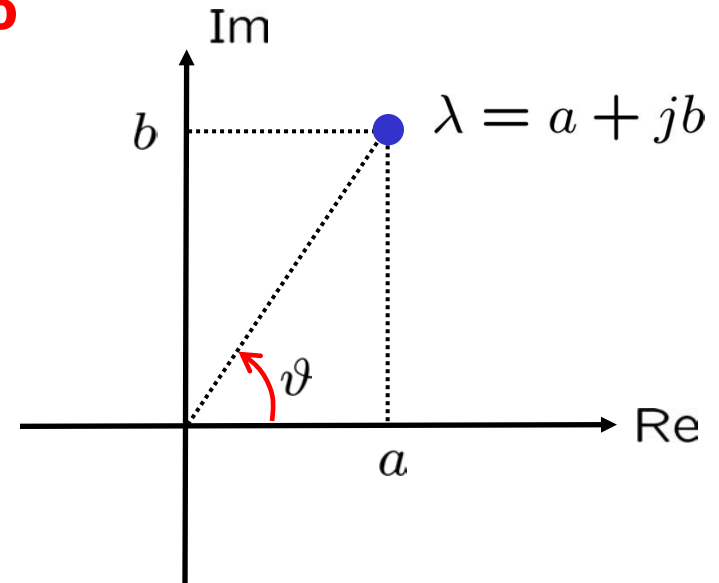
## - Argomento di un numero complesso

$$\lambda = a + jb$$

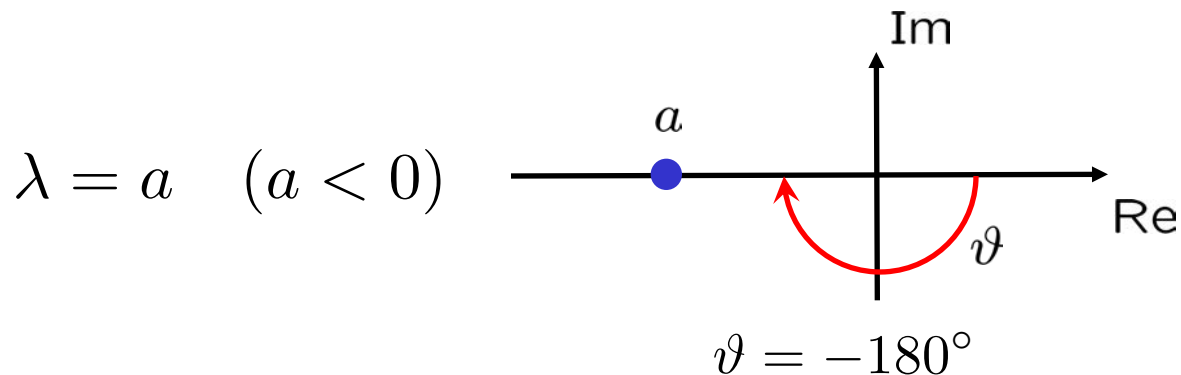
$$\arg \lambda = \vartheta \pm k360^\circ$$

Si impone per convenzione:

$$|\arg \lambda| \leq 180^\circ$$



e se  $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda < 0$  si impone per convenzione:  $\arg \lambda = -180^\circ$

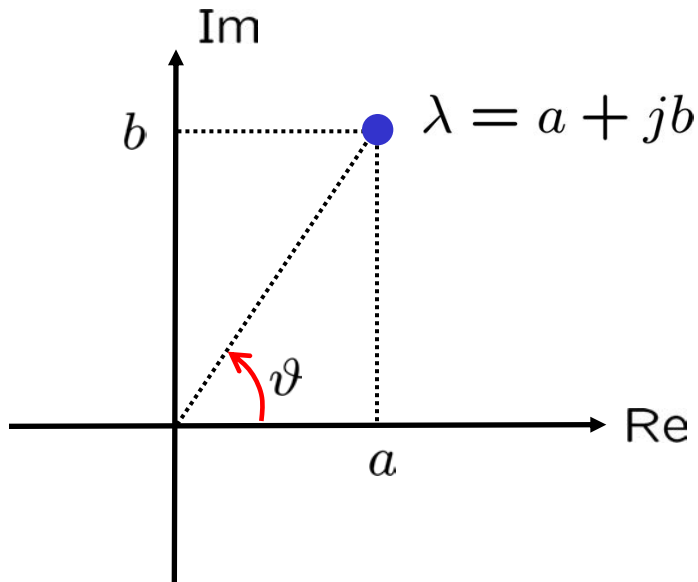


- Se  $a > 0$

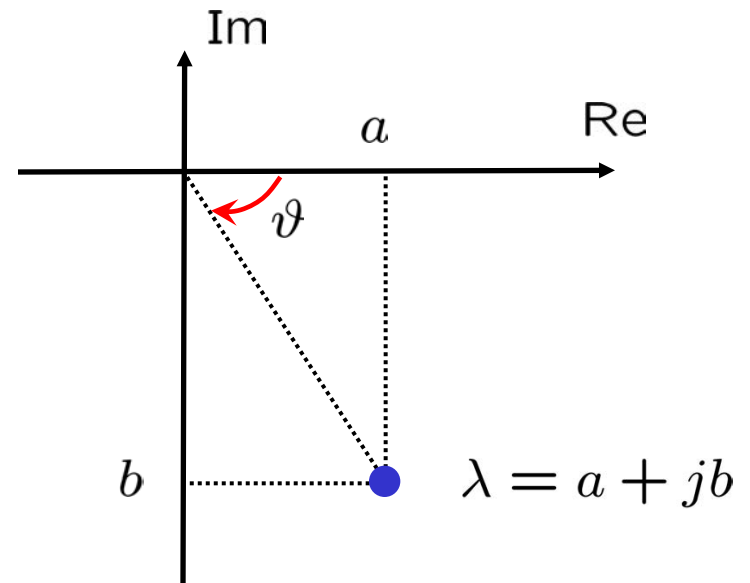


$$\arg \lambda = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

(Funzione atan2 di Matlab)



$$0^\circ \leq \vartheta < +90^\circ$$

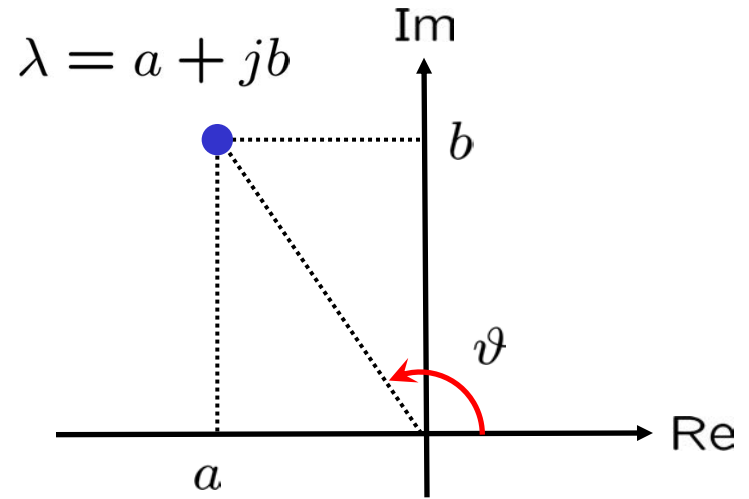


$$-90^\circ < \vartheta < 0^\circ$$



- Se  $a < 0$   
 $b > 0$

↳  $\arg \lambda = \arctg \frac{b}{a} + 180^\circ$   
 $+90^\circ < \vartheta < 180^\circ$



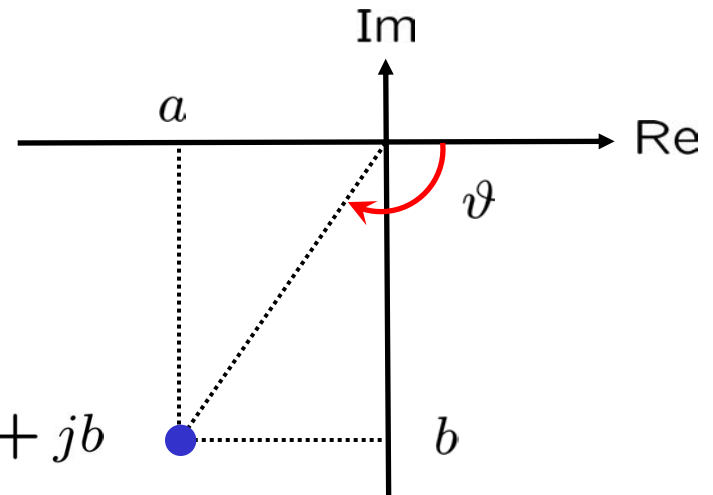
(Funzione atan2 di Matlab)

- Se  $a < 0$   
 $b < 0$

↳  $\arg \lambda = \arctg \frac{b}{a} - 180^\circ$

$-90^\circ < \vartheta < -180^\circ$

$\lambda = a + jb$



## - Argomento di un numero complesso: Proprietà`

- $\arg(\lambda\eta) = \arg(\lambda) + \arg(\eta)$
- $\arg(\lambda^k) = k \arg(\lambda)$
- $\arg\left(\frac{\lambda}{\eta}\right) = \arg(\lambda) - \arg(\eta)$



Quindi l'argomento di un numero complesso segue regole analoghe a quelle del logaritmo nel caso del modulo

## - Diagrammi di Bode: Argomento

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_{i=1}^m (1 + sT_i)}{\prod_{i=1}^n (1 + s\tau_i)}$$



$$\arg G(j\omega) = \boxed{\arg \mu} \quad (A)$$

$$\boxed{-\arg (j\omega)^g} \quad (B)$$

$$+ \sum_i \boxed{\arg (1 + j\omega T_i)} \quad (C), (D)$$

$$- \sum_i \boxed{\arg (1 + j\omega \tau_i)} \quad (C), (D)$$

- Ad ogni termine si applica la convenzione appena vista.
- Si sommano tutti i contributi.
- La fase complessiva può assumere valori al di fuori dell'intervallo  $[-180^\circ \quad +180^\circ]$

(A)

