

*Linguaggi predicativi del 1<sup>o</sup> ordine:*  
*Semantica*

Eugenio G. Omodeo

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI



Trieste, 21/04/2021



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI DI TRIESTE

*Linguaggi predicativi del 1<sup>o</sup> ordine:*  
*Semantica*

Eugenio G. Omodeo

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI



Trieste, 21/04/2021



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI DI TRIESTE

# *Linguaggi predicativi del 1<sup>o</sup> ordine:* *Semantica*

Eugenio G. Omodeo

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI

From Frege to Gödel

A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931

Frege, Peano, Dedekind, Burali-Forti, Cantor, Padoa, Russell, Hilbert,  
Zermelo, Richard, König, Whitehead and Russell, Wiener, Löwenheim,  
Skolem, Post, Fraenkel, Brouwer, von Neumann, Schönfinkel,  
Kolmogorov, Finsler, Weyl, Bernays, Ackermann, Herbrand, Gödel

Edited by Jean van Heijenoort



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI DI TRIESTE

# CITAZIONE DEL GIORNO :

Due acquisizioni fondamentali della logica moderna sono la nozione di **sistema formale** e quella d'**interpretazione** che, in certo qual modo, si complementano una con l'altra.

( *Jean van Heijenoort, 1976* )



## CITAZIONE DEL GIORNO :

Due acquisizioni fondamentali della logica moderna sono la nozione di **sistema formale** e quella d'**interpretazione** che, in certo qual modo, si complementano una con l'altra. Nell'approntare un linguaggio formale, abbandoniamo il significato dei simboli per trattare le loro relazioni **sintattiche**; in seguito rimetteremo in campo la **semantica**<sup>1</sup>.

( *Jean van Heijenoort, 1976* )

---

<sup>1</sup>'interpretazione' nell'originale, NdT



# CITAZIONE DEL GIORNO :

Due acquisizioni fondamentali della logica moderna sono la nozione di **sistema formale** e quella d'**interpretazione** che, in certo qual modo, si complementano una con l'altra. Nell'approntare un linguaggio formale, abbandoniamo il significato dei simboli per trattare le loro relazioni **sintattiche**; in seguito rimetteremo in campo la semantica<sup>1</sup>. La prima nozione è databile in tutta precisione: nacque quando Frege scrisse, nella sua *Begriffsschrift* (1879), che le regole che stava introducendo erano regole 'per l'uso dei nostri segni'.

( *Jean van Heijenoort, 1976* )

---

1



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI DI TRIESTE

# CITAZIONE DEL GIORNO :

Due acquisizioni fondamentali della logica moderna sono la nozione di **sistema formale** e quella d'**interpretazione** che, in certo qual modo, si complementano una con l'altra. Nell'approntare un linguaggio formale, abbandoniamo il significato dei simboli per trattare le loro relazioni **sintattiche**; in seguito rimetteremo in campo la semantica<sup>1</sup>. La prima nozione è databile in tutta precisione: nacque quando Frege scrisse, nella sua *Begriffsschrift* (1879), che le regole che stava introducendo erano regole 'per l'uso dei nostri segni'.

Piú nebulosa la storia della nozione d'interpretazione.

La nozione insiemistica di conseguenza appare nella *Wissenschaftslehre* (1837) di Bolzano; non però, per un linguaggio formale . . .

( *Jean van Heijenoort, 1976* )

# CITAZIONE DEL GIORNO :

Due acquisizioni fondamentali della logica moderna sono la nozione di **sistema formale** e quella d'**interpretazione** che, in certo qual modo, si complementano una con l'altra. Nell'approntare un linguaggio formale, abbandoniamo il significato dei simboli per trattare le loro relazioni **sintattiche**; in seguito rimetteremo in campo la semantica<sup>1</sup>. La prima nozione è databile in tutta precisione: nacque quando Frege scrisse, nella sua *Begriffsschrift* (1879), che le regole che stava introducendo erano regole 'per l'uso dei nostri segni'.

Piú nebulosa la storia della nozione d'interpretazione.

