Sistemi Dinamici Discreti

Michele Cirafici

DMG & INFN & IGAP, Trieste, Italy
Email: mcirafici@units.it

Dispense per uso interno - da ricontrollare

19 aprile 2021

Indice

1 Sistemi dinamici discreti

Consideriamo una funzione reale C^∞ data da $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Denotiamo con $f^n = f \circ \cdots \circ f$ la sua iterazione n-esima. In generale possiamo pensare ad f come ad un processo che prende uno stato inziale $x_0 \in \mathbb{R}$ e lo trasforma in un nuovo stato $x_1 \in \mathbb{R}$. Denotiamo con $x_n = f^n(x_0)$. L'orbita (in avanti, o *forward*) di f è definita come $\mathcal{O}^+ = \{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. Se la mappa f è invertibile possiamo definire l'orbita completa $\mathcal{O}^+ = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Un punto x_0 si dice punto fisso se $f(x_0) = x_0$. In questo caso la sua orbita è data dalla sequenza $x_0, x_0, x_0, \ldots$. Può capitare che un punto non sia fissato dalla mappa f, ma che il suo valore ritorni dopo n iterazioni, cioé $f^n(x_0) = x_0$. In questo caso parliamo di un punto periodico di periodo n, o un n-ciclo. In questo caso è spesso utile specificare quando il punto x_0 ha periodo *minimo* n, cioé n è il numero intero più piccolo per cui $f^n(x_0) = x_0$. La sequenza $x_0, x_1, \ldots, x_n$ si ripete sotto l'iterazione di f, e forma l'analogo di una orbita chiusa.

Esempio 1.1. *Consideriamo la funzione $g(x) = -x^3$. Ha un punto fisso in $g(0) = 0$, mentre $g(\pm 1) = \mp 1$, quindi ± 1 sono punti periodici di periodo 2, $g^2(\pm 1) = \pm 1$. Per un dato iniziale, ad esempio 3, le iterazioni prendono valori $3, -27, 19683, \ldots$.*

Per sistemi unidimensionali possiamo visualizzare le orbite usando il metodo dell'iterazione grafica. Sul piano (x, y) disegnamo il grafico della funzione $y = f(x)$, e la diagonale $y = x$. Partendo dal punto (x_0, x_0) sulla diagonale disegnamo una linea verticale fino a raggiungere il punto $(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$. Quindi disegnamo una linea orizzontale per trovare il punto (x_1, x_1). Un'altra linea verticale ci porta a $(x_1, f(x_1)) = (x_1, x_2)$, e così via.

Un punto x_0 è detto un pozzo (*sink*) o un punto fisso attrattivo se possiamo trovare un intorno $U \ni x_0$ tale che se $y_0 \in U$ allora $f^n(y_0) \in U$ $\forall n$, e $f^n(y_0) \longrightarrow x_0$ per $n \longrightarrow \infty$. Viceversa un punto fisso repulsivo, o sorgente (*source*) ha la proprietà che tutte le orbite, eccetto x_0 stesso, lasciano U dopo abbastanza iterazioni della mappa f. Vale il seguente

Teorema 1.2. *Consideriamo $f ; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e assumiamo che x_0 sia un punto fisso. Allora*

1. *Se $|f'(x_0)| < 1$ allora x_0 è un punto fisso attrattivo.*
2. *Se $|f'(x_0)| > 1$ allora x_0 è un punto fisso repulsivo.*
3. *Se $|f'(x_0)| = 1$ questo non ci dà nessuna informazione sul carattere di x_0*

Dimostrazione. Proveremo il caso 1). Denotiamo $|f'(x_0)| = \nu < 1$. Scegliamo un K tale che $\nu < K < 1$. Siccome f' è una funzione continua, possiamo trovare un δ tale che $|f'(x)| < K$ $\forall x \in I \equiv [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Allora per il teorema di Lagrange (o del valor medio), preso $x \in I$, possiamo trovare un c tra x e x_0 tale che

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - x_0}{x - x_0} \tag{1.3}$$

Siccome $c \in I$, abbiamo che $|f'(c)| < K$ e quindi $|f(x) - x_0| < K|x - x_0|$. Siccome $K < 1$ questo implica che $f(x) \in I$. Possiamo quindi iterare l'argomento, usando adesso $f(x)$ al posto di x. Applicando questo argomento n volte troviamo

$$|f^n(x) - x_0| < K^n|x - x_0| \tag{1.4}$$

che implica $f^n(x) \longrightarrow x_0$ per $n \longrightarrow \infty$. La dimostrazione nel caso 2) è simile

Per quanto riguarda 3), basta considerare le tre seguenti funzioni, che hanno un punto fisso in 0 con $f_i'(0) = 1$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x + x^3 \\ f_2(x) &= x - x^3 \\ f_3(x) &= x + x^2 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Nel primo caso 0 è una sorgente, nel secondo un pozzo e nel terzo è attrattivo da un lato e repulsivo dall'altro. □

Esattamente come nel caso continuo, anche i modelli discreti presentano biforcazioni. Per questo consideriamo una famiglia di funzioni f_λ che dipendono da un parametro. Il seguente risultato implica che f_λ può avere biforcazioni che cambiano il numero di punti fissi solamente quando ha un punto fisso con derivata uguale ad uno.

