Calcolo predicativo del $1^{\underline{o}}$ ordine

Eugenio G. Omodeo *Trieste, aprile–maggio 2021*

Nella mia ideografia ogni inferenza viene condotta secondo una specie di calcolo. Ciò non deve essere inteso in senso ristretto, come se esercitasse il proprio controllo un algoritmo uguale o simile a quello dell'addizione e della moltiplicazione ordinarie, ma nel senso che l'intero sistema è algoritmico, cioè dotato di un complesso di regole che determinano il passaggio da una o due proposizioni a un'altra in modo tale che può aver luogo soltanto ciò che è in accordo con tali regole.

(Frege, 1896)

Nella mia ideografia ogni inferenza viene condotta secondo una specie di calcolo. Ciò non deve essere inteso in senso ristretto, come se esercitasse il proprio controllo un algoritmo uguale o simile a quello dell'addizione e della moltiplicazione ordinarie, ma nel senso che l'intero sistema è algoritmico, cioè dotato di un complesso di regole che determinano il passaggio da una o due proposizioni a un'altra in modo tale che può aver luogo soltanto ciò che è in accordo con tali regole. Il mio proposito, quindi, è quello di ottenere un continuo rigore nelle dimostrazioni e un'estrema accuratezza logica, e contemporaneamente perspicuità e concisione. (Frege, 1896)

- Riesposizione della sintassi, alla maniera di [Davis93]
-
-
-
-
-
-

- Riesposizione della sintassi, alla maniera di [Davis93]
- Assiomi quantificazionali, Dimostrazioni predicative
-
-
-
-
-

Scaletta

- Riesposizione della sintassi, alla maniera di [Davis93]
- Assiomi quantificazionali, Dimostrazioni predicative
- Teorema dello scambio, Teorema di deduzione
-
-
-
-

- Riesposizione della sintassi, alla maniera di [Davis93]
- Assiomi quantificazionali, Dimostrazioni predicative
- Teorema dello scambio, Teorema di deduzione
- Teorema delle tautologie, Teorema della premessa fantasma
-
-
-

Scaletta

- Riesposizione della sintassi, alla maniera di [Davis93]
- Assiomi quantificazionali, Dimostrazioni predicative
- Teorema dello scambio, Teorema di deduzione
- Teorema delle tautologie, Teorema della premessa fantasma
- Espansioni e completamento di Henkin
-
-

Scaletta

- Riesposizione della sintassi, alla maniera di [Davis93]
- Assiomi quantificazionali, Dimostrazioni predicative
- Teorema dello scambio, Teorema di deduzione
- Teorema delle tautologie, Teorema della premessa fantasma
- Espansioni e completamento di Henkin
- Teorema di completezza
-

- Riesposizione della sintassi, alla maniera di [Davis93]
- Assiomi quantificazionali, Dimostrazioni predicative
- Teorema dello scambio, Teorema di deduzione
- Teorema delle tautologie, Teorema della premessa fantasma
- Espansioni e completamento di Henkin
- Teorema di completezza
- Teorema di correttezza (‘soundness’)

Un **linguaggio** Λ del 1º ordine è individuato da tre insiemi

$$\mathcal{C}\,,\quad \mathcal{F}\,,\quad \mathcal{R}$$

disgiunti di simboli chiamati

costanti, ***funtori***, ***relatori***

($\mathcal{R}$ non vuoto)

Un **linguaggio** Λ del 1^{o} ordine è individuato da tre insiemi

$$\mathcal{C}\,,\quad \mathcal{F}\,,\quad \mathcal{R}$$

disgiunti di simboli chiamati

costanti , ***funtori*** , ***relatori***

($\mathcal{R}$ non vuoto), insieme a una funzione chiamata ***grado***

$$d: \quad \mathcal{F}\cup\mathcal{R} \quad\longrightarrow\quad \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

(In partic.: $= \overset{d}{\mapsto} 2$)

Un **linguaggio** Λ del 1° ordine è individuato da tre insiemi

$$\mathcal{C}\,,\quad \mathcal{F}\,,\quad \mathcal{R}$$

disgiunti di simboli chiamati

costanti, ***funtori***, ***relatori***

($\mathcal{R}$ non vuoto), insieme a una funzione chiamata ***grado***

$$d: \quad \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Gli altri simboli sono: le ***variabili***

$$\xi_1\,,\ \xi_2\,,\ \xi_3\,,\ldots$$
$$\nu_1\,,\ \nu_2\,,\ \nu_3\,,\ldots$$

Un **linguaggio** Λ del 1° ordine è individuato da tre insiemi

$$\mathcal{C}\,,\quad \mathcal{F}\,,\quad \mathcal{R}$$

disgiunti di simboli chiamati

costanti, ***funtori***, ***relatori***

($\mathcal{R}$ non vuoto), insieme a una funzione chiamata ***grado***

$$d:\quad \mathcal{F}\cup\mathcal{R}\ \longrightarrow\ \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

Gli altri simboli sono: le ***variabili***

$$\xi_1\,,\ \xi_2\,,\ \xi_3\,,\dots$$
$$\nu_1\,,\ \nu_2\,,\ \nu_3\,,\dots$$

rispettivam. ***legate*** (i.e. 'mute') e ***libere***; infine:

$$(\,,\ )\,,\ ,\,,\ f\,,\ \rightarrow\,,\ \exists$$

L'aritmetica $A_{\boldsymbol{E}}$ intravista lezioni fa era istituita sul linguaggio dalla firma

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \{\,\mathtt{0}\,\} \\
\mathcal{F} &= \{\,\mathtt{S}_{/1}\,,\ +_{/2}\,,\ \cdot_{/2}\,,\ \mathtt{E}_{/2}\,\} \\
\mathcal{R} &= \{\,=_{/2}\,,\ <_{/2}\,\}
\end{aligned}$$

L'aritmetica $A_{\boldsymbol{E}}$ intravista lezioni fa era istituita sul linguaggio dalla firma

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= \{\,\mathtt{0}\,\}\\ \mathcal{F} &= \{\,\mathtt{S}_{/1}\,,\ +_{/2}\,,\ \cdot_{/2}\,,\ \mathtt{E}_{/2}\,\}\\ \mathcal{R} &= \{\,=_{/2}\,,\ <_{/2}\,\}\end{aligned}$$

