MECCANICA RAZIONALE

Ing Civile & Ambientale
Navale

19 aprile 2021

Problema della dinamica.

Principio di D'Alembert

+

Principio dei lavori virtuali

$\Downarrow$

Equazioni di Lagrange

- caso non conservativo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} = Q_i$$

$$\underline{q} = (q_1, \dots, q_\ell)$$

• caso conservativo : $Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$

$$\mathcal{L} = K - V$$ funzione lagrangiana

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \rightarrow$$ equazioni del moto.

Equazioni Cardinali della Statica

$\longrightarrow$ equazioni cardinali della dinamica.

$$\underline{P} = \sum_{B \in S}' m_B \underline{v}_B = M \underline{v}_G$$ quantità di moto del sistema

$$\underline{L}(O) = \sum_{B \in S}' (\underline{x}_B - \underline{x}_O) \wedge m_B \underline{v}_B$$

momento angolare del sistema

ECD :

$$\underline{R}^e = \frac{d}{dt} \underline{P}$$

$$\underline{M}^e(O) = \frac{d}{dt} \underline{L}(O) + \underline{v}_O \wedge \underline{P}$$

→ K energia cinetica

$\underline{L}$ momento angolare

Corpo rigido

Energia cinetica

- moto rigido generico

$$K = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot I_G(\underline{\omega})$$

- moto rigido con punto fisso O

$$K = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot I_O(\underline{\omega})$$

- moto rigido con asse fisso r

$$K = \frac{1}{2} I_r \omega^2$$

- moto rigido di traslazione

$$K = \frac{1}{2} M v_G^2$$

→ rigido piano, $\underline{\omega} = \omega \, \underline{e}_3$

→ $I_{3,O}$

Momento angolare per un corpo rigido

- se $O \in R$

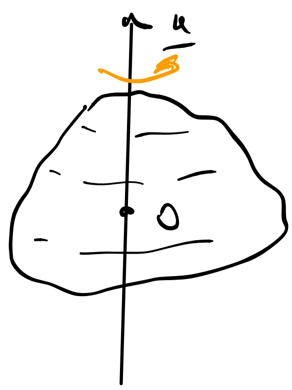
$$\underline{L}(O) = M(\underline{x}_G - \underline{x}_O) \wedge \underline{v}_O + I_O(\underline{\omega})$$

- se $O \notin R$, prendiamo $A \in R$

$$\underline{L}(O) = \underline{L}(A) + (\underline{x}_A - \underline{x}_O) \wedge M\underline{v}_G$$

Sappiamo calcolare K, $\underline{L}(O)$ per un corpo rigido.

Applicazione: corpo rigido in rotazione attorno ad un asse fisso.



rigido in rotazione fissato da una cerniera cilindrica in O

Prendiamo φ coordinata libera: angolo di rotazione.

Equazioni cardinali della dinamica

$$\underline{R}^e = \underbrace{\underline{R}^{e,a}}_{\text{attive}} + \underline{F}_0^r = \dot{\underline{P}}$$

attive

forze di reazione in O (3 incognite)

$$\underline{M}^e(O) = \underline{M}^{e,a}(O) + \underline{\mu}_0^r = \frac{d}{dt}\underline{L}(O)$$

attive   momento di reazione

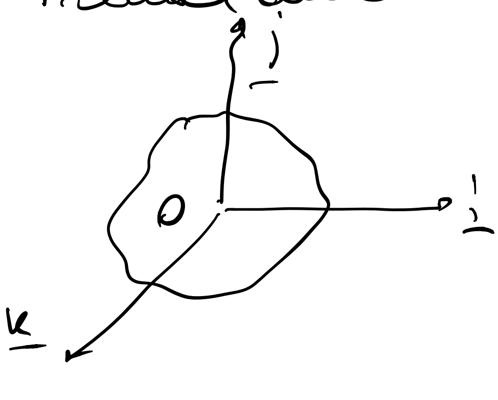
$\underline{\mu}_0^r$: assumiamo la cerniera liscia

non c'è componente di $\underline{\mu}_0^r$ diretto lungo l'asse di rotazione : $\underline{\mu}_0^r \cdot \underline{u} = 0$