Teorema 1.6. *Sia f_λ una famiglia di funzioni dipendenti in maniera differenziabile (liscia) da λ. Sia x_0 un punto fisso per il valore λ_0, $f_{\lambda_0} = x_0$ e supponiamo che $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$. Allora esistono due intervalli, I intorno ad x_0 e J intorno a λ_0, ed una funzione differenziabile $p : I \longrightarrow J$ tale che $p(\lambda_0) = \lambda_0$ e $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$. Inoltre f_λ non ha nessun altro punto fisso in I.*

Dimostrazione. Il teorema segue dall'applicazione del teorema della funzione implicita. Definiamo $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$. Sappiamo della ipotesi del teorema che $G(x_0, \lambda_0) = 0$ e che $\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, \lambda_0) = f'_{\lambda_0}(x_0) - 1 \neq 0$. Possiamo quindi applicare il teorema della funzione implicita per concludere l'esistenza della funzione p con le proprietà richieste; $p(\lambda_0) = x_0$ e $G(p(\lambda), \lambda) = 0$. Inoltre $G(x, \lambda) = 0$ solo per $x = p(\lambda)$. □

Vediamo alcuni esempio di biforcazioni

Il modello logistico discreto. Consideriamo come esempio il modello logistico discreto

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) \tag{1.7}$$

con $\lambda > 0$. Per semplicità limitiamoci a variabili a valori nell'intervallo unitario I. La mappa $f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$ ha due punti fissi $f(x_n) = x_n$ per $x_n = 0$ e $x_n = (\lambda - 1)/\lambda$. Siccome $f'(x_n) = \lambda(1 - 2x_n)$, il punto fisso $x_n = 0$ è attrattivo per $0 < \lambda < 1$ e repulsivo per $\lambda > 1$. Il secondo punto fisso è attrattivo per $1 < \lambda < 3$ e repulsivo per $\lambda > 3$, con una biforcazione a $\lambda = 3$. Inoltre il punto 1 è un due ciclo, visto che $f_\lambda(1) = 0$.

Prendiamo in particolare il caso $\lambda = 4$. Per questo valore la dinamica ha un andamento molto complicato. In questo caso $f_4(1/2) = 1$. Quindi $f_4([0, 1/2]) = f_4([1/2, 1]) = I$, entrambi gli intervalli vengono mappati sull'intero I. In particolare esistono $y_0 \in [0, 1/2]$ e $y_1 \in [1/2, 1]$ tali che $f_4(y_0) = f_4(y_1) = 1/2$. Andiamo a vedere la seconda iterazione: $f_4^2(1/2) = 0$, $f_4^2(y_0) = 1$ e $f_4^2(y_1) = 1$. Quindi abbiamo per gli intervalli $f_4^2([0, y_0]) = f_4^2([y_0, 1/2]) = I$ e $f_4^2([1/2, y_1]) = f_4^2([y_1, 0]) = I$. In tutto troviamo $4 = 2^2$ intervalli che vengono mappati in tutto I.

Con un argomento simile possiamo vedere che l'n-esima iterazione f_4^n mappa 2^n intervalli in tutto I. Similmente come abbiamo visto sopra f_4^2 ha quattro punti fissi: 0, 3/4 e due punti periodici di periodo 2 (questo perché punti fissi di f^2 sono 2-cicli di f). Allo stesso modo vediamo che f_4^3 ha sei punti fissi, oltre a 0 e 3/4 troviamo anche quattro punti di periodo 3. Per altre iterazioni la situazione diventa ancora più complicata.

Caos. Supponiamo di avere una funzione f definita su un intervallo $I = [\alpha, \beta]$ che manda I in se stesso. Diciamo che la funzione f è *caotica* se valgono

1. I punti periodici di f sono densi in I.
2. La funzione f è transitiva in I, cioé dati due sotto-intervalli $U_1, U_2 \subset I$, esistono $x_0 \in U_1$ e $n > 0$ tale che $f^n(x_0) \in U_2$.
3. f è sensibile rispetto alle condizioni iniziali in I. Esiste una costante β (di sensibilità) tale che per $x_0 \in U \subset I$ intervallo aperto, esistono un $y_0 \in U$ e $n > 0$ tali che $|f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \beta$.