La nozione insiemistica di conseguenza appare nella *Wissenschaftslehre* (1837) di Bolzano; non però, per un linguaggio formale ...

La scoperta di Bolzano rimase isolata. Dopo il 1870, quando prese slancio la logica moderna, si manifestarono due correnti che, fino al 1920, paiono stentare a mescolare le acque.

( *Jean van Heijenoort, 1976* )

---

<sup>1</sup>'interpretazione' nell'originale, NdT





# CITAZIONE DEL GIORNO :

Due acquisizioni fondamentali della logica moderna sono la nozione di **sistema formale** e quella d'**interpretazione** che, in certo qual modo, si complementano una con l'altra. Nell'approntare un linguaggio formale, abbandoniamo il significato dei simboli per trattare le loro relazioni **sintattiche**; in seguito rimetteremo in campo la **semantica**<sup>1</sup>. La prima nozione è databile in tutta precisione: nacque quando Frege scrisse, nella sua *Begriffsschrift* (1879), che le regole che stava introducendo erano regole 'per l'uso dei nostri segni'.

Piú nebulosa la storia della nozione d'interpretazione.

La nozione **insiemistica** di **conseguenza** appare nella *Wissenschaftslehre* (1837) di Bolzano; non però, per un linguaggio formale ...

La scoperta di Bolzano rimase isolata. Dopo il 1870, quando prese slancio la logica moderna, si manifestarono due correnti che, fino al 1920, paiono stentare a mescolare le acque.

( *Jean van Heijenoort, 1976* )



<sup>1</sup>'interpretazione' nell'originale, NdT



- Strutture interpretative
- 
- 





- Strutture interpretative
- Valore di un termine chiuso e di un enunciato
- 





- Strutture interpretative
- Valore di un termine chiuso e di un enunciato
- Valutazione, relativa a un'assegnaz. di individui alle var. libere





- Strutture interpretative
- Valore di un termine chiuso e di un enunciato
- Valutazione, relativa a un'assegnaz. di individui alle var. libere

*In quel mentre un Merlo bianco, che se ne stava appollaiato sulla siepe della strada, fece il suo solito verso e disse: — Pinocchio, non dar retta ai consigli dei cattivi compagni: se no, te ne pentirai! — Povero Merlo, non l'avesse mai detto! Il Gatto, spiccando un gran salto, gli si avventò addosso, e senza dargli nemmeno il tempo di dire ohi, se lo mangiò in un boccone, con le penne e tutto. Mangiato che l'ebbe e ripulitosi la bocca, chiuse gli occhi daccapo, e ricominciò a fare il cieco come prima. —Povero Merlo! — disse Pinocchio al Gatto— perché l'hai trattato così male?*





- Strutture interpretative
- Valore di un termine chiuso e di un enunciato
- Valutazione, relativa a un'assegnaz. di individui alle var. libere

*In quel mentre un Merlo bianco, che se ne stava appollaiato sulla siepe della strada, fece il suo solito verso e disse: — Pinocchio, non dar retta ai consigli dei cattivi compagni: se no, te ne pentirai! — Povero Merlo, non l'avesse mai detto! Il Gatto, spiccando un gran salto, gli si avventò addosso, e senza dargli nemmeno il tempo di dire ohi, se lo mangiò in un boccone, con le penne e tutto. Mangiato che l'ebbe e ripulitosi la bocca, chiuse gli occhi daccapo, e ricominciò a fare il cieco come prima. —Povero Merlo! — disse Pinocchio al Gatto— perché l'hai trattato così male?*



## ESERCIZIO:

Esprimere nel simbolismo predicativo le seguenti proposizioni:

- 1 Tutti i merli sono neri e col becco giallo:
- 2 Di notte tutti i gatti sono bigi:
- 3 Esistono galline dalle uova d'oro:
- 4 Esistono quaglie dalla cresta d'oro:
- 5 *Qui sème la misère récolte la colère:*
- 6 Per la via di poi poi si giunge al paese di mai mai:



## ESERCIZIO:

Esprimere nel simbolismo predicativo le seguenti proposizioni:

① Tutti i merli sono neri e col becco giallo:

$\forall x ( \text{Merlo}(x) \rightarrow \text{Nero}(x) \ \& \ \text{HaBeccoGiallo}(x) )$

② Di notte tutti i gatti sono bigi:

③ Esistono galline dalle uova d'oro:

④ Esistono quaglie dalla cresta d'oro:

⑤ *Qui sème la misère récolte la colère:*

⑥ Per la via di poi poi si giunge al paese di mai mai:





## ESERCIZIO:

Esprimere nel simbolismo predicativo le seguenti proposizioni:

① Tutti i merli ( maschi ) sono neri e col becco giallo:

$\forall x ( \text{Merlo}(x) \ \& \ \text{Maschio}(x) \rightarrow \text{Nero}(x) \ \& \ \text{HaBeccoGiallo}(x) )$

② Di notte tutti i gatti sono bigi:

③ Esistono galline dalle uova d'oro:

④ Esistono quaglie dalla cresta d'oro:

⑤ *Qui sème la misère récolte la colère:*

⑥ Per la via di poi poi si giunge al paese di mai mai:



## ESERCIZIO:

Esprimere nel simbolismo predicativo le seguenti proposizioni:

① Tutti i merli ( maschi ) sono neri e col becco giallo:

$\forall x ( \text{Merlo}(x) \ \& \ \text{Maschio}(x) \rightarrow \text{Nero}(x) \ \& \ \text{HaBeccoGiallo}(x) )$

② Di notte tutti i gatti sono bigi: ???

③ Esistono galline dalle uova d'oro:

④ Esistono quaglie dalla cresta d'oro:

⑤ *Qui sème la misère récolte la colère:*

⑥ Per la via di poi poi si giunge al paese di mai mai:



## ESERCIZIO:

Esprimere nel simbolismo predicativo le seguenti proposizioni:

① Tutti i merli ( maschi ) sono neri e col becco giallo:

$\forall x ( \text{Merlo}(x) \ \& \ \text{Maschio}(x) \rightarrow \text{Nero}(x) \ \& \ \text{HaBeccoGiallo}(x) )$

② Di notte tutti i gatti sono bigi:

③ Esistono galline dalle uova d'oro:

$\exists x ( \text{Gallina}(x) \ \& \ \forall y ( \text{Uovo\_di}(x,y) \rightarrow \text{D'oro}(y) ) )$

④ Esistono quaglie dalla cresta d'oro:

⑤ *Qui sème la misère récolte la colère:*

⑥ Per la via di poi poi si giunge al paese di mai mai:



## ESERCIZIO:

Esprimere nel simbolismo predicativo le seguenti proposizioni:

- ① Tutti i merli ( maschi ) sono neri e col becco giallo:

$$\forall x ( \text{Merlo}(x) \ \& \ \text{Maschio}(x) \rightarrow \text{Nero}(x) \ \& \ \text{HaBeccoGiallo}(x) )$$

- ② Di notte tutti i gatti sono bigi:

- ③ Esistono galline dalle uova d'oro:

$$\exists x ( \text{Gallina}(x) \ \& \ \forall y ( \text{Uovo\_di}(x,y) \rightarrow \text{D'oro}(y) ) )$$

- ④ Esistono quaglie dalla cresta d'oro:

$$\exists x ( \text{Quaglia}(x) \ \& \ \text{D'oro}(\text{cresta}(x)) )$$

- ⑤ *Qui sème la misère récolte la colère:*

- ⑥ Per la via di poi poi si giunge al paese di mai mai:



## ESERCIZIO:

Esprimere nel simbolismo predicativo le seguenti proposizioni:

- ① Tutti i merli ( maschi ) sono neri e col becco giallo:

$$\forall x ( \text{Merlo}(x) \ \& \ \text{Maschio}(x) \rightarrow \text{Nero}(x) \ \& \ \text{HaBeccoGiallo}(x) )$$

- ② Di notte tutti i gatti sono bigi:

- ③ Esistono galline dalle uova d'oro:

$$\exists x ( \text{Gallina}(x) \ \& \ \forall y ( \text{Uovo\_di}(x,y) \rightarrow \text{D'oro}(y) ) )$$

- ④ Esistono quaglie dalla cresta d'oro:

$$\exists x ( \text{Quaglia}(x) \ \& \ \text{D'oro}(\text{cresta}(x)) )$$

- ⑤ *Qui sème la misère récolte la colère:*

$$\forall x ( \text{Semina}(x, \text{vento}) \rightarrow \text{Raccoglie}(x, \text{tempesta}) )$$

- ⑥ Per la via di poi poi si giunge al paese di mai mai:



## ESERCIZIO:

Esprimere nel simbolismo predicativo le seguenti proposizioni:

- ① Tutti i merli ( maschi ) sono neri e col becco giallo:

$$\forall x ( \text{Merlo}(x) \ \& \ \text{Maschio}(x) \rightarrow \text{Nero}(x) \ \& \ \text{HaBeccoGiallo}(x) )$$

- ② Di notte tutti i gatti sono bigi: ???

- ③ Esistono galline dalle uova d'oro:

$$\exists x ( \text{Gallina}(x) \ \& \ \forall y ( \text{Uovo\_di}(x,y) \rightarrow \text{D'oro}(y) ) )$$

- ④ Esistono quaglie dalla cresta d'oro:

$$\exists x ( \text{Quaglia}(x) \ \& \ \text{D'oro}(\text{cresta}(x)) )$$

- ⑤ *Qui sème la misère récolte la colère:*

$$\forall x ( \text{Semina}(x, \text{vento}) \rightarrow \text{Raccoglie}(x, \text{tempesta}) )$$

- ⑥ Per la via di poi poi si giunge al paese di mai mai: ???



*Un aspetto della corrente 'sintattica' nella logica è che Frege e Russell erano impegnati in una ricostruzione logica totale del nostro mondo. Erano interessati a partire da poche nozioni primitive e a costruire un sistema universale. Pertanto i loro quantificatori spaziano su tutti gli oggetti: il dominio su cui essi variano è un universo fissato e unico, l'**U**niverso.*

[van Heijenoort(1985), pagg. 44–45]



*Un aspetto della corrente 'sintattica' nella logica è che Frege e Russell erano impegnati in una ricostruzione logica totale del nostro mondo. Erano interessati a partire da poche nozioni primitive e a costruire un sistema universale. Pertanto i loro quantificatori spaziano su tutti gli oggetti: il dominio su cui essi variano è un universo fissato e unico, l'**U**niverso.*

[...]

*La posizione di Hilbert è intermedia fra quella di Frege-Russell e quella di Peirce-Schröder-Löwenheim. Come i primi, egli lavora con assiomi e regole; tuttavia, per il suo istinto di matematico, propende verso quantificatori che spaziano non su 'ogni cosa', ma piuttosto su ben definite collezioni di oggetti.*

[van Heijenoort(1985), pagg. 44–45]





Per *interpretare* un linguaggio dalla firma

$$\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, d,$$

occorre una *struttura*

$$\mathfrak{I} = (\mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \mathfrak{R}),$$

dove:

$\mathfrak{D}$ , *dominio del discorso*, non è vuoto;



Per *interpretare* un linguaggio dalla firma

$$\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, d,$$

occorre una *struttura*

$$\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}),$$

dove:

$\mathcal{D}$ , *dominio del discorso*, non è vuoto;

$\mathcal{C}$ , *interpretazione delle costanti*, appartiene a  $\mathcal{D}^c$ ;



Per *interpretare* un linguaggio dalla firma

$$\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, d,$$

occorre una *struttura*

$$\mathcal{I} = \left( \mathcal{D}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R} \right),$$

dove:

$\mathcal{D}$ , *dominio del discorso*, non è vuoto;

$\mathcal{C}$ , *interpretazione delle costanti*, appartiene a  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  ;