N.B.: Manca qui il relatore $\leqslant$, in quanto costrutto abbreviativo:

$$X \leqslant Y \quad =_{\mathsf{Def}} \quad X < Y \ \vee\ X = Y$$

L'aritmetica $A_{\boldsymbol{E}}$ intravista lezioni fa era istituita sul linguaggio dalla firma

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{\mathtt{0}\} \\ \mathcal{F} &= \{\mathtt{S}_{/1}, +_{/2}, \cdot_{/2}, \mathtt{E}_{/2}\} \\ \mathcal{R} &= \{=_{/2}, <_{/2}\} \end{aligned}$$

N.B.: Manca qui il relatore $\leqslant$, in quanto costrutto abbreviativo:

$$X \leqslant Y \quad =_{\mathsf{Def}} \quad X < Y \vee X = Y$$

i.e.

$$X \leqslant Y \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \big((X < Y \rightarrow f) \rightarrow X = Y\big)$$

ESEMPIO DI LINGUAGGIO INTERPRETATO / TEORIA

3: Undecidability 203

where A_E is the set consisting of the eleven sentences listed below. (As in the preceding section, $x \leq y$ abbreviates $x < y \vee x = y$.)

Set A_E of Axioms

$\forall x$	$\mathbf{S}x \neq \mathbf{0}$	(S1)
$\forall x \forall y$	$(\mathbf{S}x = \mathbf{S}y \rightarrow x = y)$	(S2)
$\forall x \forall y$	$(x < \mathbf{S}y \leftrightarrow x \leq y)$	(L1)
$\forall x$	$x \not< \mathbf{0}$	(L2)
$\forall x \forall y$	$(x < y \vee x = y \vee y < x)$	(L3)
$\forall x$	$x + \mathbf{0} = x$	(A1)
$\forall x \forall y$	$x + \mathbf{S}y = \mathbf{S}(x + y)$	(A2)
$\forall x$	$x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$	(M1)
$\forall x \forall y$	$x \cdot \mathbf{S}y = x \cdot y + x$	(M2)
$\forall x$	$x\mathbf{E}\mathbf{0} = \mathbf{S}\mathbf{0}$	(E1)
$\forall x \forall y$	$x\,\mathbf{E}\,\mathbf{S}y = x\,\mathbf{E}\,y \cdot x$	(E2)

$$\forall^{\mathfrak{I}} \; = \; \mathbb{N}$$

$$x \overset{\mathbf{S}^{\mathfrak{I}}}{\longmapsto} x+1$$

$$\ddots$$

$$(x, y) \overset{\mathbf{E}^{\mathfrak{I}}}{\longmapsto} x^y$$

(Raphael M. Robinson , 1911–1995)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TI

Esempio di linguaggio interpretato / teoria

3: Undecidability 203

where A_E is the set consisting of the eleven sentences listed below. (As in the preceding section, $x \leq y$ abbreviates $x < y \vee x = y$.)

Set A_E of Axioms

$\forall x$	$\mathbf{S}x \neq \mathbf{0}$	(S1)
$\forall x \forall y$	$(\mathbf{S}x = \mathbf{S}y \rightarrow x = y)$	(S2)
$\forall x \forall y$	$(x < \mathbf{S}y \leftrightarrow x \leq y)$	(L1)
$\forall x$	$x \not< \mathbf{0}$	(L2)
$\forall x \forall y$	$(x < y \vee x = y \vee y < x)$	(L3)
$\forall x$	$x + \mathbf{0} = x$	(A1)
$\forall x \forall y$	$x + \mathbf{S}y = \mathbf{S}(x + y)$	(A2)
$\forall x$	$x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$	(M1)
$\forall x \forall y$	$x \cdot \mathbf{S}y = x \cdot y + x$	(M2)
$\forall x$	$x\mathbf{E}\mathbf{0} = \mathbf{S}\mathbf{0}$	(E1)
$\forall x \forall y$	$x\,\mathbf{E}\,\mathbf{S}y = x\,\mathbf{E}\,y \cdot x$	(E2)

$$\forall^{\mathfrak{J}} = \mathbb{N}$$

$$x \overset{\mathrm{S}^{\mathfrak{J}}}{\longmapsto} x+1$$

$$\ddots$$

$$(x, y) \overset{\mathrm{E}^{\mathfrak{J}}}{\longmapsto} x^y$$


(Raphael M. Robinson , 1911–1995)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TI

Definizione:

I **termini** di Λ sono tutte e sole le seq. di simboli delle 3 forme:

0. "ν_i" ove ν_i è una qualsiasi var. libera;
1. "c" con c da $\mathcal{C}$;
2. $g(\tau_1, \ldots, \tau_{d(g)})$, con g da $\mathcal{F}$, ove ogni τ_k è un termine.

Definizione:

I **termini** di Λ sono tutte e sole le seq. di simboli delle 3 forme:

0. "ν_i" ove ν_i è una qualsiasi var. libera;
1. "c" con c da $\mathcal{C}$;
2. $g(\tau_1, \ldots, \tau_{d(g)})$, con g da $\mathcal{F}$, ove ogni τ_k è un termine.

Definizione:

Le **formule atomiche** di Λ sono le sequenze di simboli della forma:

- $r(\tau_1, \ldots, \tau_{d(r)})$, con r da $\mathcal{R}$, ove ogni τ_k è un termine.

DEFINIZIONE:

Le **formule** di Λ sono le sequenze delle 4 forme:

1. "f" da sola;
2. $r(\tau_1, \ldots, \tau_{d(r)})$, con r presa da $\mathcal{R}$, ove ogni τ_k è un termine;
3. $(\varphi \rightarrow \psi)$, ove φ e ψ sono formule;
4. $\exists\, \xi_j\ \varphi(\xi_j)$, ove φ è una formula nella quale *non* figura ξ_j ed $\varphi(\xi_j)$ risulta dalla sostituzione di ξ_j a una variabile libera ν_i ovunque ν_i figuri in φ

DEFINIZIONE:

Le **formule** di Λ sono le sequenze delle 4 forme:

1. "f" da sola;
2. $r(\tau_1, \ldots, \tau_{d(r)})$, con r presa da $\mathcal{R}$, ove ogni τ_k è un termine;
3. $(\varphi \rightarrow \psi)$, ove φ e ψ sono formule;
4. $\exists\, \xi_j\ \varphi(\xi_j)$, ove φ è una formula nella quale *non* figura ξ_j ed $\varphi(\xi_j)$ risulta dalla sostituzione di ξ_j a una variabile libera ν_i ovunque (e se) ν_i figuri in φ $(= \varphi(\nu_i))$

DEFINIZIONE:

Le **formule** di Λ sono le sequenze delle 4 forme:

1. "f" da sola;
2. $r(\tau_1, \ldots, \tau_{d(r)})$, con r presa da $\mathcal{R}$, ove ogni τ_k è un termine;
3. $(\varphi \rightarrow \psi)$, ove φ e ψ sono formule;
4. $\exists\, \xi_j\ \varphi(\xi_j)$, ove φ è una formula nella quale <u>*non*</u> figura ξ_j ed $\varphi(\xi_j)$ risulta dalla sostituzione di ξ_j a una variabile libera ν_i ovunque ν_i figuri in φ $(= \varphi(\nu_i))$

DEFINIZIONE:

Si chiamano **enunciati** di Λ quelle formule di Λ in cui non figurano variabili libere. Che operazione sarà mai la $\alpha \Rightarrow \beta$?