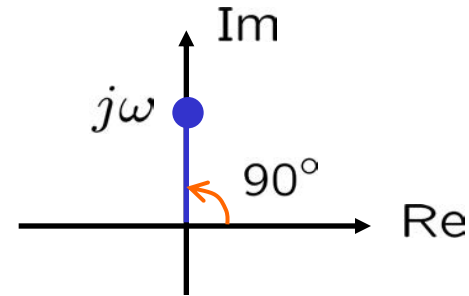
 $\arg(\mu)$ 

$$0^\circ \quad \mu > 0$$

$$-180^\circ \quad \mu < 0$$

retta costante


(B)  $-\arg (j\omega)^g$




↳  $-\arg (j\omega)^g = -g \arg (j\omega) = -g 90^\circ$

retta costante

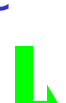
(C)  $\arg(1 + j\omega T)$ 

  $\arg(1 + j\omega T) = \arctg \omega T \quad T \text{ reale}$

● Se  $\omega \rightarrow 0$

  $\arg(1 + j\omega T) \rightarrow 0^\circ$


● Se  $\omega \rightarrow \infty$

  $\arg(1 + j\omega T)$

$\rightarrow 90^\circ \quad \text{se } T > 0$

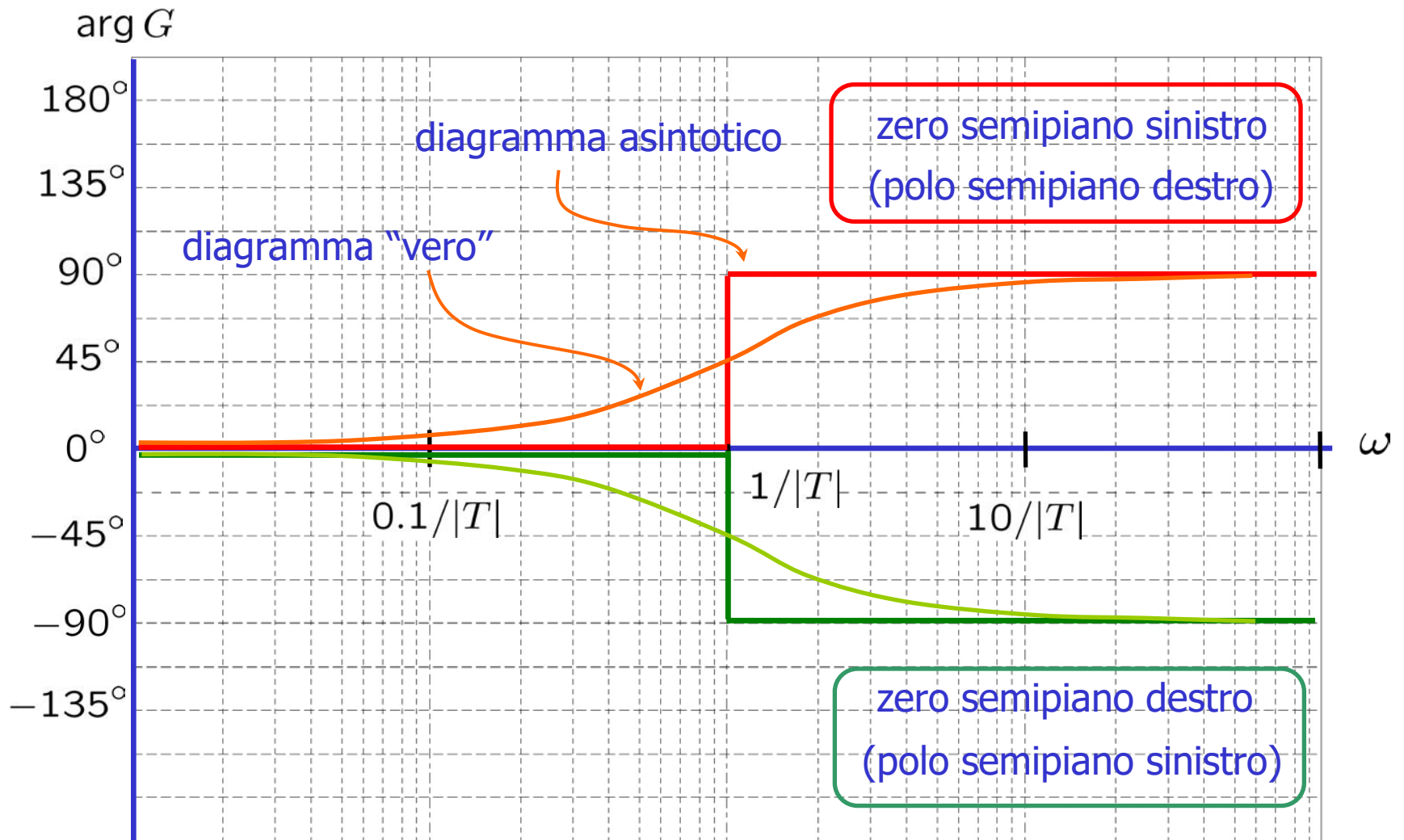
$\rightarrow -90^\circ \quad \text{se } T < 0$

● In  $\omega = \frac{1}{|T|}$

  $\arg(1 + j\omega T)$

$= 45^\circ \quad \text{se } T > 0$

$= -45^\circ \quad \text{se } T < 0$



$$(D) \quad \arg(1 + j\omega T) + \arg(1 + j\omega T^*)$$

$$\hookrightarrow \arg(1 + j\omega T) + \arg(1 + j\omega T^*) = \arg\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n}j\omega - \frac{1}{\omega_n^2}\omega^2\right)$$

- Se  $\omega \rightarrow 0$

$$\hookrightarrow \arg\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_n}j\omega - \frac{1}{\omega_n^2}\omega^2\right) \simeq \arg(1) = 0^\circ$$

- Se  $\omega \rightarrow \infty$

$$\hookrightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arctg \frac{2\xi\omega/\omega_n}{1 - \omega^2/\omega_n^2} = 0^\circ + \begin{cases} +180^\circ & \text{se } \xi > 0 \\ -180^\circ & \text{se } \xi < 0 \end{cases}$$

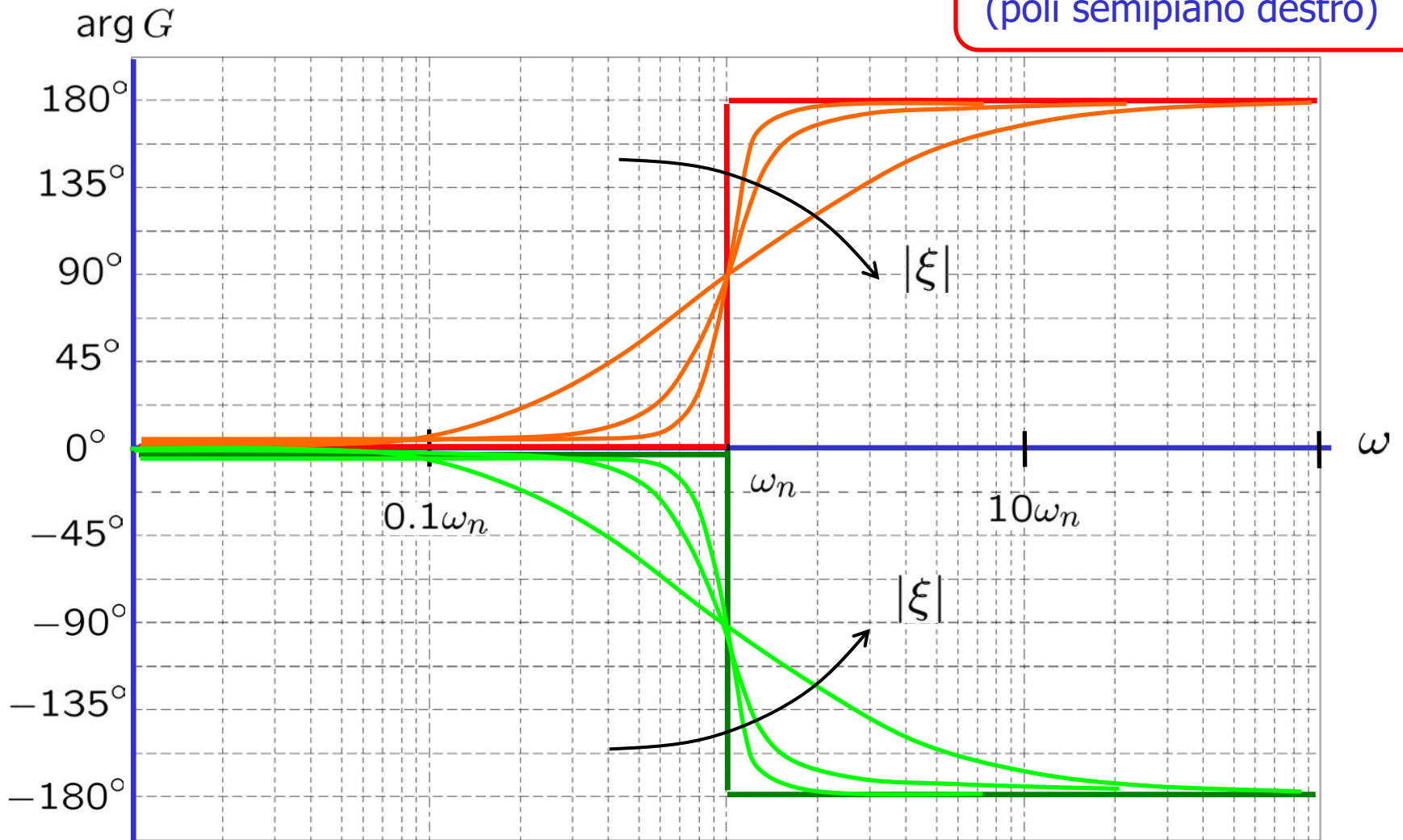
- In  $\omega = \omega_n$

$$\hookrightarrow \arg\left(j \frac{2\xi\omega_n}{\omega_n}\right) = 90^\circ \quad \text{se } \xi > 0$$

$$= -90^\circ \quad \text{se } \xi < 0$$



zeri semipiano sinistro  
(poli semipiano destro)



zeri semipiano destro  
(poli semipiano sinistro)