$\mathcal{F}$ , *interpretazione dei funtori*, appartiene a

$$\prod_{g \in \mathcal{F}} \mathcal{D}^{\mathcal{D}^{d(g)}} ;$$



Per *interpretare* un linguaggio dalla firma

$$\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, d,$$

occorre una *struttura*

$$\mathfrak{I} = \left( \mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \mathfrak{R} \right),$$

dove:

$\mathfrak{D}$ , *dominio del discorso*, non è vuoto;

$\mathfrak{C}$ , *interpretazione delle costanti*, appartiene a  $\mathfrak{D}^{\mathcal{C}}$  ;

$\mathfrak{F}$ , *interpretazione dei funtori*, appartiene a

$$\prod_{g \in \mathcal{F}} \mathfrak{D}^{\mathfrak{D}^{d(g)}} ;$$

$\mathfrak{R}$ , *interpretazione dei relatori*, appartiene a

$$\prod_{r \in \mathcal{R}} \mathcal{P} \left( \mathfrak{D}^{d(r)} \right) .$$



... una *struttura* è un

$$\mathfrak{J} = \left( \mathfrak{D}, \{c^{\mathfrak{J}} : c \in \mathcal{C}\}, \{g^{\mathfrak{J}} : g \in \mathcal{F}\}, \{r^{\mathfrak{J}} : r \in \mathcal{R}\} \right),$$

dove:

$\mathfrak{D}$ , *dominio del discorso*, non è vuoto;

$$\mathfrak{D} = \forall^{\mathfrak{J}}$$

per ciascun  $c \in \mathcal{C}$ ,  $c^{\mathfrak{J}}$  appartiene a  $\mathfrak{D}$ ;

per ciascun  $g \in \mathcal{F}$ ,  $g^{\mathfrak{J}}$  appartiene a  $\mathfrak{D}^{\mathfrak{D}^{d(g)}}$ ;

per ciascun  $r \in \mathcal{R}$ ,  $r^{\mathfrak{J}}$  appartiene a  $2^{\mathfrak{D}^{d(r)}}$ .

$$2 = \{\mathbf{f}, \mathbf{v}\}$$



Qualora

$=/2$  appartenga ad  $\mathcal{R}$

( cioè  $d(=) = 2$  ) è obbligatorio interpretare

$$=^{\mathcal{J}} = \{ (e, e) : e \in \mathcal{D} \}.$$



Se in un termine non ci sono variabili, possiamo determinarne il valore

$$val_{\mathcal{J}}(\tau) \text{ o, in breve}^2, \quad val(\tau)$$

tramite la regola ricorsiva

$$val(c) \quad =_{\text{Def}} \quad c^{\mathcal{J}};$$

$$val(g(\tau_1, \dots, \tau_{d(g)})) \quad =_{\text{Def}} \quad g^{\mathcal{J}}(val(\tau_1), \dots, val(\tau_{d(g)})) .$$

---

<sup>2</sup>se non addirittura  $\tau^{\mathcal{J}}$

Se in un termine non ci sono variabili, possiamo determinarne il valore

$$val_{\mathcal{J}}(\tau) \text{ o, in breve}^2, \text{ } val(\tau)$$

tramite la regola ricorsiva

$$val(c) =_{\text{Def}} c^{\mathcal{J}};$$

$$val(g(\tau_1, \dots, \tau_{d(g)})) =_{\text{Def}} g^{\mathcal{J}}(val(\tau_1), \dots, val(\tau_{d(g)})).$$

Che sarà mai  $val(\tau_1 = \tau_2)$  ?

---

<sup>2</sup>se non addirittura  $\tau^{\mathcal{J}}$





Se in un termine non ci sono variabili, possiamo determinarne il valore

$$\text{val}_J(\tau) \quad \text{o, in breve}^2, \quad \text{val}(\tau)$$

tramite la regola ricorsiva

$$\text{val}(c) \quad =_{\text{Def}} \quad c^J;$$

$$\text{val}(g(\tau_1, \dots, \tau_{d(g)})) \quad =_{\text{Def}} \quad g^J(\text{val}(\tau_1), \dots, \text{val}(\tau_{d(g)})) .$$

Che sarà mai  $\text{val}(\tau_1 = \tau_2)$  ?