Osservazione

Quando [Davis93] correla

$$\varphi(x) \qquad \text{con} \qquad \exists\, x\, \varphi(x),$$

la ‘metavar.’ x rappresenta, a sn e a dx, due simboli diversi

Osservazione

Quando [Davis93] correla

$$\varphi(x) \qquad \text{con} \qquad \exists\, x\, \varphi(x),$$

la 'metavar.' x rappresenta, a sn e a dx, due simboli diversi.

Scrivendo, piú in gen.,

$$\varphi \quad = \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n)\ ,$$

[Davis93] rappresenta con $x_1, \ldots, x_n$ varr. libere distinte, non tenute a figurare tutte in φ.

Quando [Davis93] correla

$$\varphi(x) \qquad \text{con} \qquad \exists x\, \varphi(x),$$

la 'metavar.' x rappresenta, a sn e a dx, due simboli diversi.

Scrivendo, piú in gen.,

$$\varphi \;=\; \varphi(x_1,\ldots,x_n)\,,$$

[Davis93] rappresenta con $x_1,\ldots,x_n$ varr. libere distinte, <u>non</u> <u>tenute</u> a figurare tutte in φ.

Scrivendo poi

$$\varphi(\tau_1,\ldots,\tau_n)\,,$$

indicherà l'effetto della sostituzione *simultanea* e *dappertutto* dei termini τ_i alle varr. x_i

Quando [Davis93] correla

$$\varphi(x) \qquad \text{con} \qquad \exists\, x\, \varphi(x),$$

la 'metavar.' x rappresenta, a sn e a dx, due simboli diversi.

Scrivendo, piú in gen.,

$$\varphi \quad = \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n)\,,$$

[Davis93] rappresenta con $x_1, \ldots, x_n$ varr. libere distinte, <u>non</u> <u>tenute</u> a figurare tutte in φ.

Scrivendo poi

$$\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\,,$$

indicherà l'effetto della sostituzione *simultanea* e *dappertutto* dei termini τ_i alle varr. x_i:

$$\varphi^{x_1,\ldots,x_n}_{\tau_1,\ldots,\tau_n}\,.$$

Comode abbreviazioni

$$
\begin{array}{lcl}
\neg\varphi & =_{\mathsf{Def}} & (\ \varphi \longrightarrow f\ ) \\
\forall\, \xi_j\ \varphi & =_{\mathsf{Def}} & \neg(\exists\, \xi_j\ \neg\varphi) \\
\varphi \vee \psi & =_{\mathsf{Def}} & (\ (\neg\varphi) \longrightarrow \psi\ ) \\
\varphi \,\&\, \psi & =_{\mathsf{Def}} & \neg(\ \varphi \longrightarrow (\neg\psi)\ ) \\
\varphi \leftrightarrow \psi & =_{\mathsf{Def}} & (\ \varphi \longrightarrow \psi\ ) \,\&\, (\ \psi \longrightarrow \varphi\ )
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\neg\varphi & =_{\text{Def}} & (\ \varphi \rightarrow f\ ) \\
\forall\, \xi_j\ \varphi & =_{\text{Def}} & \neg(\exists\, \xi_j\ \neg\varphi) \\
\varphi \vee \psi & =_{\text{Def}} & (\ (\neg\varphi) \rightarrow \psi\ ) \\
\varphi \,\&\, \psi & =_{\text{Def}} & \neg(\ \varphi \rightarrow (\neg\psi)\ ) \\
\varphi \leftrightarrow \psi & =_{\text{Def}} & (\ \varphi \rightarrow \psi\ ) \,\&\, (\ \psi \rightarrow \varphi\ )
\end{array}
$$

Nota Bene: [Davis93] utilizza parentesi quadre anziché tonde attorno alle formule.

Comode abbreviazioni

$$
\begin{array}{rcl}
\neg\varphi & =_{\text{Def}} & (\varphi \rightarrow f) \\
\forall\, \xi_j\ \varphi & =_{\text{Def}} & \neg(\exists\, \xi_j\ \neg\varphi) \\
\varphi \vee \psi & =_{\text{Def}} & ((\neg\varphi) \rightarrow \psi) \\
\varphi \,\&\, \psi & =_{\text{Def}} & \neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)) \\
\varphi \leftrightarrow \psi & =_{\text{Def}} & (\varphi \rightarrow \psi) \,\&\, (\psi \rightarrow \varphi)
\end{array}
$$

Terminologia:

Le sequenze della forma "$\exists\, \xi_j$" e "$\forall\, \xi_j$" si chiamano quantificatori esistenziali, rispettivam. q. esistenziali. Si leggono:

Comode abbreviazioni

$$
\begin{array}{lcl}
\neg\varphi & =_{\mathsf{Def}} & (\,\varphi \rightarrow f\,) \\
\forall\,\xi_j\;\varphi & =_{\mathsf{Def}} & \neg(\exists\,\xi_j\;\neg\varphi) \\
\varphi \vee \psi & =_{\mathsf{Def}} & (\,(\neg\varphi) \rightarrow \psi\,) \\
\varphi \,\&\, \psi & =_{\mathsf{Def}} & \neg(\,\varphi \rightarrow (\neg\psi)\,) \\
\varphi \leftrightarrow \psi & =_{\mathsf{Def}} & (\,\varphi \rightarrow \psi\,) \,\&\, (\,\psi \rightarrow \varphi\,)
\end{array}
$$

Terminologia:

Le sequenze della forma "$\exists\,\xi_j$" e "$\forall\,\xi_j$" si chiamano quantificatori esistenziali, rispettivam. q. esistenziali. Si leggono:

'per qualche $\xi_j \ldots$', 'per ogni $\xi_j \ldots$'

$$\begin{array}{lcl}
\neg\varphi & =_{\mathsf{Def}} & (\,\varphi \rightarrow f\,) \\
\forall\,\xi_j\ \varphi & =_{\mathsf{Def}} & \neg(\exists\,\xi_j\ \neg\varphi\,) \\
\varphi \vee \psi & =_{\mathsf{Def}} & (\,(\neg\varphi) \rightarrow \psi\,) \\
\varphi \,\&\, \psi & =_{\mathsf{Def}} & \neg(\,\varphi \rightarrow (\neg\psi)\,) \\
\varphi \leftrightarrow \psi & =_{\mathsf{Def}} & (\,\varphi \rightarrow \psi\,) \,\&\, (\,\psi \rightarrow \varphi\,)
\end{array}$$

$$\varphi^{\forall} \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \forall\, x_1 \cdots \forall\, x_\kappa\ \varphi\,,$$

dove $x_1, \ldots, x_\kappa$ sono le variabili distinte che figurano libere in φ .

There are two economy measures that we can take to obtain simplification without any essential loss of linguistic expressiveness:

First, we choose as our sentential connective symbols just $\neg$ and $\rightarrow$. We know from Section 1.5 that these form a complete set, so there is no compelling reason to use more.

Secondly, we forego the luxury of an existential quantifier, $\exists x$. In its place we use $\neg \forall x \neg$. This is justified, since an English sentence like

There is something rotten in the state of Denmark,

is equivalent to

It is not the case that for every x, x is not rotten in the state of Denmark.

Thus the formula $\exists v_1 \forall v_2\, v_1 = v_2$ becomes, in unabbreviated form,

$$(\neg \forall v_1 (\neg \forall v_2 = v_1 v_2)).$$

Le *formule* delle segg. forme sono gli $\boxed{\textit{assiomi}\ (\ \textit{logici}\ )}$ di Λ :

1. ***implicativi***:

$$\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \varphi$$

Le *formule* delle segg. forme sono gli $\boxed{\textbf{\textit{assiomi}}\ (\ \textit{logici}\ )}$ di Λ :

1. ***implicativi***:

$$\varphi \quad \Rightarrow \quad \psi \quad \Rightarrow \quad \varphi$$

2. ***auto-distributivi***:

$$(\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi) \quad \Rightarrow \quad (\varphi \Rightarrow \psi) \quad \Rightarrow \quad \varphi \Rightarrow \chi$$

Le *formule* delle segg. forme sono gli $\boxed{\textit{assiomi (logici)}}$ di Λ :

1. ***implicativi***:

$$\varphi \;\Rightarrow\; \psi \;\Rightarrow\; \varphi$$

2. ***auto-distributivi***:

$$(\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi) \;\Rightarrow\; (\varphi \Rightarrow \psi) \;\Rightarrow\; \varphi \Rightarrow \chi$$

3. ***bis-negativi***:

$$\big((\varphi \Rightarrow f) \;\Rightarrow\; f\big) \;\Rightarrow\; \varphi$$

Le *formule* delle segg. forme sono gli $\boxed{\textit{assiomi (logici)}}$ di Λ :

1. ***implicativi***:

$$\varphi \;\Rightarrow\; \psi \;\Rightarrow\; \varphi$$

2. ***auto-distributivi***:

$$(\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi) \;\Rightarrow\; (\varphi \Rightarrow \psi) \;\Rightarrow\; \varphi \Rightarrow \chi$$

3. ***bis-negativi***:

$$((\varphi \Rightarrow f) \;\Rightarrow\; f) \;\Rightarrow\; \varphi$$

4. ***esistenziali***:

$$\varphi(\tau) \;\Rightarrow\; \exists x\, \varphi(x)\,,$$

ove τ è un termine

Le *formule* delle segg. forme sono gli $\boxed{\textit{assiomi (logici)}}$ di Λ :

1. ***implicativi***:

$$\varphi \;\Rightarrow\; \psi \;\Rightarrow\; \varphi$$

2. ***auto-distributivi***:

$$(\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi) \;\Rightarrow\; (\varphi \Rightarrow \psi) \;\Rightarrow\; \varphi \Rightarrow \chi$$

3. ***bis-negativi***:

$$\big((\varphi \Rightarrow f) \;\Rightarrow\; f\big) \;\Rightarrow\; \varphi$$

4. ***esistenziali***:

$$\varphi(\tau) \;\Rightarrow\; \exists x\, \varphi(x)\,,$$

ove τ è un termine

5. ***vacui***:

$$(\exists x\, \varphi) \;\Rightarrow\; \varphi\,,$$

ove la x (legata) figura <u>una volta in tutto</u>

Def.: Nel contesto di Λ, diremo che una sequenza di *formule*

$$\boldsymbol{\delta} \;=\; \langle\, \delta_0\,,\; \delta_1\,,\; \ldots\,,\; \delta_h \,\rangle$$

è $\boxed{\textbf{\textit{dimostrazione}} \text{ di } \vartheta \text{ da un insieme } \mathcal{A}}$ di *enunciati* quando

$$\delta_h \;=\; \vartheta$$

e poi, per $i = 0, \ldots, h$, accade che:

Def.: Nel contesto di Λ, diremo che una sequenza di *formule*

$$\delta \quad = \quad \langle\, \delta_0\,,\, \delta_1\,,\, \ldots\,,\, \delta_h\,\rangle$$

è $\boxed{\textbf{\textit{dimostrazione}}\text{ di }\vartheta\text{ da un insieme }\mathcal{A}}$ di *enunciati* quando

$$\delta_h \quad = \quad \vartheta$$

e poi, per $i = 0, \ldots, h$, accade che:

1. δ_i appartiene ad $\mathcal{A}$, oppure

Def.: Nel contesto di Λ, diremo che una sequenza di *formule*

$$\boldsymbol{\delta} \quad = \quad \langle\, \delta_0\, ,\ \delta_1\, ,\ \ldots\ ,\ \delta_h\, \rangle$$

è $\boxed{\textit{dimostrazione di } \vartheta \text{ da un insieme } \mathcal{A}}$ di *enunciati* quando

$$\delta_h \quad = \quad \vartheta$$

e poi, per $i = 0, \ldots, h$, accade che:

1. δ_i appartiene ad $\mathcal{A}$, oppure
2. δ_i ricade in uno dei 5 schemi del lucido precedente, oppure

Def.: Nel contesto di Λ, diremo che una sequenza di *formule*

$$\boldsymbol{\delta} \;=\; \langle\, \delta_0\,,\, \delta_1\,,\, \ldots\,,\, \delta_h \,\rangle$$

è $\boxed{\textit{dimostrazione di } \vartheta \text{ da un insieme } \mathcal{A}}$ di *enunciati* quando

$$\delta_h \;=\; \vartheta$$

e poi, per $i = 0, \ldots, h$, accade che:

1. δ_i appartiene ad $\mathcal{A}$, oppure
2. δ_i ricade in uno dei 5 schemi del lucido precedente, oppure
3. vi sono $j_0 < i$ e $j_1 < i$ tali che $\delta_{j_1} = (\delta_{j_0} \Rightarrow \delta_i)$, oppure

Def.: Nel contesto di Λ, diremo che una sequenza di *formule*

$$\delta = \langle \delta_0 , \delta_1 , \ldots , \delta_h \rangle$$

è $\boxed{\textit{dimostrazione di } \vartheta \textit{ da un insieme } \mathcal{A}}$ di *enunciati* quando

$$\delta_h = \vartheta$$

e poi, per $i = 0, \ldots, h$, accade che:

1. δ_i appartiene ad $\mathcal{A}$, oppure
2. δ_i ricade in uno dei 5 schemi del lucido precedente, oppure
3. vi sono $j_0 < i$ e $j_1 < i$ tali che $\delta_{j_1} = (\delta_{j_0} \Rightarrow \delta_i)$, oppure
4. vi sono un $j < i$, formule φ e ψ e una $\boxed{x \textit{ assente da } \psi}$ tali che

$$\delta_j = \varphi(x) \Rightarrow \psi , \qquad \delta_i = \exists x\, \varphi(x) \Rightarrow \psi .$$

Def.: Nel contesto di Λ, diremo che una sequenza di *formule*

$$\delta \quad = \quad \langle\, \delta_0\,,\, \delta_1\,,\, \ldots\,,\, \delta_h \,\rangle$$

è $\boxed{\textit{dimostrazione di } \vartheta \text{ da un insieme } \mathcal{A}}$ di *enunciati* quando

$$\delta_h \quad = \quad \vartheta$$

e poi, per $i = 0, \ldots, h$, accade che:

1. δ_i appartiene ad $\mathcal{A}$, oppure
2. δ_i ricade in uno dei 5 schemi del lucido precedente, oppure
3. vi sono $j_0 < i$ e $j_1 < i$ tali che $\delta_{j_1} = (\delta_{j_0} \Rightarrow \delta_i)$, oppure
4. vi sono un $j < i$, formule φ e ψ e una $\boxed{x \textit{ assente da } \psi}$ tali che

$$\delta_j \quad = \quad \varphi(x) \Rightarrow \psi\,, \qquad\qquad \delta_i \quad = \quad \exists\, x\, \varphi(x) \Rightarrow \psi\,.$$

Scriveremo allora:

$$\mathcal{A} \;\vdash_\Lambda\; \vartheta$$

Esempio di dimostrazione: $\vdash_\Lambda \ \varphi \Rightarrow \varphi$

Dimostriamo in 5 passi un'arbitraria formula $\varphi \Rightarrow \varphi$ da $\emptyset$:

		Ax.	MP
1.	$\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi$	[I]	
2.	$(\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$	[II]	
3.	$(\varphi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$		[1, 2]
4.	$\varphi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$	[I]	
5.	$\varphi \Rightarrow \varphi$		[4, 3]

Esempio di dimostrazione: $\vdash_\Lambda \ \varphi \Rightarrow \varphi$

Dimostriamo in 5 passi un'arbitraria formula $\varphi \Rightarrow \varphi$ da $\emptyset$:

		Ax.	MP
1.	$\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi$	[I]	
2.	$(\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$	[II]	
3.	$(\varphi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$		[1, 2]
4.	$\varphi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$	[I]	
5.	$\varphi \Rightarrow \varphi$		[4, 3]

N.B.: Qui è in gioco solo una delle ***regole d'inferenza***, che sono:

MP e $\mathrm{Gen}_\exists$

Possiamo considerare *assiomi dell'uguaglianza* le chiusure universali delle segg. formule:

$$
\begin{array}{rcl}
x & = & x \\
x = y & \Rightarrow & y = x \\
x = y \Rightarrow y = z & \Rightarrow & x = z
\end{array}
$$

dove:

- metavariabili distinte rappresentano variabili individuali distinte (tacitam. legate da $\forall\nu$ iniziali);

Possiamo considerare *assiomi dell'uguaglianza* le chiusure universali delle segg. formule:

$$\begin{array}{rcl} x & = & x \\ x = y & \Rightarrow & y = x \\ x = y \Rightarrow y = z & \Rightarrow & x = z \\ x_1 = y_1 \Rightarrow x_2 = y_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow x_n = y_n & \Rightarrow & g(x_1, \ldots, x_n) = g(y_1, \ldots, y_n) \end{array}$$

dove:

- metavariabili distinte rappresentano variabili individuali distinte (tacitam. legate da $\forall\nu$ iniziali);
- g *in* $\mathcal{F}$, $d(g) = n$;

Possiamo considerare *assiomi dell'uguaglianza* le chiusure universali delle segg. formule:

$$
\begin{array}{rcl}
x & = & x \\
x = y & \Rightarrow & y = x \\
x = y \Rightarrow y = z & \Rightarrow & x = z \\
x_1 = y_1 \Rightarrow x_2 = y_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow x_n = y_n & \Rightarrow & g(x_1, \ldots, x_n) = g(y_1, \ldots, y_n) \\
x_1 = y_1 \Rightarrow x_2 = y_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow x_m = y_m & \Rightarrow & P(x_1, \ldots, x_m) \Rightarrow P(y_1, \ldots, y_m)
\end{array}
$$

dove:

- metavariabili distinte rappresentano variabili individuali distinte (tacitam. legate da $\forall \nu$ iniziali);
- g *in* $\mathcal{F}$, $d(g) = n$;
- P *in* $\mathcal{R} \setminus \{=\}$, $d(P) = m$.

Occorre controllare, per $\vdash = \vdash_\wedge$, le

CONDIZIONI: (SOLO PER GLI ENUNCIATI !?)