## - Regole per il tracciamento del diagr. asint. della fase

- Valore iniziale  $\arg(\mu) - g 90^\circ$
- Cambi di valore in corrispondenza di poli e zeri:

	semipiano sinistro	semipiano destro
poli	$-90^\circ$	$+90^\circ$
zeri	$+90^\circ$	$-90^\circ$

## - Esempio 1

$$G(s) = \frac{100(1 + 10s)}{s(1 + 2s)(1 + 0.4s + s^2)}$$

$$g = 1$$

$$\mu = 100 \implies \mu_{\text{dB}} = 40\text{dB}$$

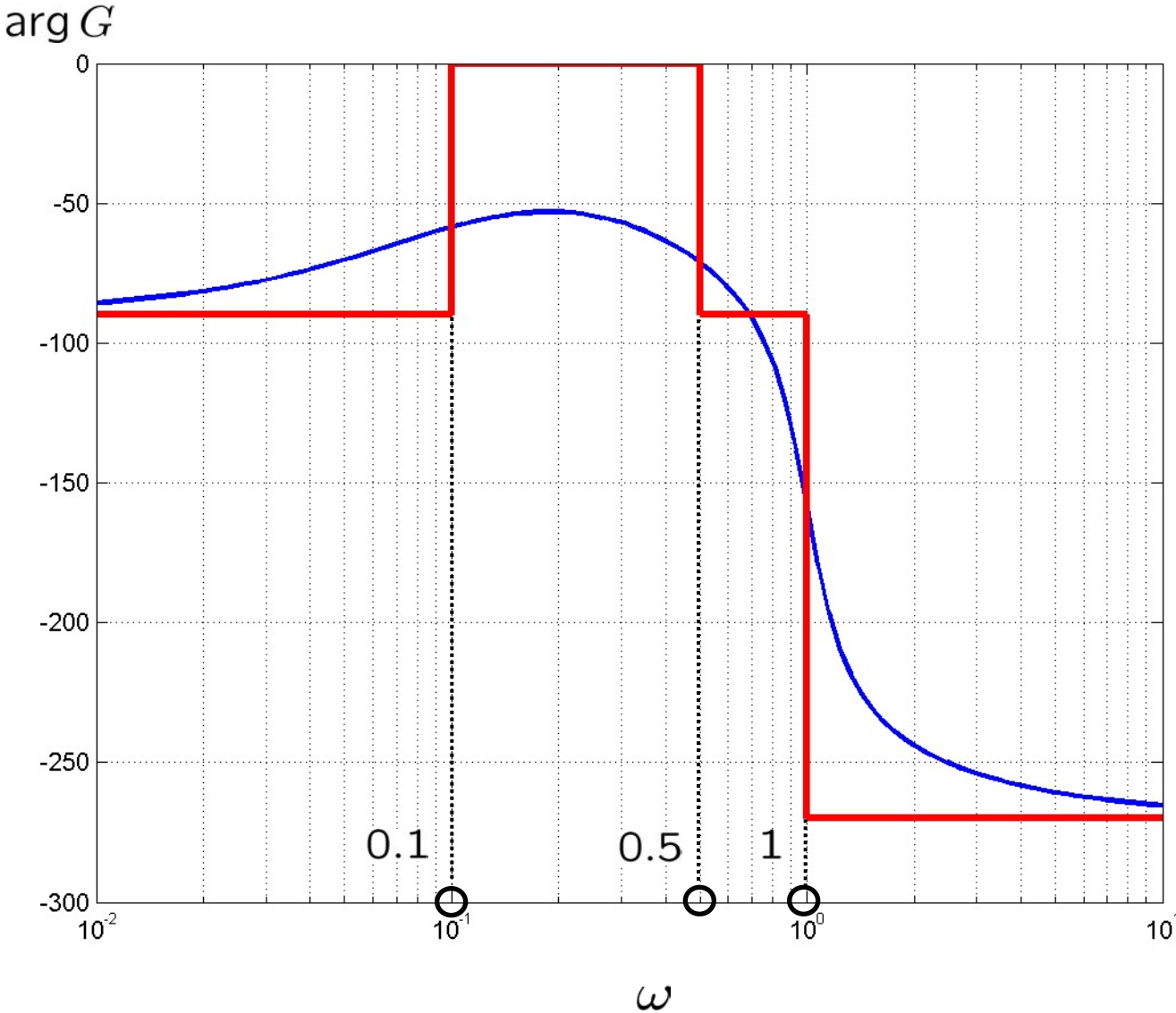
$$z_1 = -0.1$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = -0.5$$