Si può dimostrare che la condizione numero 2) è equivalente all'esistenza di un'orbita che è densa in I.

Mappa a tenda. Consideriamo la funzione

$$T(x) = \begin{cases} 2\,x & \text{if } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ -2\,x + 2 & \text{if } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}, \tag{1.8}$$

chiamata la funzione a tenda. Si può vedere che questa mappa è caotica.

Infatti: l'iterata T^n manda gli intervalli $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$, per $k = 0, \ldots, 2^n - 1$ in $[0, 1)$. Quindi si vede graficamente che T^n interseca la diagonale $y = x$ una volta in ogni intervallo. Pertanto ogni intervallo contiene un punto periodico di T. Quindi i punti periodici di T sono densi in I. Per quanto riguarda la transitività di T consideriamo due aperti U_1 e U_2 di I. Allora U_1 contiene un intervallo della forma $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ per n grande abbastanza. Ma T^n manda questo intervallo in tutto $[0, 1)$, che in particolare contiene U_2. Infine prendiamo $x_0 \in I$. Come prima, ogni aperto U contenente x_0 viene mandato in $[0, 1)$ per n grande abbastanza. Allora possiamo trovare $y_0 \in U$ tale che $|f^n(x_0) - f^n(y_0)| \geq \frac{1}{2} \equiv \beta$.

Coniugazione per sistemi dinamici discreti. Consideriamo due funzioni $f : I \longrightarrow I$ e $g : J \longrightarrow J$. Diciamo che f e g sono *coniugate* se esiste un omeomorfismo $h : I \longrightarrow J$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & I \arrow[d, "h"] \\ J \arrow[r, "g"] & J \end{tikzcd} \tag{1.9}$$

commuta; cioé $h \circ f = g \circ h$. Notiamo in particolare che la funzione h porta orbite di f in orbite di g: il fatto che $h(f^n(x)) = g^n(h(x))$ per $x \in I$ vuol dire a parole che h manda il punto n-esimo dell'orbita di x sotto l'azione di f nel punto n-esimo dell'orbita del punto $h(x)$ sotto l'azione di g.

L'importanza di questo concetto viene dal seguente teorema

Teorema 1.10. *Siano f e g definite come sopra, su intervalli finiti I e J. Supponiamo che f e g siano coniugate attraverso h. Allora se f è caotica in I, g è caotica in J.*

Dimostrazione. Consideriamo $U \subset J$ un aperto e $h^{-1}(J) \subset I$.

- Siccome f è caotica, i punti periodici sono densi in I e quindi possiamo trovare un punto periodico $x \in h^{-1}(U)$ per f. Chiamiamo n il periodo. Allora a causa delle proprietà di h, abbiamo $g^n(h(x)) = h(f^n(x)) = h(x)$. Quindi $h(x)$ è un punto periodico per g. Inoltre i punti periodici di g sono densi in J.
- Siano U e V due aperti di J. Per la transitività di f, esistono $x_1 \in h^{-1}(U)$ e $m > 0$ tali che $f^m(x_1) \in h^{-1}(V)$. Tuttavia $h(x_1) \in U$ e a cause delle proprietà di h abbiamo $g^m(h(x_1)) = h(f^m(x_1)) \in V$, il che dimostra che anche g è transitiva.
- Chiamiamo β la costante di sensitività di f. Denotiamo $I \in [\alpha_0, \alpha_1]$. Assumiamo che $\beta < \alpha_1 - \alpha_0$. Prendiamo $x \in [\alpha_0, \alpha_1 - \beta]$. La funzione $|h(x+\beta) - h(x)|$ è continua e positiva in $[\alpha_0, \alpha_1 - \beta]$. Quindi questa funzione ha un minimo in $[\alpha_0, \alpha_1 - \beta]$, che chiamiamo β'. Quindi h porta intervalli di lunghezza β in I in intervalli di lunghezza almeno β' in J. Segue dalle proprietà di h che β' è una costante di sensitività per g.

□

In maniera analoga diremo che h è un omeomorfismo di *semi-coniugazione* se invece di essere una funzione uno a uno, è una funzione al più n a uno, che soddisfa le stesse proprietà. Anche una semi-coniugazione preserva il comportamento caotico, su intervalli di lunghezza finita. L'unica differenza è che mappa cicli in cicli ma senza conservarne il periodo minimo.

Teorema 1.11. *La funzione logistica $f_4(x) = 4x(1-x)$ è caotica.*

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema costruiremo esplicitamente una semi-coniugazione tra la mappa logistica e la mappa della tenda sull'intervallo unitario. La semi-coniugazione è data da $h(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\pi x)$. Questa funzione è 2 a 1 sull'intervallo $[0,1]$, tranne che per il punto $1/2$, dove è uno a uno e $h(1/2) = 1$.