Equivarrà forse a  $\tau_1 = \tau_2$  ?

---

<sup>2</sup>se non addirittura  $\tau^J$



Possiamo determinare il valore

$$val_{\mathcal{J}}(\alpha) \text{ o, sbrigativamente}^3, val(\alpha)$$

di una formula atomica non involgente variabili tramite la regola

$$val(r(\beta_1, \dots, \beta_{d(r)})) \stackrel{=_{\text{Def}}}{=} r^{\mathcal{J}}(val(\beta_1), \dots, val(\beta_{d(r)})) .$$

---

<sup>3</sup>se non addirittura  $\alpha^{\mathcal{J}}$

Possiamo ricorrere a un 'espediente linguistico':

- 1 creiamo un insieme  $\mathcal{D}$  di 'nomi inconfondibili' per gli individui, curando che



Possiamo ricorrere a un 'espediente linguistico':

- ① creiamo un insieme  $\mathcal{D}$  di 'nomi inconfondibili' per gli individui, curando che
  - $\mathcal{D} \cap (\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \{\text{variabili}\}) = \emptyset$ ;



Possiamo ricorrere a un 'espediente linguistico':

- ① creiamo un insieme  $\mathcal{D}$  di 'nomi inconfondibili' per gli individui, curando che
  - $\mathcal{D} \cap (\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \{\text{variabili}\}) = \emptyset$ ;
  - vi sia una biiezione  $e \mapsto e'$  di  $\mathfrak{D}$  in  $\mathcal{D}$ ;



Possiamo ricorrere a un 'espediente linguistico':

- ① creiamo un insieme  $\mathcal{D}$  di 'nomi inconfondibili' per gli individui, curando che
  - $\mathcal{D} \cap (\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \{\text{variabili}\}) = \emptyset$ ;
  - vi sia una biiezione  $e \mapsto e'$  di  $\mathfrak{D}$  in  $\mathcal{D}$ ;
- ② per ogni nuova costante  $e' \in \mathcal{D}$  poniamo  $e'^{\mathfrak{J}} = e$ ;



Possiamo ricorrere a un 'espediente linguistico':

- ① creiamo un insieme  $\mathcal{D}$  di 'nomi inconfondibili' per gli individui, curando che
  - $\mathcal{D} \cap (\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \{\text{variabili}\}) = \emptyset$ ;
  - vi sia una biiezione  $e \mapsto e'$  di  $\mathfrak{D}$  in  $\mathcal{D}$ ;
- ② per ogni nuova costante  $e' \in \mathcal{D}$  poniamo  $e'^{\mathfrak{J}} = e$ ;
- ③ definiamo *come prima* il valore di termini chiusi ed enunciati atomici nella  $\mathfrak{J}$  estesa;



Possiamo ricorrere a un 'espediente linguistico':

- ① creiamo un insieme  $\mathcal{D}$  di 'nomi inconfondibili' per gli individui, curando che
  - $\mathcal{D} \cap (\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \{\text{variabili}\}) = \emptyset$ ;
  - vi sia una biiezione  $e \mapsto e'$  di  $\mathfrak{D}$  in  $\mathcal{D}$ ;
- ② per ogni nuova costante  $e' \in \mathcal{D}$  poniamo  $e'^{\mathfrak{J}} = e$ ;
- ③ definiamo *come prima* il valore di termini chiusi ed enunciati atomici nella  $\mathfrak{J}$  estesa;
- ④ poniamo inoltre  $\text{val}(f) = \mathbf{f}$  e poi, ricorsivamente,







- 5 per ogni coppia  $\alpha$ ,  $\beta$  di enunciati:

$$val(\alpha \rightarrow \beta) \stackrel{=_{\text{Def}}}{=} \begin{cases} f & \text{se } val(\alpha) = v \text{ e } val(\beta) = f, \\ v & \text{altrimenti;} \end{cases}$$