$$p_{3,4} = -0.2 \pm j\sqrt{0.96}$$

$$\omega_n = 1; \xi = 0.2$$



## - Esempio 2

$$G(s) = \frac{100(1 + 10s)}{s(1 + s)^2}$$

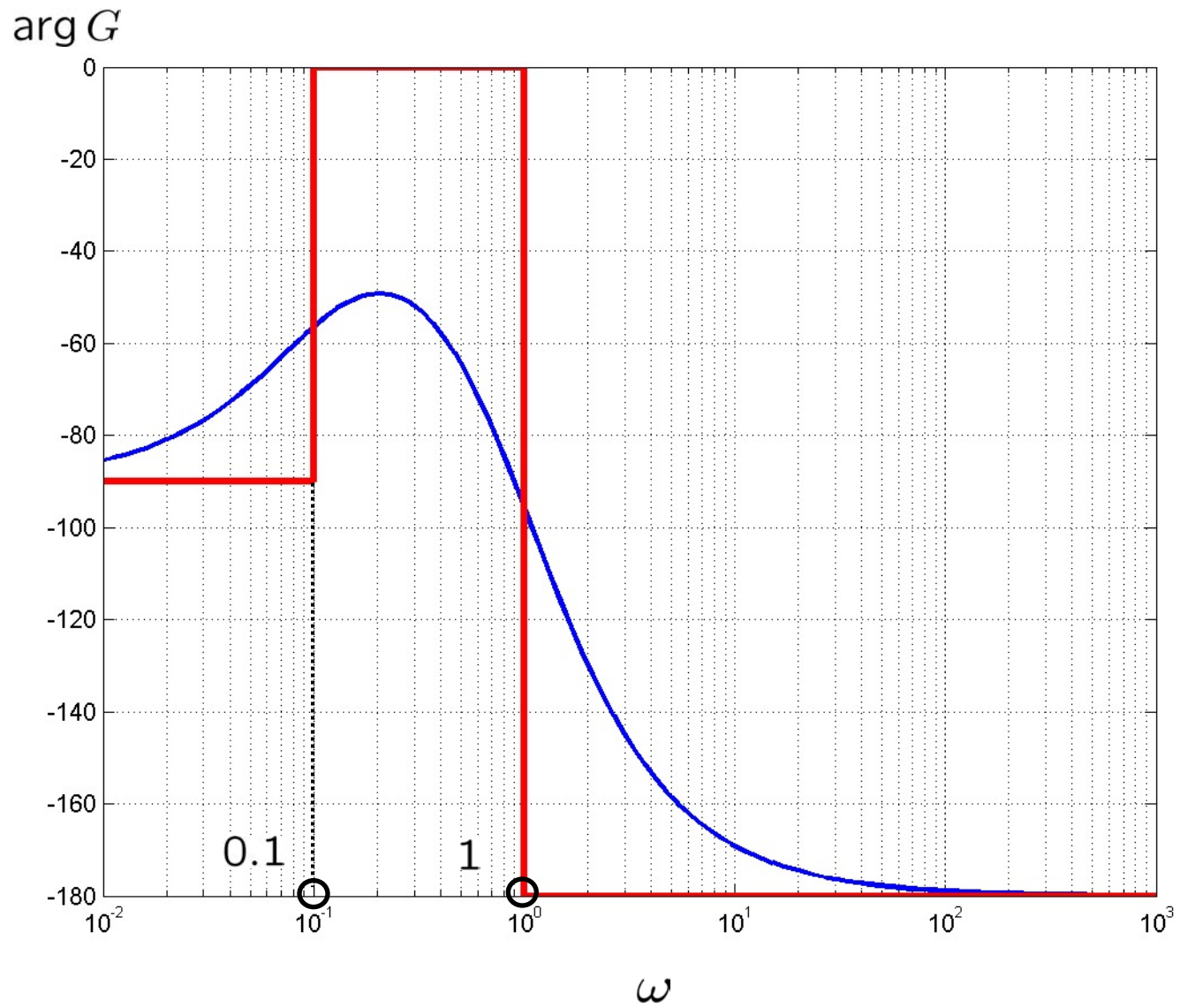
$$g = 1$$

$$\mu = 100 \implies \mu_{\text{dB}} = 40\text{dB}$$

$$z_1 = -0.1$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = p_3 = -1$$



### - Esempio 3

$$G(s) = \frac{0.1s(1+s)}{(1+5s)^2(1+0.2s)(1-0.1s)}$$

$$g = -1$$

$$\mu = 0.1 \implies \mu_{\text{dB}} = -20\text{dB}$$

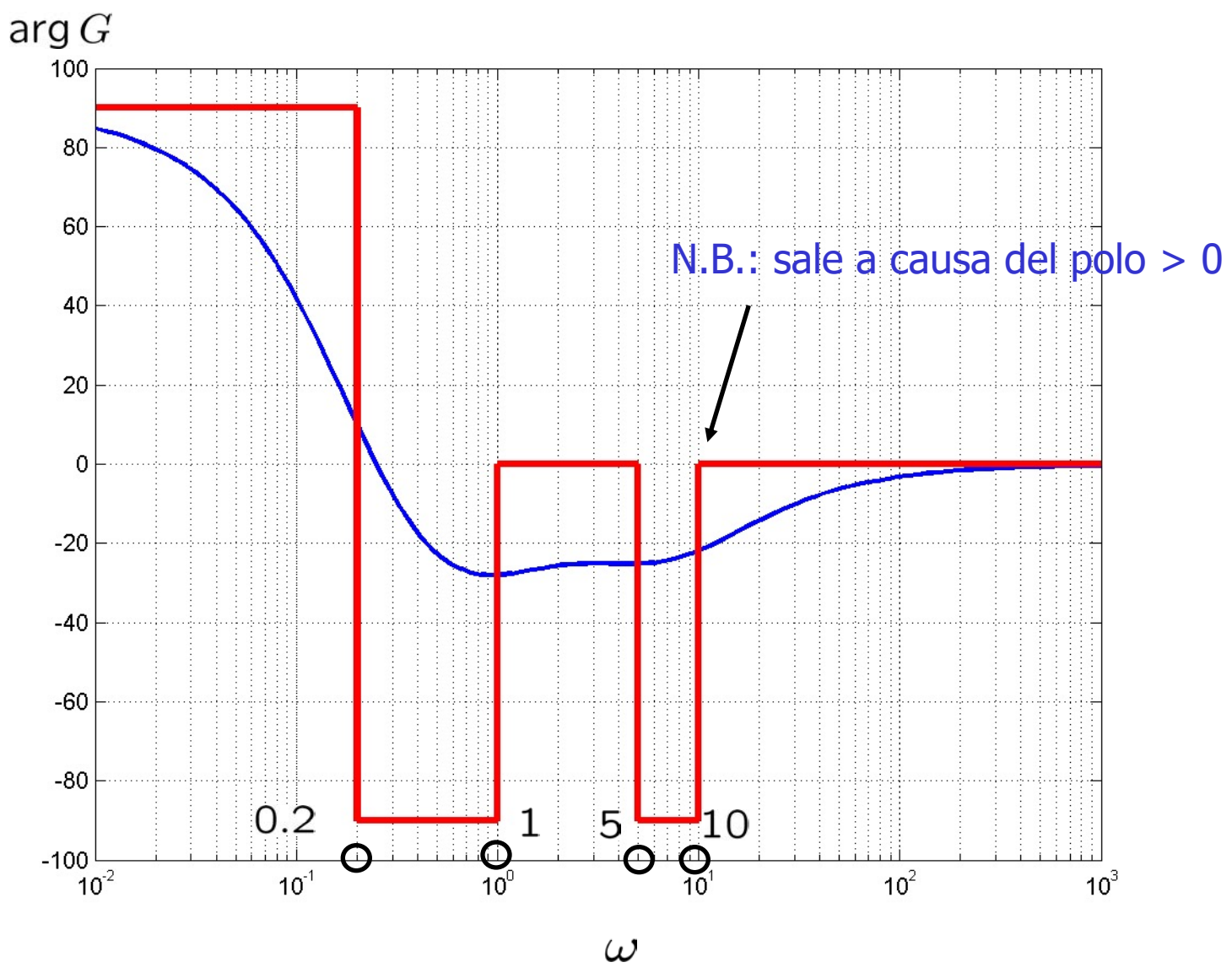
$$z_1 = 0$$

$$z_2 = -1$$

$$p_1 = p_2 = -0.2$$

$$p_3 = -5$$

$$p_4 = +10$$





**- Esempio 4**

$$G'(s) = \frac{50(1 + 0.4s)}{(1 + 10s)(1 + 0.2s + s^2)}$$

$$G''(s) = \frac{50(1 + 0.4s)}{(1 + 10s)(1 + 1.6s + s^2)}$$

$$g = 0$$

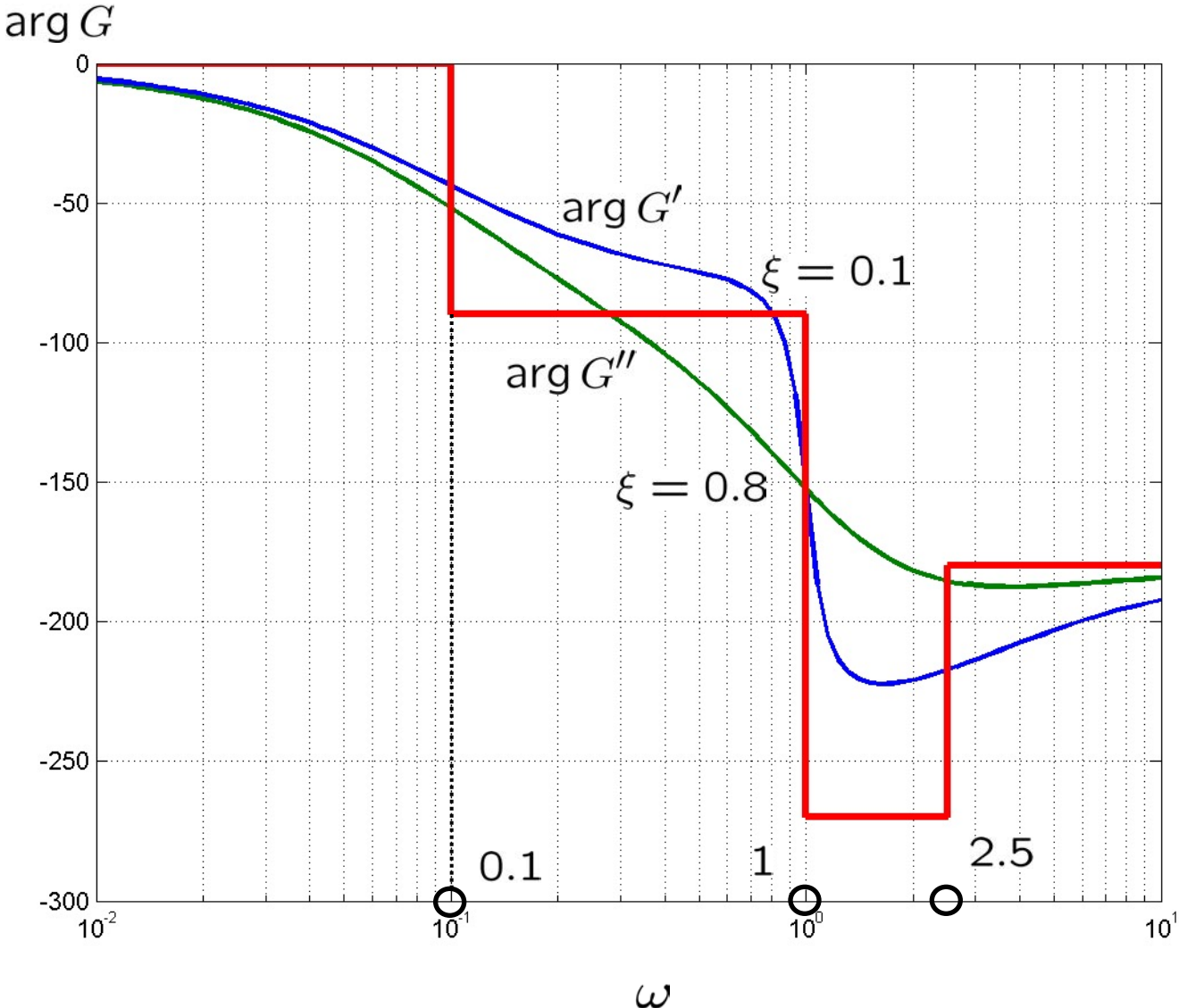
$$\mu = 50 \implies \mu_{\text{dB}} \simeq 34\text{dB}$$

$$z_1 = -2.5$$

$$p_1 = -0.1$$

$$p'_{2,3} = -0.1 \pm j\sqrt{0.99}; \omega_n = 1, \xi = 0.1$$

$$p''_{2,3} = -0.8 \pm j\sqrt{0.36}; \omega_n = 1, \xi = 0.8$$



## - Legami tra $|G(j\omega)|$ e $\arg G(j\omega)$

- In generale nessuno
- Per sistemi a fase minima:
  - formula di Bode

$\arg G(j\omega)$  in funzione di  $|G(j\omega)|$

- legame tra i diagrammi asintotici

## - Sistema a fase minima

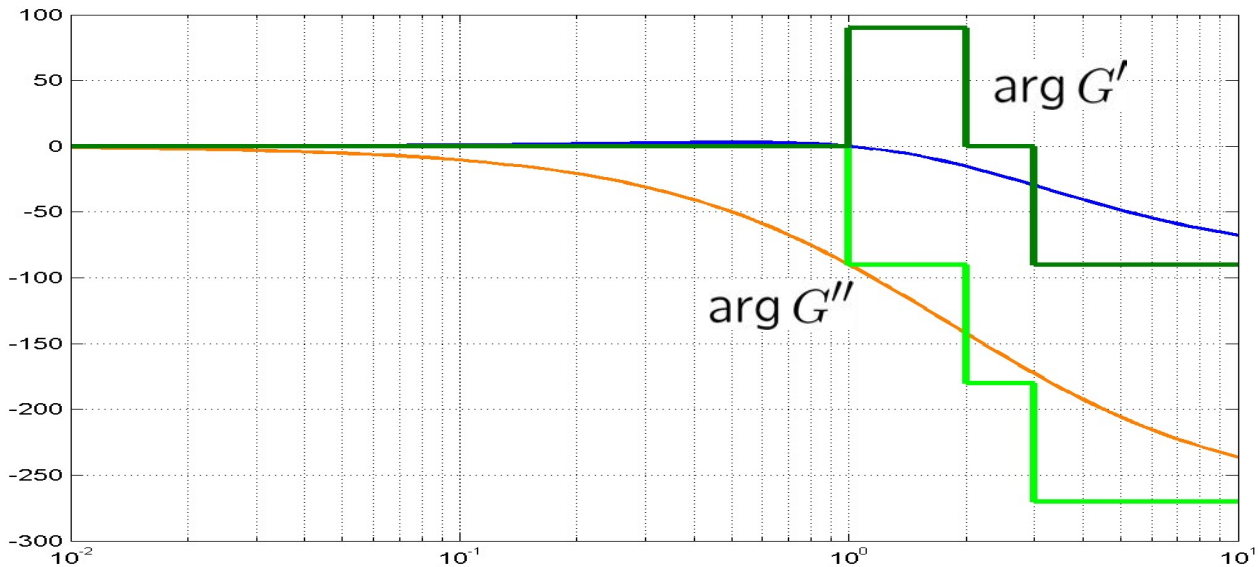
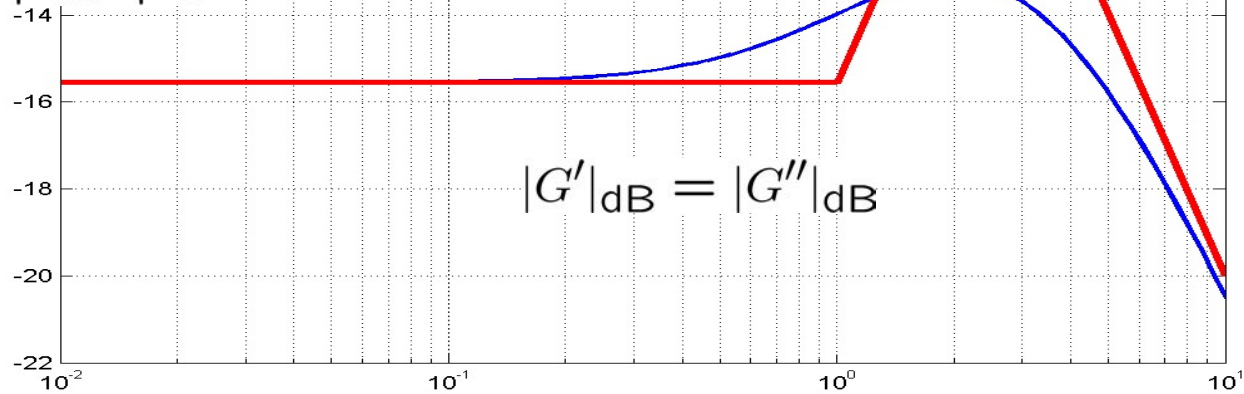
$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_{i=1}^m (1 + sT_i)}{\prod_{i=1}^n (1 + s\tau_i)}$$