L1. $\alpha \vdash \alpha$;

Occorre controllare, per $\vdash = \vdash_\wedge$, le

Condizioni: (solo per gli enunciati !?)

L1. $\alpha \vdash \alpha$;

L2. **(Monotonicità):** quando $\mathcal{A} \vdash \alpha$ e $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$, allora $\mathcal{B} \vdash \alpha$;

Occorre controllare, per $\vdash \, = \, \vdash_\wedge$, le

CONDIZIONI: (SOLO PER GLI ENUNCIATI !?)

L1. $\alpha \vdash \alpha$;

L2. **(Monotonicità):** quando $\mathcal{A} \vdash \alpha$ e $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$, allora $\mathcal{B} \vdash \alpha$;

L3. **(Compattezza):** quando $\mathcal{A} \vdash \alpha$, c'è un $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, $\boxed{\mathcal{F} \textit{ finito}}$, t.c. $\mathcal{F} \vdash \alpha$;

È una logica $\vdash_\Lambda$? E, se sí, è booleana ?

Occorre controllare, per $\vdash \, = \, \vdash_\Lambda$, le

Condizioni: (solo per gli enunciati !?)

L1. $\alpha \vdash \alpha$;

L2. **(Monotonicità):** quando $\mathcal{A} \vdash \alpha$ e $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$, allora $\mathcal{B} \vdash \alpha$;

L3. **(Compattezza):** quando $\mathcal{A} \vdash \alpha$, c'è un $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, $\boxed{\mathcal{F} \textit{ finito}}$, t.c. $\mathcal{F} \vdash \alpha$;

L4. **(Taglio):** quando $\mathcal{B}\,,\ \beta \vdash \alpha$ ed $\mathcal{A} \vdash \beta$, allora $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \vdash \alpha$.

Occorre controllare, per $\vdash = \vdash_\wedge$, le

CONDIZIONI: (SOLO PER GLI ENUNCIATI !?)

- L1. $\alpha \vdash \alpha$;
- L2. **(Monotonicità):** quando $\mathcal{A} \vdash \alpha$ e $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$, allora $\mathcal{B} \vdash \alpha$;
- L3. **(Compattezza):** quando $\mathcal{A} \vdash \alpha$, c'è un $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, $\boxed{\mathcal{F}\ \textit{finito}}$, t.c. $\mathcal{F} \vdash \alpha$;
- L4. **(Taglio):** quando $\mathcal{B}, \beta \vdash \alpha$ ed $\mathcal{A} \vdash \beta$, allora $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \vdash \alpha$.

- B2. **(Principio di doppia negazione):** $(\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \vdash \alpha$.

Occorre controllare, per $\vdash = \vdash_\wedge$, le

CONDIZIONI: (SOLO PER GLI ENUNCIATI !?)

- L1. $\alpha \vdash \alpha$;
- L2. **(Monotonicità):** quando $\mathcal{A} \vdash \alpha$ e $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$, allora $\mathcal{B} \vdash \alpha$;
- L3. **(Compattezza):** quando $\mathcal{A} \vdash \alpha$, c'è un $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, $\boxed{\mathcal{F} \text{ finito}}$, t.c. $\mathcal{F} \vdash \alpha$;
- L4. **(Taglio):** quando $\mathcal{B}, \beta \vdash \alpha$ ed $\mathcal{A} \vdash \beta$, allora $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \vdash \alpha$.
- B1. **(Principio di deduzione):** $\mathcal{A} \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ se e solo se $\mathcal{A}, \alpha \vdash \beta$;
- B2. **(Principio di doppia negazione):** $(\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \vdash \alpha$.

Occorre controllare, per $\vdash\ =\ \vdash_\wedge$, le

CONDIZIONI: (SOLO PER GLI ENUNCIATI !?)

- L1. $\alpha \vdash \alpha$;
- L2. **(Monotonicità):** quando $\mathcal{A} \vdash \alpha$ e $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$, allora $\mathcal{B} \vdash \alpha$;
- L3. **(Compattezza):** quando $\mathcal{A} \vdash \alpha$, c'è un $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, $\boxed{\mathcal{F}\ \textit{finito}}$, t.c. $\mathcal{F} \vdash \alpha$;
- L4. **(Taglio):** quando $\mathcal{B}\,,\ \beta \vdash \alpha$ ed $\mathcal{A} \vdash \beta$, allora $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \vdash \alpha$.
- B1. **(Principio di deduzione):** $\mathcal{A} \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ se e solo se $\mathcal{A}\,,\ \alpha \vdash \beta$;
- B2. **(Principio di doppia negazione):** $(\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \vdash \alpha$.

Il 'se' è l'unico punto delicato da verificare. . .

$\therefore$ Una volta accertato che

$$\text{se } \mathcal{A},\ \alpha \vdash_{\Lambda} \beta \text{ allora } \mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \alpha \Rightarrow \beta\ ,$$

potremmo avvalerci del Cor. di Post e utilizzare qualsiasi tautologia come scorciatoia dimostrativa.

$\therefore$ Una volta accertato che

$$\text{se } \mathcal{A}\,,\ \alpha \vdash_\Lambda \beta \text{ allora } \mathcal{A} \vdash_\Lambda \alpha \Rightarrow \beta\ ,$$

potremmo avvalerci del Cor. di Post e utilizzare qualsiasi tautologia come scorciatoia dimostrativa. Preliminarm.:

Teorema

Quando $\mathcal{A} \vdash_\Lambda \varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$, vale anche $\mathcal{A} \vdash_\Lambda \psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi$

$\therefore$ Una volta accertato che

$$\text{se } \mathcal{A}, \ \alpha \vdash_{\Lambda} \beta \text{ allora } \mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \alpha \Rightarrow \beta \ ,$$

potremmo avvalerci del Cor. di Post e utilizzare qualsiasi tautologia come scorciatoia dimostrativa. Preliminarm.:

Teorema (nuova regola d'inferenza: *SW*)

Quando $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$, vale anche $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi$

Dim.:

[Davis93, pagg. 25–26] mostra come prolungare una dimostrazione per il lato sinistro in una per il lato destro (V. sotto)

$\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$

Come prolungare una dim. di $\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$ da $\mathcal{A}$:

1. $(\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi$ — II
2. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi$ — MP
3. $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow \psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi$ — I
4. $\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi$ — MP
5. $(\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow$ $(\psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi$ — II
6. $(\psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi$ — MP
7. $\psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \psi$ — I
8. $\psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi$ — MP $\square$

Teorema:

SE $\mathcal{A}, \alpha \vdash_{\Lambda} \chi$ ALLORA $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \alpha \Rightarrow \chi$

Dim.: Sia

$$\delta_0\,, \quad \ldots, \quad \delta_h$$

una dimostrazione da $\mathcal{A} \cup \{\alpha\}$; allora, induttivam., per ogni i costruiamo una dim. di $\alpha \Rightarrow \delta_i$ da $\mathcal{A}$.