- 5 per ogni coppia  $\alpha$ ,  $\beta$  di enunciati:

$$val(\alpha \rightarrow \beta) \stackrel{=_{\text{Def}}}{=} \begin{cases} f & \text{se } val(\alpha) = v \text{ e } val(\beta) = f, \\ v & \text{altrimenti} \end{cases}$$

( col che  $\gamma \mapsto val(\gamma)$  è un *assegnamento* );



- 5 per ogni coppia  $\alpha, \beta$  di enunciati:

$$val(\alpha \rightarrow \beta) \stackrel{=_{\text{Def}}}{=} \begin{cases} f & \text{se } val(\alpha) = v \text{ e } val(\beta) = f, \\ v & \text{altrimenti} \end{cases}$$

( col che  $\gamma \mapsto val(\gamma)$  è un *assegnamento* );

- 6 per ogni coppia  $\varphi, x$  tale che  $\exists x \varphi$  sia un enunciato:<sup>4</sup>

$$val(\exists x \varphi) \stackrel{=_{\text{Def}}}{=} \begin{cases} v & \text{se } val(\varphi_k^x) = v \text{ per una} \\ & \text{o piú } k \text{ appartenenti a } \mathcal{D}, \\ f & \text{nel caso contrario.} \end{cases}$$

<sup>4</sup>in altre parole, nella formula  $\varphi$  non figura libera alcuna variabile distinta dalla  $x$





- 5 per ogni coppia  $\alpha, \beta$  di enunciati:

$$val(\alpha \rightarrow \beta) \stackrel{=_{\text{Def}}}{=} \begin{cases} f & \text{se } val(\alpha) = v \text{ e } val(\beta) = f, \\ v & \text{altrimenti} \end{cases}$$

( col che  $\gamma \mapsto val(\gamma)$  è un *assegnamento* );

- 6 per ogni coppia  $\varphi, x$  tale che  $\exists x \varphi$  sia un enunciato:<sup>4</sup>

$$val(\exists x \varphi) \stackrel{=_{\text{Def}}}{=} \begin{cases} v & \text{se } val(\varphi_e^x) = v \text{ per uno} \\ & \text{o piú } e \text{ appartenenti a } \mathfrak{D}, \\ f & \text{nel caso contrario.} \end{cases}$$

<sup>4</sup>in altre parole, nella formula  $\varphi$  non figura libera alcuna variabile distinta dalla  $x$



Quando in un termine  $\tau$  figurano tutte e sole le var.

$$v_{i_0}, \dots, v_{i_n}, \quad \text{ove } i_0 < i_1 < \dots < i_n,$$

consideriamo *valore di*  $\tau$  la seguente funzione di  $\mathfrak{D}^{n+1}$  in  $\mathfrak{D}$ :

$$(e_0, \dots, e_n) \xrightarrow{\text{val}(\tau)} \text{val} \left( \tau_{e'_0, \dots, e'_n}^{v_{i_0}, \dots, v_{i_n}} \right).$$



Quando in un termine  $\tau$  figurano *libere* tutte e sole le var.

$$v_{i_0}, \dots, v_{i_n}, \quad \text{ove } i_0 < i_1 < \dots < i_n,$$

consideriamo *valore di*  $\tau$  la seguente funzione di  $\mathfrak{D}^{n+1}$  in  $\mathfrak{D}$ :

$$(e_0, \dots, e_n) \xrightarrow{\text{val}(\tau)} \text{val} \left( \tau_{e'_0, \dots, e'_n}^{v_{i_0}, \dots, v_{i_n}} \right).$$

( Similm. per una formula  $\varphi$  ; le immagini di  $\text{val}(\varphi)$  staranno in **2** )



## ESERCIZIO

Spiegate il senso delle due abbreviazioni

$$\forall x \varphi \quad =_{\text{Def}} \quad \exists x (\varphi \rightarrow f) \rightarrow f ,$$

$$\exists ! x \varphi \quad =_{\text{Def}} \quad \exists y \forall x (\varphi \leftrightarrow x = y) .$$



## DEFINIZIONE DEI *modelli* DI UN INSIEME $\mathcal{A}$ DI ENUNCIATI

Diremo che una struttura  $\mathcal{J}$  *modella*  $\mathcal{A}$  se ne rende veri tutti gli enunciati, cioè sse:

$$\text{val}_{\mathcal{J}}(\alpha) = \text{v}$$

per ogni  $\alpha$  in  $\mathcal{A}$ .