- Guadagno  $\mu > 0$
- Poli e zeri con.  $\text{Re} < 0$  (reali o complessi coniugati)
- Poli o zeri per  $s = 0$

La funzione di trasferimento di un sistema a fase minima non deve contenere poli o zeri a parte reale positiva oppure immaginari puri, eccetto l'origine.

$$G'(s) = \frac{1 + s}{s^2 + 5s + 6}$$

$$G''(s) = \frac{1 - s}{s^2 + 5s + 6}$$



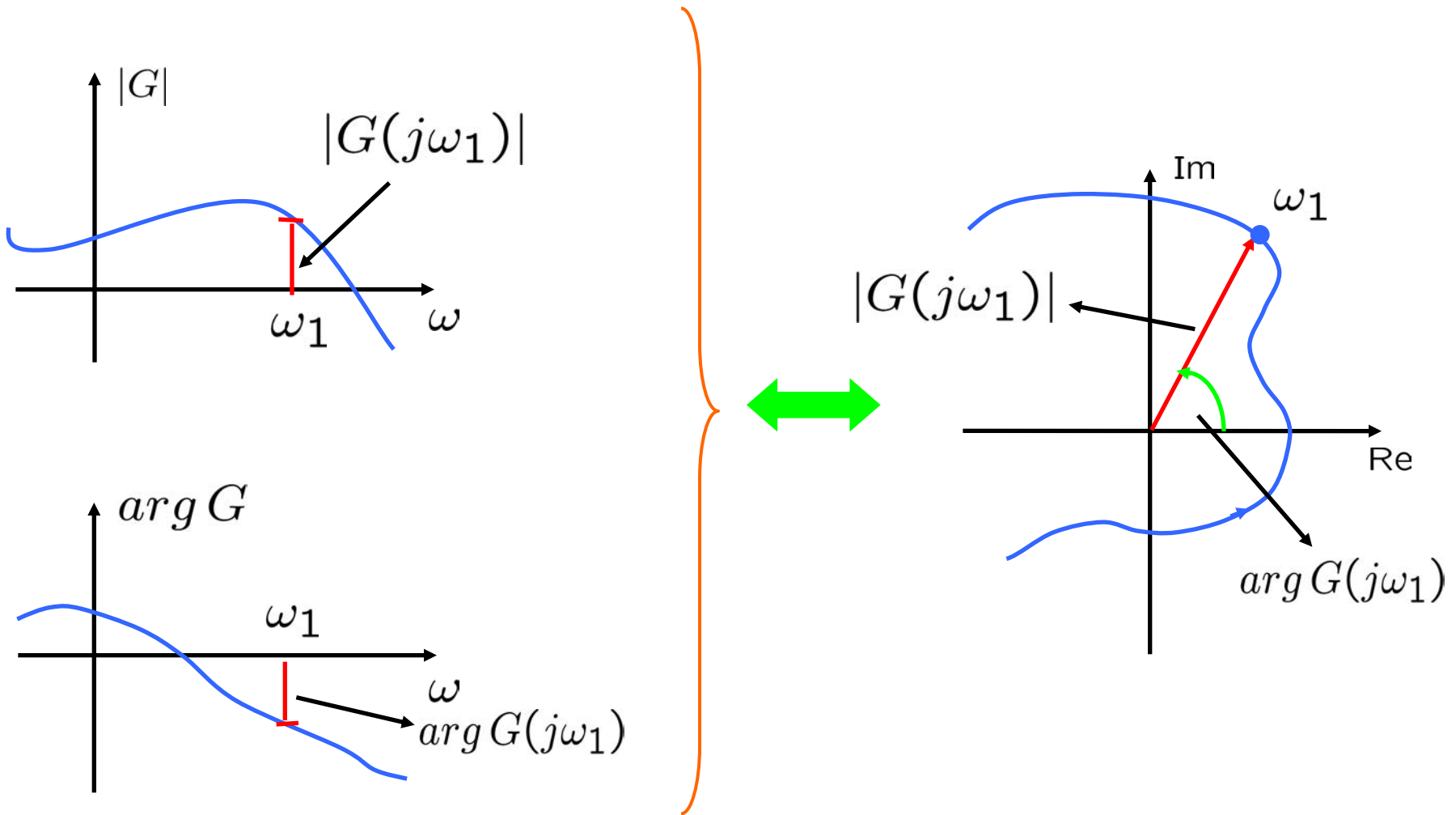
- **Legami tra**  $|G(j\omega)|$  **e**  $\arg G(j\omega)$

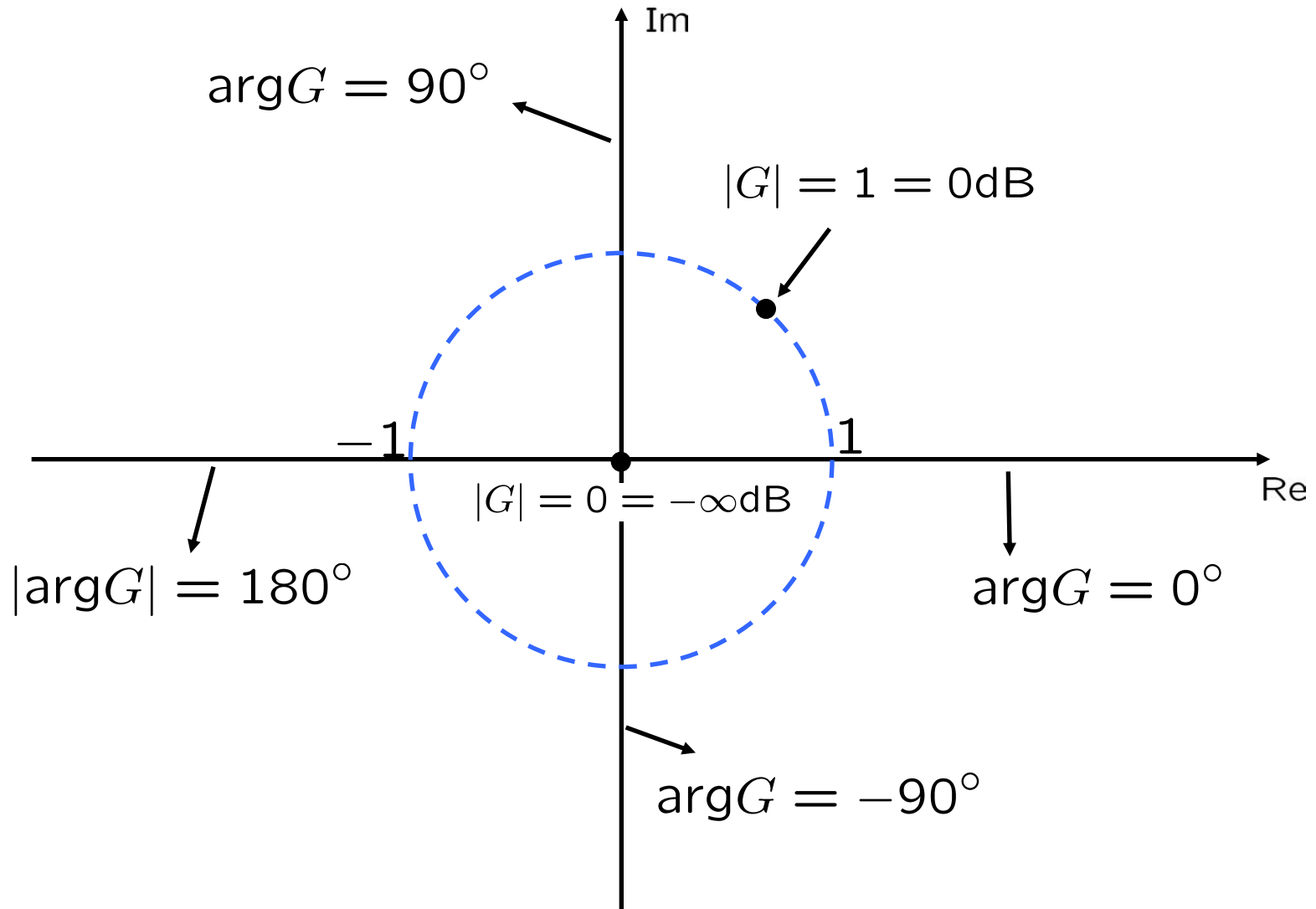
Per sistemi a fase minima:

	Pendenza $ G(j\omega) $	Valore $\arg G(j\omega)$
Polo	$-1$	$-90^\circ$
Zero	$+1$	$+90^\circ$