`Caso` $\delta_i \quad = \quad \alpha$.

Teorema:

SE $\mathcal{A}, \alpha \vdash_\Lambda \chi$ ALLORA $\mathcal{A} \vdash_\Lambda \alpha \Rightarrow \chi$

Dim.: Sia

$$\delta_0\,, \quad \ldots, \quad \delta_h$$

una dimostrazione da $\mathcal{A} \cup \{\alpha\}$; allora, induttivam., per ogni i costruiamo una dim. di $\alpha \Rightarrow \delta_i$ da $\mathcal{A}$.

Caso $\delta_i = \alpha$. Bastano 5 passaggi, come visto sopra.

Teorema:

Se $\mathcal{A}, \alpha \vdash_{\Lambda} \chi$ allora $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \alpha \Rightarrow \chi$

Dim.: Sia

$$\delta_0\,, \quad \ldots, \quad \delta_h$$

una dimostrazione da $\mathcal{A} \cup \{\alpha\}$; allora, induttivam., per ogni i costruiamo una dim. di $\alpha \Rightarrow \delta_i$ da $\mathcal{A}$.

Caso $\delta_i = \alpha$.

Caso δ_i in $\mathcal{A}$ oppure δ_i assioma di Λ.

Teorema:

SE $\mathcal{A}, \alpha \vdash_{\Lambda} \chi$ ALLORA $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \alpha \Rightarrow \chi$

Dim.: Sia

$$\delta_0\,, \quad \ldots, \quad \delta_h$$

una dimostrazione da $\mathcal{A} \cup \{\alpha\}$; allora, induttivam., per ogni i costruiamo una dim. di $\alpha \Rightarrow \delta_i$ da $\mathcal{A}$.

Caso $\delta_i \; = \; \alpha$.

Caso δ_i in $\mathcal{A}$ oppure δ_i assioma di Λ. Bastano 3 passaggi:

$$\delta_i\,, \quad \delta_i \Rightarrow \alpha \Rightarrow \delta_i\,, \quad \alpha \Rightarrow \delta_i\,.$$

Teorema:

SE $\mathcal{A}, \alpha \vdash_\Lambda \chi$ ALLORA $\mathcal{A} \vdash_\Lambda \alpha \Rightarrow \chi$

Dim.: Sia

$$\delta_0\,, \quad \ldots, \quad \delta_h$$

una dimostrazione da $\mathcal{A} \cup \{\alpha\}$; allora, induttivam., per ogni i costruiamo una dim. di $\alpha \Rightarrow \delta_i$ da $\mathcal{A}$.

`Caso` $\delta_i = \alpha$ `.`

`Caso` δ_i `in` $\mathcal{A}$ `oppure` δ_i `assioma di` Λ`.`

`Caso` δ_i `ottenuto tramite MP da` δ_j `e` $\delta_j \Rightarrow \delta_i$`.`

Teorema:

Se $\mathcal{A},\, \alpha \vdash_{\Lambda} \chi$ allora $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \alpha \Rightarrow \chi$

Dim.: Sia

$$\delta_0\,,\quad \ldots,\quad \delta_h$$

una dimostrazione da $\mathcal{A} \cup \{\alpha\}$; allora, induttivam., per ogni i costruiamo una dim. di $\alpha \Rightarrow \delta_i$ da $\mathcal{A}$.

Caso $\delta_i = \alpha$.

Caso δ_i in $\mathcal{A}$ oppure δ_i assioma di Λ.

Caso δ_i ottenuto tramite MP da δ_j e $\delta_j \Rightarrow \delta_i$.

Concateniamo le dim. di $\alpha \Rightarrow \delta_j$ e di $\alpha \Rightarrow \delta_j \Rightarrow \delta_i$ e proseguiamo:

$$(\alpha \Rightarrow \delta_j \Rightarrow \delta_i) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \delta_j) \Rightarrow \alpha \Rightarrow \delta_i\,, \qquad \text{II}$$

per concludere con due MP .

Teorema:

SE $\mathcal{A}, \alpha \vdash_{\Lambda} \chi$ ALLORA $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \alpha \Rightarrow \chi$

$\leadsto$ **Dim.:**

Teorema:

Se $\mathcal{A}, \alpha \vdash_\Lambda \chi$ allora $\mathcal{A} \vdash_\Lambda \alpha \Rightarrow \chi$

$\rightsquigarrow$ **Dim.:**

Caso $\delta_i = \exists x\, \varphi(x) \Rightarrow \psi$ ottenuto tramite Gen da $\delta_j = \varphi(x) \Rightarrow \psi$.

Teorema:

SE $\mathcal{A}, \alpha \vdash_{\Lambda} \chi$ ALLORA $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \alpha \Rightarrow \chi$

$\rightsquigarrow$ **Dim.:**

Caso $\delta_i = \exists x\, \varphi(x) \Rightarrow \psi$ ottenuto tramite Gen da $\delta_j = \varphi(x) \Rightarrow \psi$. Prolunghiamo cosí la dim. di

$$\alpha \Rightarrow \varphi(x) \Rightarrow \psi$$

da $\mathcal{A}$:

Teorema:

SE $\mathcal{A}, \alpha \vdash_{\Lambda} \chi$ ALLORA $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \alpha \Rightarrow \chi$