## DEFINIZIONE DEI *modelli* DI UN INSIEME $\mathcal{A}$ DI ENUNCIATI

Diremo che una struttura  $\mathcal{J}$  *modella*  $\mathcal{A}$  se ne rende veri tutti gli enunciati, cioè sse:

$$\text{val}_{\mathcal{J}}(\alpha) = \text{v}$$

per ogni  $\alpha$  in  $\mathcal{A}$ .



## DEFINIZIONE DI

$$\models$$

Scriveremo

$$\mathcal{A} \models \varphi$$

quando

$\text{val}_{\mathcal{J}}(\varphi)$  vale costantemente  $\text{v}$  ( i.e., 'vero' )

in qualsiasi modello  $\mathcal{J}$  di  $\mathcal{A}$ .



RIESTE

## ESERCIZIO

Dimostrare che

$$\emptyset \models \vartheta$$

quando la formula:

- 1  $\vartheta$  è *tautologica* ( ad es.  $\vartheta$  ha la forma  $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$  ); oppure

## ESERCIZIO

Dimostrare che

$$\emptyset \models \vartheta$$

quando la formula:

- 1  $\vartheta$  è *tautologica* ( ad es.  $\vartheta$  ha la forma  $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$  ); oppure
- 2  $\vartheta$  ha la forma

$$\exists x \varphi \rightarrow \varphi ,$$

ove la  $x$  figura una volta in tutto;

oppure

## ESERCIZIO

Dimostrare che

$$\emptyset \models \vartheta$$

quando la formula:

- 1  $\vartheta$  è *tautologica* ( ad es.  $\vartheta$  ha la forma  $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$  ); oppure
- 2  $\vartheta$  ha la forma

$$\exists x \varphi \rightarrow \varphi,$$

ove la  $x$  figura una volta in tutto; oppure

- 3  $\vartheta$  ha la forma

$$\varphi_{\tau}^x \rightarrow \exists x \varphi \quad \text{oppure}$$

## ESERCIZIO

Dimostrare che

$$\emptyset \models \vartheta$$

quando la formula:

- ①  $\vartheta$  è *tautologica* ( ad es.  $\vartheta$  ha la forma  $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$  ); oppure
- ②  $\vartheta$  ha la forma

$$\exists x \varphi \rightarrow \varphi,$$

ove la  $x$  figura una volta in tutto; oppure

- ③  $\vartheta$  ha la forma

$$\varphi_x^x \rightarrow \exists x \varphi \quad \text{oppure}$$

- ④  $\vartheta$  ha la forma

$$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \exists x \varphi \rightarrow \psi$$

ove la  $x$  non figura in  $\psi$  ( ma solo in  $\varphi$  )

*Se non ce le ha date Dio, le regole sintattiche devono ben poggiarsi da qualche parte — e dove, se non nel significato?*

[van Heijenoort(1985), pag. 53]



*Se non ce le ha date Dio, le regole sintattiche devono ben poggiarsi da qualche parte — e dove, se non nel significato? Ma tra il funzionamento esatto di un linguaggio naturale, con le convoluzioni e intricatezze dei suoi significati, e lo scheletro logico rappresentabile nella teoria della quantificazione c'è un'ampia lacuna, in cui stiamo, tutt'oggi, procedendo a tentoni.*

[van Heijenoort(1985), pag. 53]





Martin Davis.

*Lecture Notes in Logic.*

Courant Institute of Mathematical Sciences, New York  
University, 1993.



Jean van Heijenoort.

*Selected Essays.*

Bibliopolis, Napoli, 1985.