→ solo due incognite

Incognite : φ + 5 incognite di reazione

Prendiamo



$\underline{j} = \underline{u}$ $S(O; \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$

terna solidale

$$\underline{L}(O) = J_O(\underline{\omega}) =$$

$$(\underline{\omega} = \dot{\varphi}\,\underline{j})$$

$$= \dot{\varphi}\, I_0(\underline{u}) = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \dot{\varphi} \left(I_{12}\, \underline{i} + I_{22}\, \underline{j} + I_{23}\, \underline{k} \right)$$

Ricordiamo: supponiamo $\underline{z}$ vettore fisso in S. $\underline{z} = \underline{x}_A - \underline{x}_B$

$$\frac{d}{dt}\underline{x}_A = \frac{d}{dt}\underline{x}_B + \underline{\omega} \wedge (\underline{x}_A - \underline{x}_B)$$

(prendendo B come polo)

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\underline{z} = \underline{\omega} \wedge \underline{z}$$

Allora $\frac{d}{dt}\underline{L}(0) = \frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}\, I_0(\underline{u}) \right)$

$$\frac{d}{dt}\underline{L}(0) = \ddot{\varphi}\, I_0(\underline{u}) + \dot{\varphi}\, \underline{\omega} \wedge I_0(\underline{u})$$

$$= \ddot{\varphi}\, I_0(\underline{u}) + \dot{\varphi}^2\, \underline{u} \wedge I_0(\underline{u})$$

$$= I_0(\underline{\dot{\omega}}) + \underline{\omega} \wedge I_0(\underline{\omega})$$

$$\frac{d}{d\tau}\underline{L}(O) = \ddot{\varphi}\, I_O(\underline{u}) + \dot{\varphi}^2\, \underline{u} \wedge I_O(\underline{u})$$

$$= \ddot{\varphi}\left(I_{12}\,\underline{i} + I_{22}\,\underline{j} + I_{23}\,\underline{k}\right) +$$

$$+ \dot{\varphi}^2\, \underbrace{\underline{u}}_{=\underline{j}} \wedge \left(I_{12}\,\underline{i} + I_{22}\,\underline{j} + I_{23}\,\underline{k}\right)$$

$$= \ddot{\varphi}\left(I_{12}\,\underline{i} + I_{22}\,\underline{j} + I_{23}\,\underline{k}\right) +$$

$$+ \dot{\varphi}^2\left(-I_{12}\,\underline{k} + I_{23}\,\underline{i}\right)$$

$$= \left(I_{12}\,\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 I_{23}\right)\underline{i} + \ddot{\varphi}\, I_{22}\,\underline{j} +$$

$$+ \left(\ddot{\varphi}\, I_{23} - \dot{\varphi}^2 I_{12}\right)\underline{k}$$

Eq cardinale $\quad \underline{M}^{ea}_{(O)} + \underline{\mu}^e_O = \frac{d}{d\tau}\underline{L}(O)$

$\underline{i}$ $\quad \underline{M}^{ea}_{(O)}\cdot\underline{i} + \underline{\mu}_O\cdot\underline{i} = I_{12}\,\ddot{\varphi} + I_{23}\,\dot{\varphi}^2$

$\underline{j}$ $\quad \underline{M}^{ea}_{(O)}\cdot\underline{j} = I_{22}\,\ddot{\varphi}$

$\underline{k}$ $\quad \underline{M}^{ea}_{(O)}\cdot\underline{k} + \underline{\mu}_O\cdot\underline{k} = I_{23}\,\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 I_{12}$

Se $\underline{j}$ non è asse principale di inerzia (rispetto ad O) : I_{12} e I_{23} sono diversi da zero