# - Diagrammi polari

$$G(j\omega), \quad \omega \geq 0$$







## - Esempio 1

$$G(s) = \frac{10}{(1 + 10s)(1 + 2s)}$$

$$\mu = 10 \implies \mu_{dB} = 20dB$$

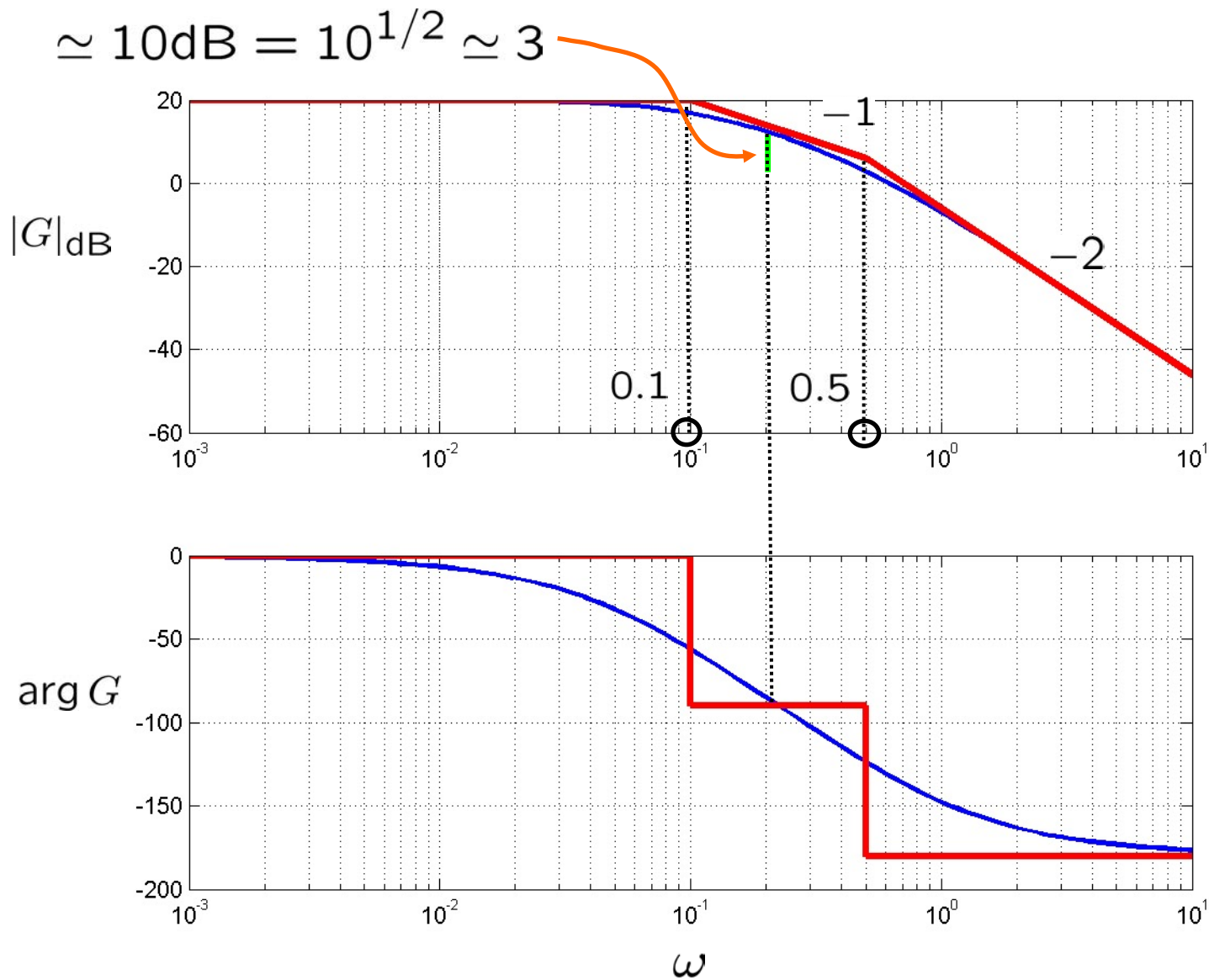
$$g = 0$$

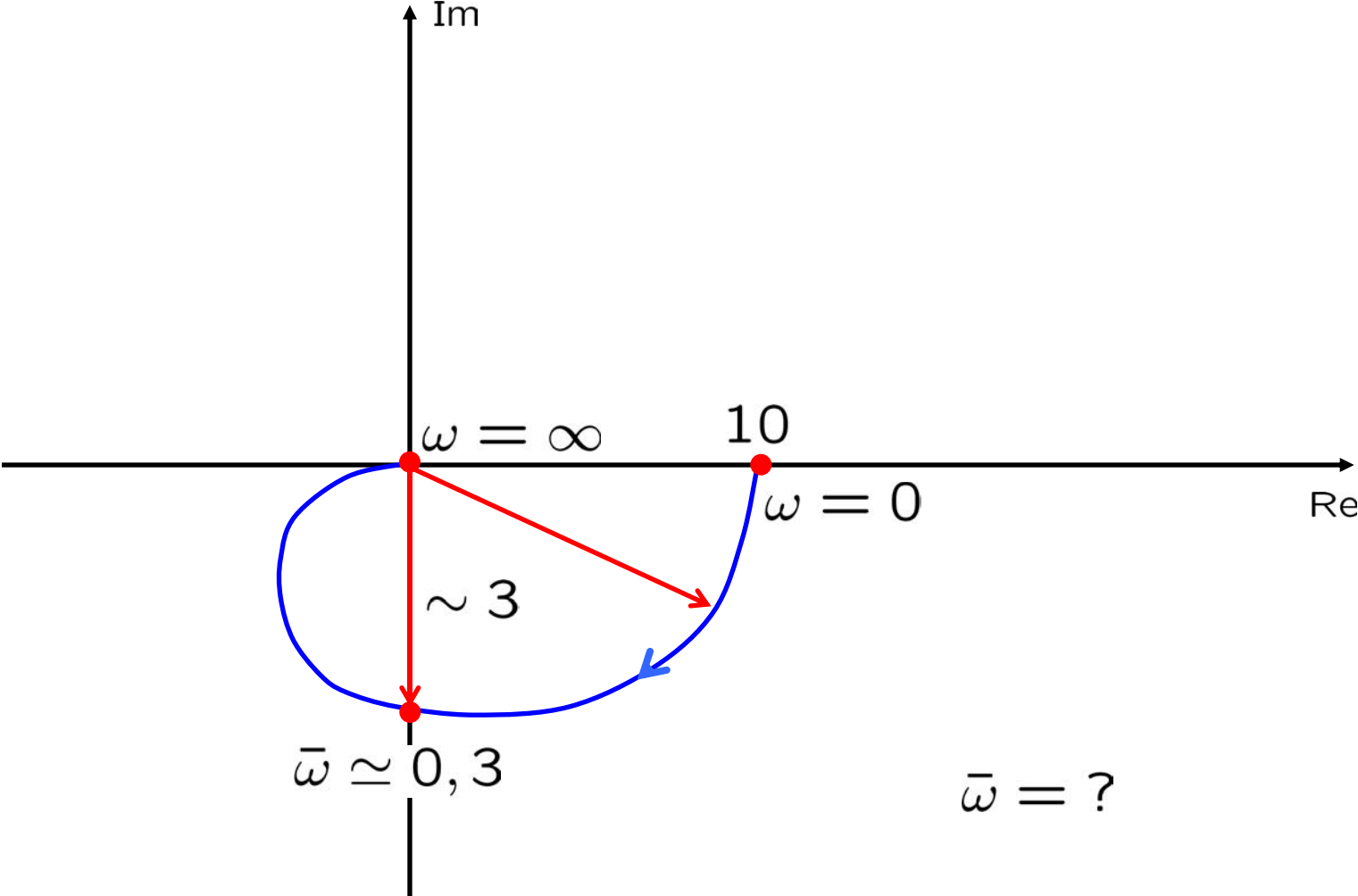
$$\tau_1 = 10$$

$$\omega_1 = 0.1$$

$$\tau_2 = 2$$

$$\omega_2 = 0.5$$





## - Esempio 2

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

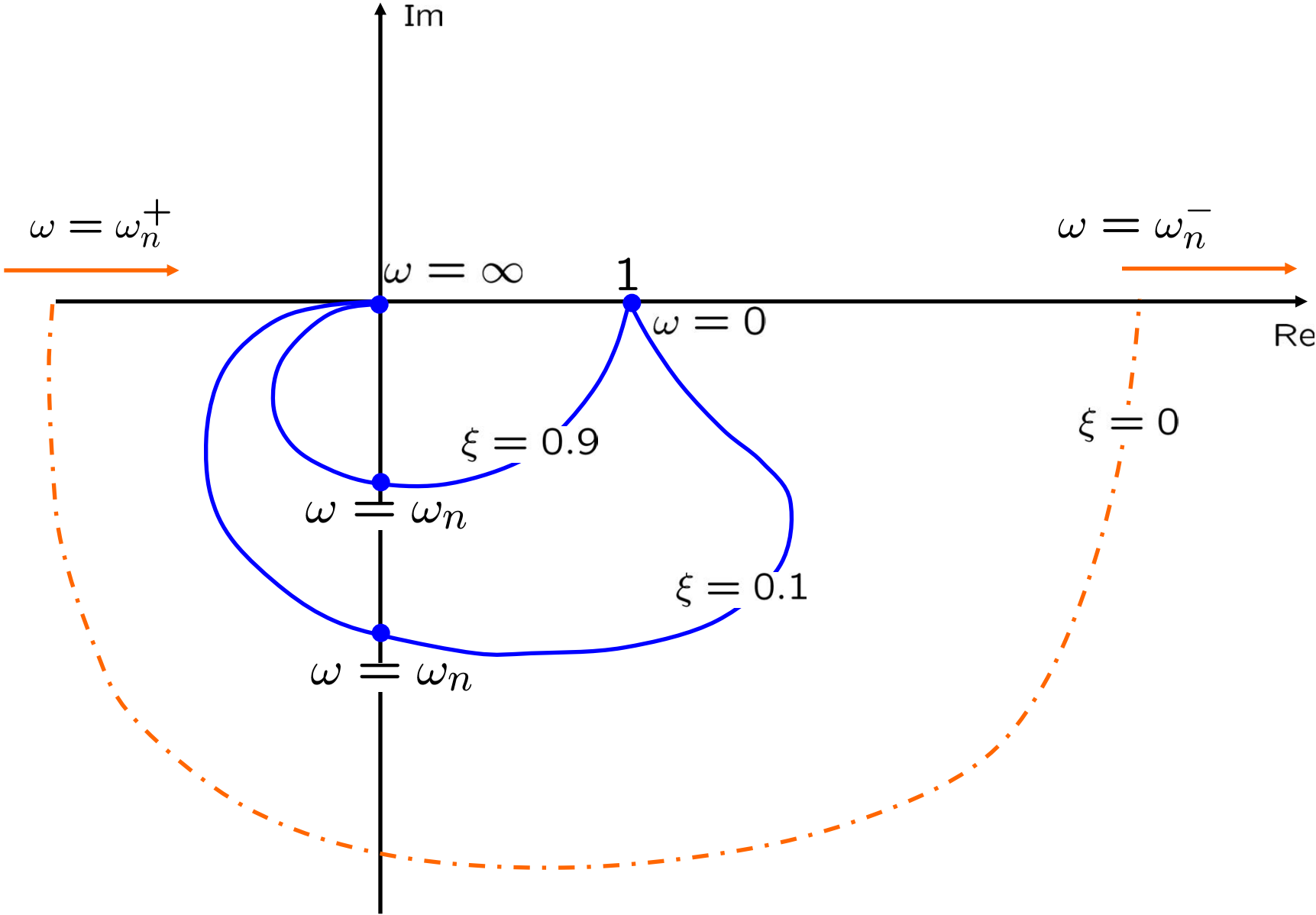
$$\mu = G(0) = 1$$

$$\xi = 0.9$$

$$g = 0$$

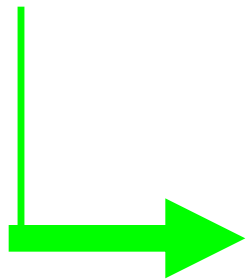
$$\xi = 0.1$$

$$\xi = 0$$



$$\xi = 0 \quad G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2}$$