Infatti abbiamo

$$
\begin{aligned}
h(T(x)) &= \frac{1}{2}\left(1-\cos 4\pi x\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(2\cos^2 2\pi x - 1\right) = 1 - \cos^2 2\pi x \\
&= 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\pi x\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\pi x\right) = f_4(h(x)) \ . \qquad (1.12)
\end{aligned}
$$

□

2 L'esponente di Liapunov

Introduciamo ora una misura quantitativa di caos, l'esponente di Liapunov associato ad una mappa. L'idea è che il comportamento caotico sia associato ad un tasso esponenziale di repulsione tra traiettorie vicine. Consideriamo

$$x_{n+1} = f(x_n) \qquad (2.1)$$

e prendiamo due condizioni iniziali x_0 e $x_0 + \epsilon$. Allora definiamo

$$\lambda = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \frac{1}{N} \log \frac{|f^N(x_0+\epsilon) - f^N(x_0)|}{\epsilon} \qquad (2.2)$$

Quindi

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \left| \frac{\mathrm{d}f^N}{\mathrm{d}x}(x_0) \right| = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \left|(f^N)'(x_0)\right| \qquad (2.3)$$

Prendendo le derivate, usando la regola di derivazione della funzione composta

$$
\begin{aligned}
(f^N)'(x_0) &= \left(f\left(f^{N-1}(x_0)\right)\right)'(x_0) = \left(f'(f^{N-1})\right)(x_0)\,\left(f^{N-1}\right)'(x_0) \\
&= f'\left(f^{N-1}(x_0)\right)\,\left(f'(f^{N-2})\right)(x_0)\,\left(f^{N-2}\right)'(x_0) = \cdots = \\
&= f'(f^{N-1}(x_0))\, f'(f^{N-2}(x_0))\, f'(f^{N-3}(x_0)) \cdots f'(f(x_0))\, f'(x_0) \\
&= \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Allora assumendo che il limite esista

$$\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \left| \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \right| = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log \left|f'(x_i)\right| \qquad (2.5)$$

Notiamo che λ è funzione della condizione iniziale x_0, e misura di quanto traiettorie che partono vicino si distanziano dalla traiettoria che parte per x_0.

Ad esempio prendiamo un k-ciclo. Ricordiamo che un punto critico è stabile se $|f'(x^*)| < 1$. Allo stesso modo possiamo dire che un k-ciclo è stabile se $\left|(f^k)'(x^*)\right| < 1$ (cioé x^* è un punto fisso stabile di f^k). Allora per un k-ciclo stabile $\log\left|(f^k)'(x^*)\right| < \log 1 = 0$. Quindi[1]

$$\lambda = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\log\left|f'(x_i)\right| = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\log\left|f'(x_i)\right| \tag{2.7}$$

e usando la derivata di una funzione composta all'indietro

$$\lambda = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}\log\left|f'(x_i)\right| = \frac{1}{k}\log\left|(f^k)'(x_0)\right| < 0 \tag{2.8}$$

e quindi per un ciclo periodico stabile l'esponente di Liapunov è sempre negativo. Se abbiamo $\left|(f^k)'(x_0)\right| = 0$, allora $\lambda = -\infty$ e chiamiamo il ciclo superstabile.

Consideriamo adesso l'esponente di Liapunov della mappa a tenda. La definiamo come

$$T(x) = \begin{cases} 2\,r\,x & \text{if } 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 2\,r\,(1-x) & \text{if } \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}, \tag{2.9}$$

dove abbiamo introdotto un parametro r. Allora $|T'(x)| = 2r$ per $x \in [0,1]$, tranne che per $x = \frac{1}{2}$ dove non è derivabile. Fuori da questo valore

$$\lambda = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\log\left|T'(x_i)\right| = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\log 2r = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}N\log 2r = \log 2r > 0 \tag{2.10}$$

per $r > \frac{1}{2}$, come nel caso che abbiamo trattato in precedenza.

Approfondimenti

- Morris W. Hirsch, Stephen Smale and Robert L. Devaney *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos* Academic Press (2012)
- G.C. Layek *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos* Springer (2015)

[1]Abbiamo usato la relazione per il valor medio di una sequenza periodica di periodo p

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \frac{1}{n}\left(\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor\sum_{i=1}^{p}x_i + \sum_{j=1}^{n \bmod p}x_i\right) = \frac{\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor}{\frac{n}{p}}\sum_{i=1}^{p}\frac{x_i}{p} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n \bmod p}x_i \tag{2.6}$$

dove nel primo termine il coefficiente tende a uno per $n \to \infty$ e il secondo termine (che è il resto e contiene solo un numero finito di sommandi) tende a zero.