$\rightarrow$ f_0^2 dipende dalla parte statica ($\underline{M}^{e,a}(O)$) e anche da ($\ddot{\varphi}, \dot{\varphi}^2, I_{12}, I_{23}$)

Momenti deviatori I_{12}, I_{23}

Tendono a far deviare l'asse di rotazione $\rightarrow$ influenzano le reazioni vincolari della cerniera

Se $\underline{u}$ è asse principale di inerzia

$$I_0(\underline{\omega}) = \dot{\varphi}\, I_0(\underline{u}) = \dot{\varphi}\, I_2\, \underline{u}$$

$$\frac{d}{dt}\underline{L}(O) = \ddot{\varphi}\, I_2\, \underline{u}$$

(perché $I_0(\underline{u}) = I_2\, \underline{u}$ e

quindi $\underline{u} \wedge I_0(\underline{u}) = 0$)

Notiamo: dalle eq. di Lagrange

$$K = \frac{1}{2} \underline{\omega} \cdot I_O(\underline{\omega}) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 I_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \underbrace{\frac{\partial K}{\partial \varphi}}_{=0} = Q = \underline{M}^{e,a}_{(O)} \cdot \underline{u}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I_2 \, 2\dot{\varphi}\right) =$$

$$= I_2 \ddot{\varphi} = \underline{M}^{e,a}_{(O)} \cdot \underline{u}$$

Seconda parte

Sistemi ad un grado di libertà con forze dipendenti solo dalla configurazione

$$\rightarrow \quad Q = Q(q)$$

Possiamo definire una energia potenziale

$$V = -\int Q(q)\, dq$$

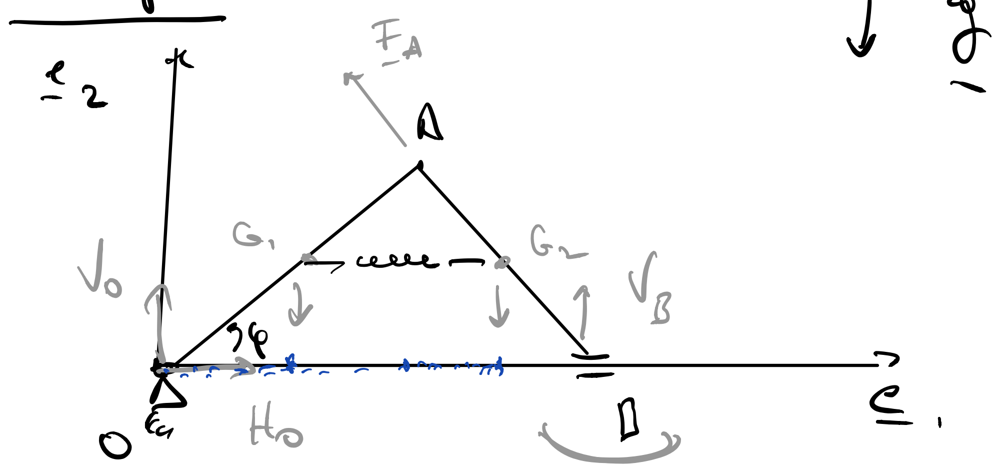
Scriviamo $\mathcal{L} = K - V$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

Energia: $K + V = E = (K + V)\big|_{t=0}$

due eq. per risolvere $\dot{q}^2$, $\ddot{q}$ come funzioni di q. Vediamo

Esempio



$\overline{OA} = \overline{AB} = \ell$

mono m

- Energia cinetica: l'abbiamo già calcolata

$$K = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\varphi}^2 \left(\frac{2}{3} + 2\sin^2\varphi\right)$$

- Energia potenziale

$$V_{peso} = 2 \, mg \frac{l}{2} \sin\varphi = mgl\sin\varphi$$

$$V_{molla} = \frac{c}{2} l^2 \cos^2\varphi$$

$$V_{follower} = \int (-F_A \underbrace{l \, d\varphi}_{\text{spostamento di } A}) = -F_A l \varphi$$