E' reale

per  $\omega < \omega_n$

per  $\omega > \omega_n$

### - Esempio 3

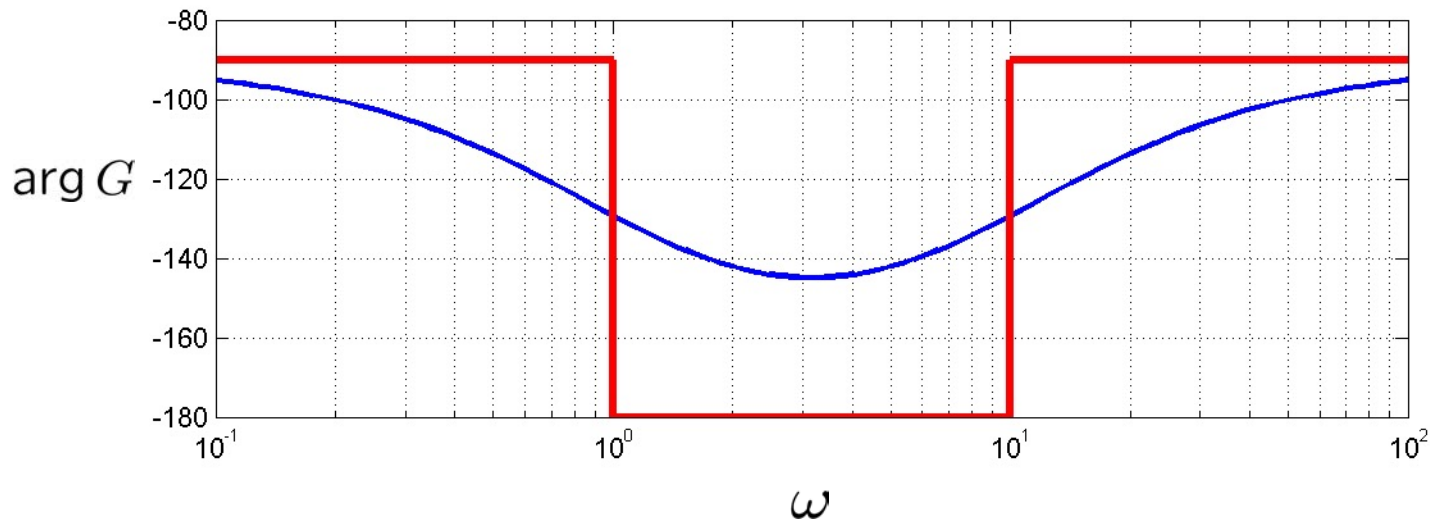
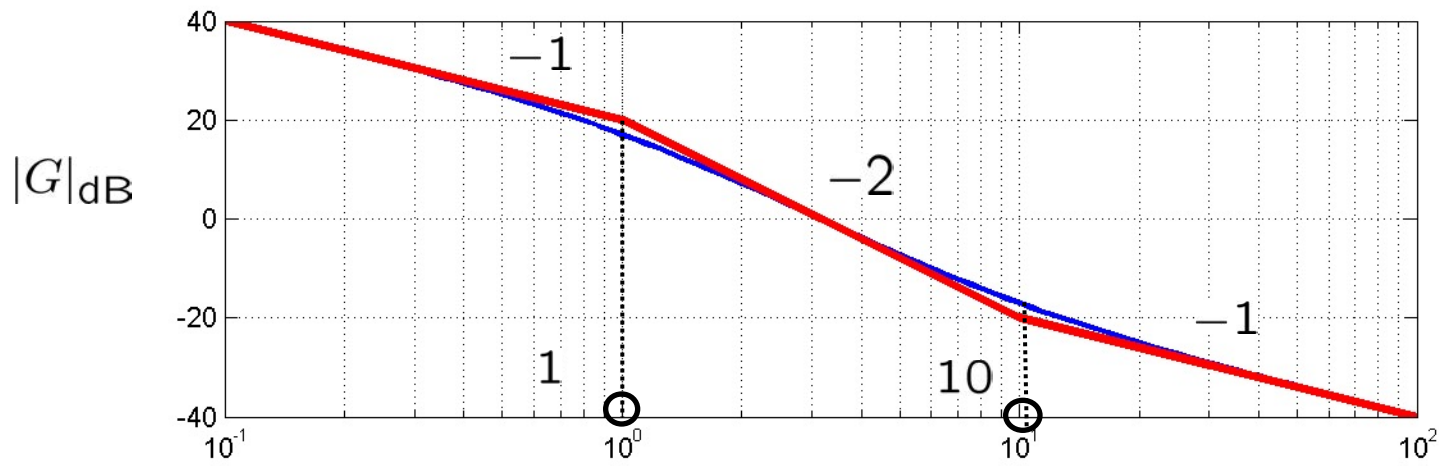
$$G(s) = \frac{s + 10}{s(s + 1)} = \frac{10(1 + \frac{s}{10})}{s(1 + s)}$$

$\omega = 10$

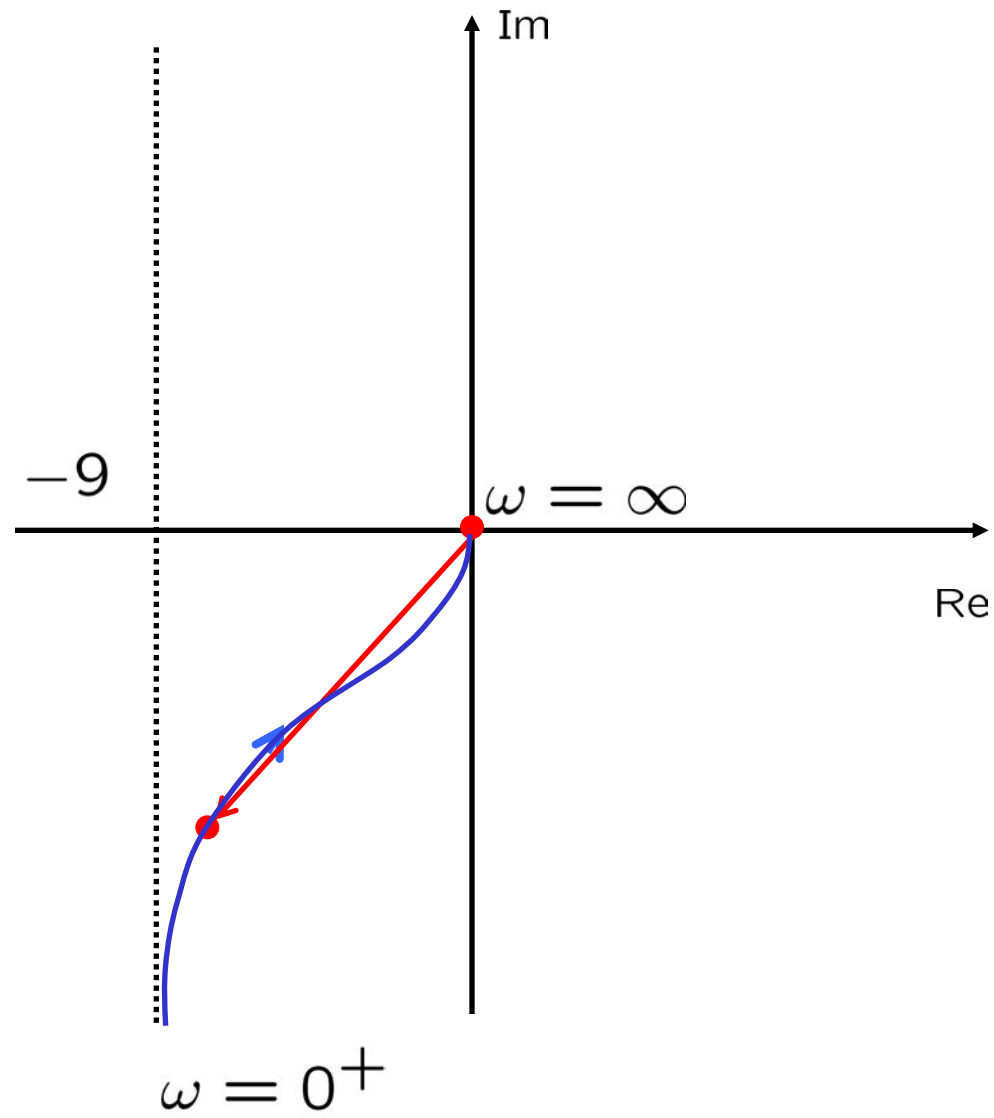
$\omega = 1$

$$g = 1$$

$$\mu = 10 \implies \mu_{\text{dB}} = 20\text{dB}$$







## - Compito a casa:

valutare la posizione dell' asintoto

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}(G(j\omega)) = \dots = -9$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}(G(j\omega)) = \dots$$

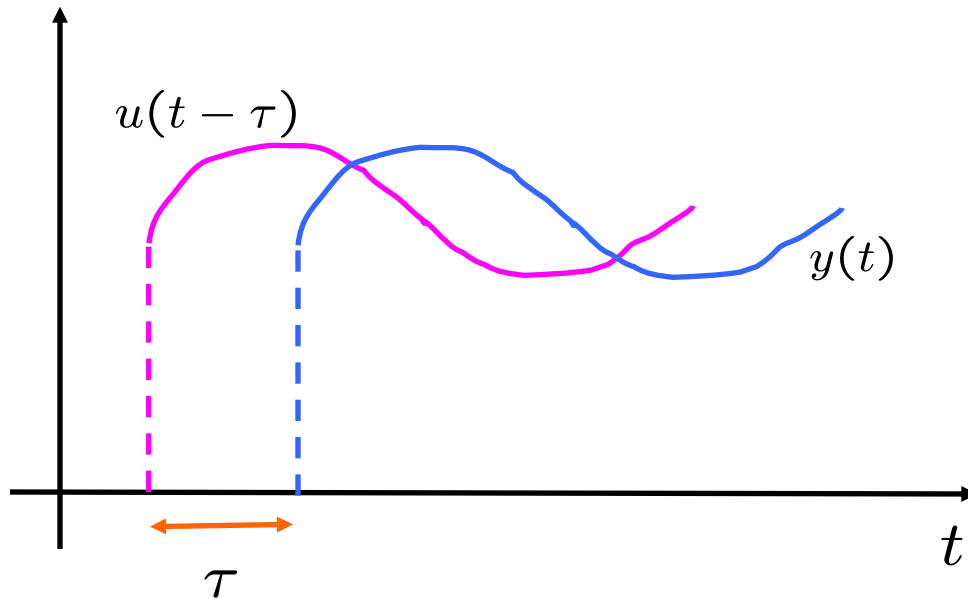
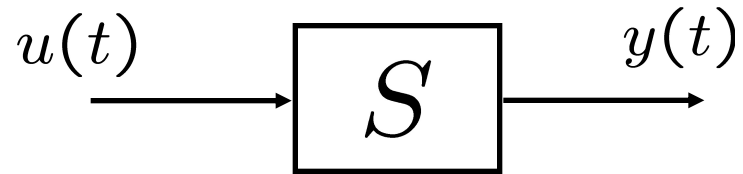
$$G(j\omega) = \frac{j\omega + 10}{j\omega(j\omega + 1)} = \frac{-\omega + 10j}{-\omega(j\omega + 1)} =$$

$$= \frac{(-\omega + 10j)(1 - j\omega)}{-\omega(1 + \omega^2)} = \frac{-\omega + 10\omega + j(10 + \omega^2)}{-\omega(1 + \omega^2)}$$

-9

$\omega \rightarrow 0$

- Ritardo di tempo



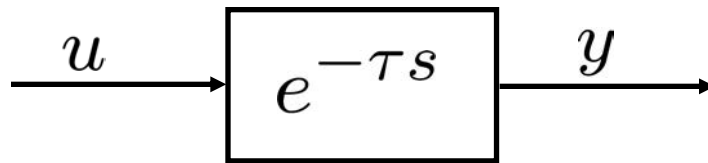
$$y(t) = u(t - \tau)$$

↑  
Ritardo

- Funzione di trasferimento

$$Y(s) = \mathcal{L}\{u(t - \tau)\} = \underbrace{e^{-\tau s}}_{G(s)} \cdot U(s)$$

$G(s)$  → Non è  
razionale



Guadagno statico:

$$G(0) = 1 = \frac{\bar{y}}{\bar{u}}$$

- Risposta alla sinusoide

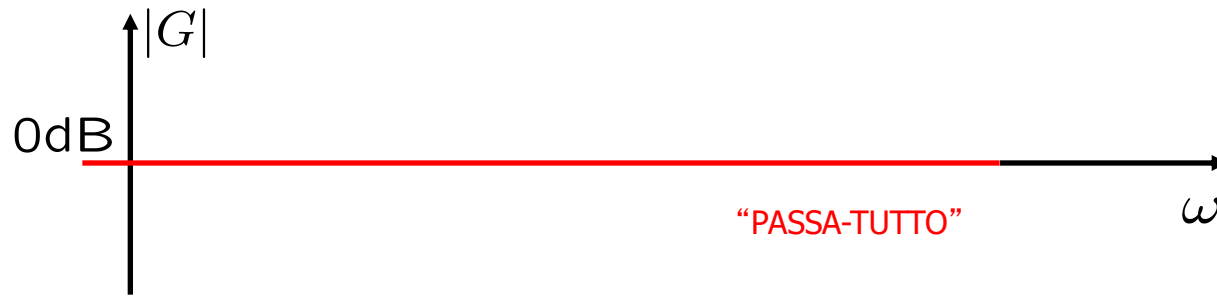
$$u(t) = A \sin(\omega t)$$

$$\hookrightarrow y(t) = A \sin[\omega(t - \tau)]$$

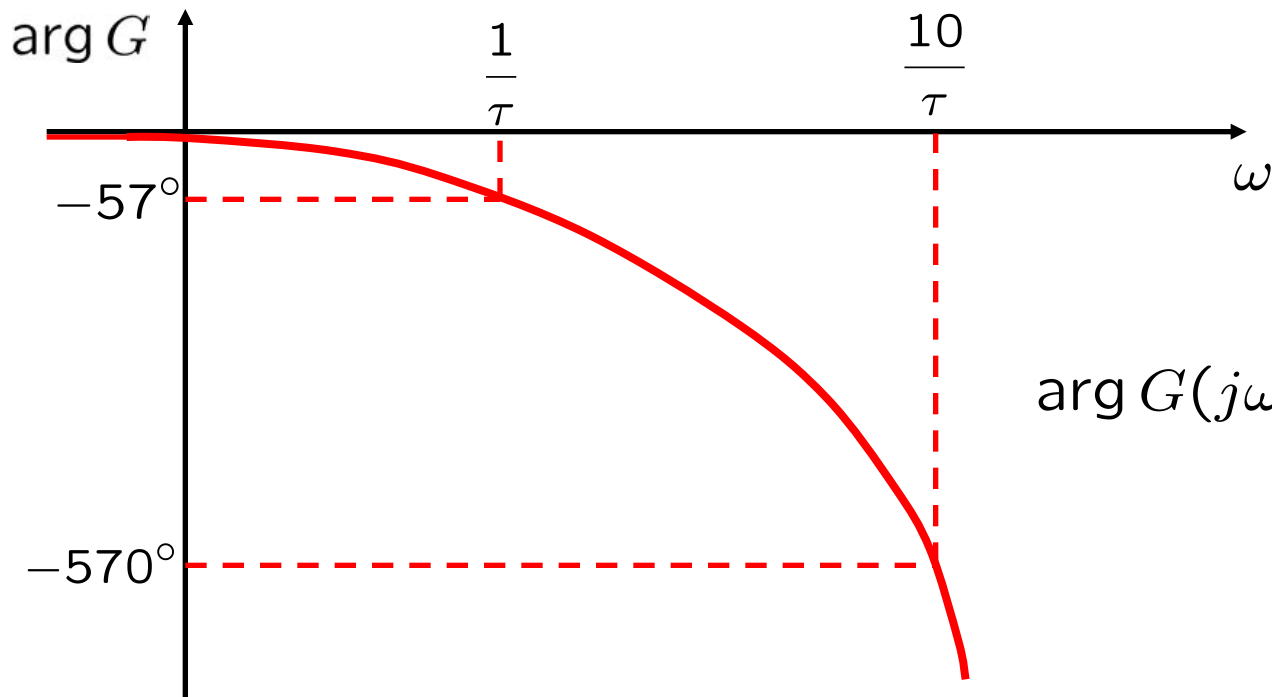
$$= \underbrace{1}_{|G(j\omega)|} \cdot A \sin(\omega t - \underbrace{\omega\tau}_{\arg G(j\omega)})$$

VALE IL TEOREMA R.I.F.!!!!!!

- Diagramma di Bode del modulo

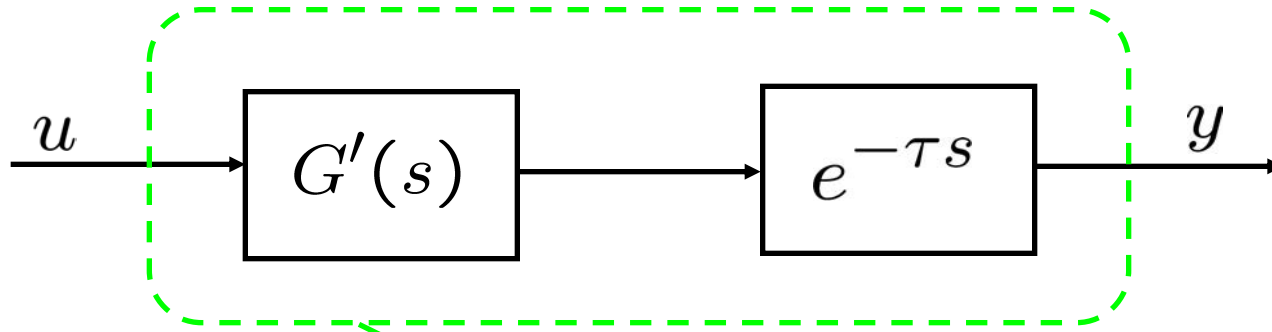


- Diagramma di Bode della fase



$$\arg G(j\omega) = -\omega\tau \frac{180}{\pi}$$

- Sistemi con ritardo



$$G(s) = G'(s) \cdot e^{-\tau s}$$

$$|G(j\omega)| = |G'(j\omega)| \cdot \underbrace{|e^{j\omega\tau}|}_{1} = |G'(j\omega)|$$

$$\arg G(j\omega) = \arg G'(j\omega) - \omega\tau \frac{180}{\pi}$$