Allora

$$\mathcal{L} = K - V = \frac{1}{2} m l^2 \dot\varphi^2 \left(\frac{2}{3} + 2\sin^2\varphi \right)$$

$$- \left(mgl\sin\varphi + \frac{c}{2} l^2 \cos^2\varphi - F_A l \varphi \right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m l^2 \dot\varphi^2 \left(\frac{2}{3} + 2\sin^2\varphi \right)\right)$$

$$- \Big[2ml^2\dot\varphi^2 \sin\varphi\cos\varphi - mgl\cos\varphi +$$

$$+ \frac{c}{2} 2 l^2 \cos\varphi\sin\varphi + F_A l \Big]$$

$$= ml^2 \ddot\varphi \left(\frac{2}{3} + 2\sin^2\varphi \right) + ml^2\dot\varphi \, 4\sin\varphi\cos\varphi \, \dot\varphi$$

$$- 2ml^2\dot\varphi^2 \sin\varphi\cos\varphi + mgl\cos\varphi - cl^2\cos\varphi\sin\varphi$$

$$- F_A l = 0$$ equazione del moto

- conservazione dell'energia

$$K + V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 \left(\frac{2}{3} + 2 \sin^2 \varphi \right) + \left(\underbrace{mgl \sin \varphi + \frac{c}{2} l^2 \cos^2 \varphi - F_A l \varphi}_{V(\varphi)} \right)$$

$$= E = (K + V)\big|_{t=0}$$

Poniamo $t = 0$ $\begin{cases} \varphi(0) = \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(0) = \omega_0 \end{cases}$

$$E\big|_{t=0} = \frac{1}{2} m l^2 \omega_0^2 \left(\frac{2}{3} + 2 \sin^2 \varphi_0 \right) + mgl \sin \varphi_0 + \frac{c}{2} l^2 \cos^2 \varphi_0 - F_A l \varphi_0$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2}{m l^2 \left(\frac{2}{3} + 2 \sin^2 \varphi \right)} \left(E - V(\varphi) \right)$$

abbiamo risolto $\dot{\varphi}^2$ in funzione di φ

$$= f(\varphi)$$

Adesso possiamo riscrivere l'equazione del moto in modo da ricavare $\ddot{\varphi}$ in funzione di φ. Riscriviamo

$$m\ell^2\ddot{\varphi}\left(\frac{2}{3}+2\sin^2\varphi\right)+2m\ell^2\underbrace{\dot{\varphi}^2}_{=f(\varphi)}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$+mg\ell\cos\varphi-c\ell^2\cos\varphi\sin\varphi-F_A\ell=0$$

Allora, possiamo risolvere $\ddot{\varphi}$ in funzione di φ

$$\ddot{\varphi}=\frac{1}{m\ell^2\left(\frac{2}{3}+2\sin^2\varphi\right)}\Big[-2m\ell^2 f(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi$$

$$-mg\ell\cos\varphi+c\ell^2\sin\varphi\cos\varphi+F_A\ell\Big]=:g(\varphi)$$

Abbiamo

$$\begin{cases}\dot{\varphi}^2=f(\varphi) & \leftarrow\\ \ddot{\varphi}=g(\varphi) & \leftarrow\end{cases}$$

Calcolo della reazione vincolare in B come funzione di φ

$$\underline{M}^e(O)=\frac{d}{dt}\underline{L}(O)$$

$$\underline{L}(O)=m\ell^2\dot{\varphi}\,\underline{e}_3$$

$$\frac{d}{dt}\,\underline{L}(O) = m\ell^2\,\ddot{\varphi}\,\underline{e}_3$$

$$\underline{M}^e(O)\cdot\underline{e}_3 = V_B\,2\ell\cos\varphi + F_A\,\ell - mg\,\frac{\ell}{2}\cos\varphi - mg\,\frac{3}{2}\,\ell\cos\varphi$$

$$V_B\,2\ell\cos\varphi + F_A\,\ell - mg\,\ell\,2\cos\varphi = m\ell^2\,\ddot{\varphi}$$

Co

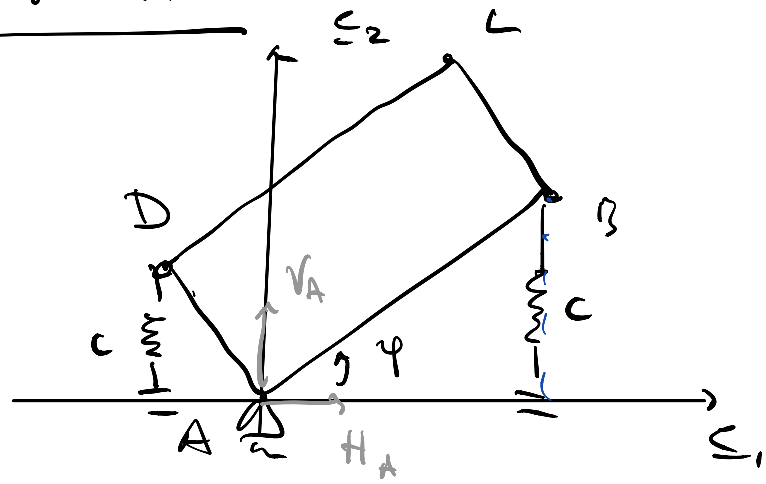
ECS $\underline{M}^e(O) = 0$

$$V_B = \frac{m\ell}{2\cos\varphi}\,\ddot{\varphi} + \frac{1}{2\ell\cos\varphi}\left(-F_A\,\ell + mg\,\ell\,2\cos\varphi\right)$$

$$= \underbrace{\frac{m\ell}{2\cos\varphi}\,g(\varphi)}_{\text{parte dinamica}} + \underbrace{\frac{1}{2\ell\cos\varphi}\left(-F_A\,\ell + 2mg\ell\cos\varphi\right)}_{\text{parte statica}}$$

V_B esplicitamente in funzione di φ, senza risolvere le equazioni del moto

Esercizio



lamina rettangolare

piano orizzontale

$\overline{AB} = 2\ell$

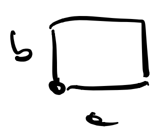
$\overline{BC} = \ell$

- eq. del moto
- conservazione energia
- reazioni in A

$$K = \frac{1}{2} I_{A,3}\,\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{m}{3}(\ell^2 + 4\ell^2)\right]\dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} m \ell^2 \dot{\varphi}^2\right)$$

$I_{33} = I_{11} + I_{22}$



$I_{33} = \frac{m}{3}(a^2 + b^2)$

$$V = \frac{c}{2} y_B^2 + \frac{c}{2} y_D^2 = \frac{c}{2}(2\ell)^2 \sin^2\varphi + \frac{c}{2}\ell^2\cos^2\varphi$$

$$= \frac{c}{2}\ell^2\left(3\sin^2\varphi + 1\right)$$

$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

Allora $\mathcal{L} = K - V = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} m \ell^2 \dot{\varphi}^2\right) +$

$+ \frac{c}{2}\ell^2\left(3\sin^2\varphi + 1\right)$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{5}{3} m \ell^2 \dot\varphi\right) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(-V)$$

$$= \frac{5}{3} m \ell^2 \ddot\varphi + 3\,\frac{c}{2}\,\ell^2\, 2 \sin\varphi \cos\varphi = 0$$

equazioni del moto

Energia: $E = K + V =$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} m \ell^2 \dot\varphi^2\right) + \frac{c}{2}\,\ell^2\left(3\sin^2\varphi + 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} m \ell^2 \omega_0^2\right) + \frac{c}{2}\,\ell^2\left(3\sin^2\varphi_0 + 1\right)$$

$$\begin{cases} \dot\varphi(0) = \omega_0 \\ \varphi(0) = \varphi_0 \end{cases}$$