$\rightsquigarrow$ **Dim.:**

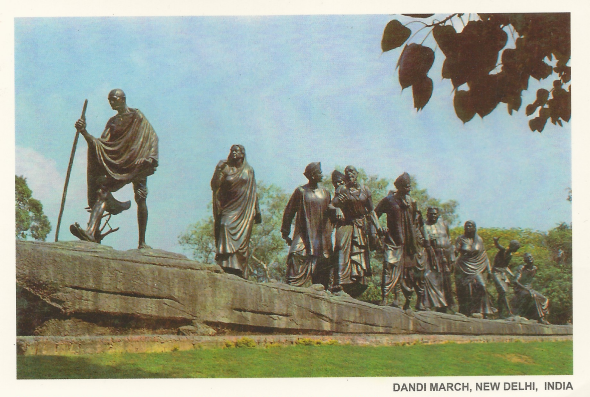
Caso $\delta_i = \exists x\, \varphi(x) \Rightarrow \psi$ ottenuto tramite Gen da $\delta_j = \varphi(x) \Rightarrow \psi$. Prolunghiamo cosí la dim. di

$$\alpha \Rightarrow \varphi(x) \Rightarrow \psi$$

da $\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{rcccll} \varphi(x) & \Rightarrow & \alpha & \Rightarrow & \psi & \text{SW} \\ \exists x\, \varphi(x) & \Rightarrow & \alpha & \Rightarrow & \psi & \text{Gen} \\ \alpha & \Rightarrow & \exists x\, \varphi(x) & \Rightarrow & \psi & \text{SW} \end{array}$$

$\square$


DANDI MARCH, NEW DELHI, INDIA

Teorema (della costante eliminabile)

Le firme dei linguaggi predicativi del prim'ordine Λ e Λ' siano:

- $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$, d e
- $\mathcal{C} \cup \{c\}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$, d rispettivam.,

con $c \notin \mathcal{C}$.

Teorema (della costante eliminabile)

Le firme dei linguaggi predicativi del prim'ordine Λ e Λ' siano:

- $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$, d e
- $\mathcal{C} \cup \{c\}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$, d rispettivam.,

con $c \notin \mathcal{C}$. Supponiamo poi che:

- φ sia una formula di Λ,
- $\mathcal{A}$ sia formato di enunciati di Λ e che

Teorema (della costante eliminabile)

Le firme dei linguaggi predicativi del prim'ordine Λ e Λ' siano:

- $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$, d e
- $\mathcal{C} \cup \{c\}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$, d rispettivam.,

con $c \notin \mathcal{C}$. Supponiamo poi che:

- φ sia una formula di Λ,
- $\mathcal{A}$ sia formato di enunciati di Λ e che
- $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda'} \varphi_c^{\nu_i}$

Teorema (della costante eliminabile)

Le firme dei linguaggi predicativi del prim'ordine Λ e Λ' siano:

- $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$, d e
- $\mathcal{C} \cup \{c\}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$, d rispettivam.,

con $c \notin \mathcal{C}$. Supponiamo poi che:

- φ sia una formula di Λ,
- $\mathcal{A}$ sia formato di enunciati di Λ e che
- $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda'} \varphi_c^{\nu_i}$

Allora

$$\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \varphi$$

TEOREMA (della costante eliminabile)

Le firme dei linguaggi predicativi del prim'ordine Λ e Λ' siano:

- $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$, d e
- $\mathcal{C} \cup \{c\}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$, d rispettivam.,

con $c \notin \mathcal{C}$. Supponiamo poi che:

- φ sia una formula di Λ,
- $\mathcal{A}$ sia formato di enunciati di Λ e che
- $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda'} \varphi_c^{\nu_i}$

Allora

$$\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \varphi$$

(Per dimostraz.: Vedi [Davis93, pag. 27])

Teorema (della costante eliminabile)

Le firme dei linguaggi predicativi del prim'ordine Λ e Λ' siano:

- $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$, d e
- $\mathcal{C} \cup \{c\}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$, d rispettivam.,

con $c \notin \mathcal{C}$. Supponiamo poi che:

- φ sia una formula di Λ,
- $\mathcal{A} \cup \{\gamma\}$ sia formato di enunciati di Λ e che
- $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda'} \varphi_c^{\nu_i}$, $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda'} \gamma$.

Allora

$$\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \varphi, \qquad \mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \gamma.$$

(Per dimostraz.: Vedi [Davis93, pag. 27])

Corollario (Dimostrabilità delle tautologie)

Se ϑ è una formula tautologica allora, nel calcolo predicativo:

$$\vdash_{\Lambda} \quad \vartheta$$

COROLLARIO (Dimostrabilità delle tautologie)

Se ϑ è una formula tautologica allora, nel calcolo predicativo:

$$\vdash_{\Lambda} \ \vartheta\,.$$

DIM.:

Introduciamo nuove costanti

$$c_1\,,\ldots,\,c_n$$

in numero pari a quello delle var. libere distinte in ϑ :

$$\vartheta \quad = \quad \vartheta(x_1,\ldots,x_n)$$

COROLLARIO (Dimostrabilità delle tautologie)

Se ϑ è una formula tautologica allora, nel calcolo predicativo:

$$\vdash_{\Lambda} \quad \vartheta \, .$$

DIM.:

Introduciamo nuove costanti

$$c_1 \, , \ldots , \, c_n$$

in numero pari a quello delle var. libere distinte in ϑ :

$$\vartheta \quad = \quad \vartheta(x_1, \ldots, x_n) \, .$$

Per $i = 0, \ldots, n$, otteniamo $\Lambda^{(i)}$ aggiungendo $c_1 \, , \ldots , \, c_i$ a Λ

Corollario (Dimostrabilità delle tautologie)

Se ϑ è una formula tautologica allora, nel calcolo predicativo:

$$\vdash_{\Lambda} \ \vartheta \, .$$

Dim.:

Introduciamo nuove costanti

$$c_1 \, , \ldots , c_n$$

in numero pari a quello delle var. libere distinte in ϑ :

$$\vartheta \ = \ \vartheta(x_1, \ldots, x_n) \, .$$

Per $i = 0, \ldots, n$, otteniamo $\Lambda^{(i)}$ aggiungendo $c_1 \, , \ldots , c_i$ a Λ .

Per il Cor. di Post: $\vdash_{\Lambda^{(n)}} \vartheta^{x_1,\ldots,x_n}_{c_1,\ldots,c_n}$

COROLLARIO (Dimostrabilità delle tautologie)

Se ϑ è una formula tautologica allora, nel calcolo predicativo:

$$\vdash_{\Lambda} \ \vartheta\,.$$

DIM.:

Introduciamo nuove costanti

$$c_1\,,\ldots,\,c_n$$

in numero pari a quello delle var. libere distinte in ϑ :

$$\vartheta \ = \ \vartheta(x_1,\ldots,x_n)\,.$$

Per $i=0,\ldots,n$, otteniamo $\Lambda^{(i)}$ aggiungendo $c_1\,,\ldots,\,c_i$ a Λ .

Per il Cor. di Post: $\vdash_{\Lambda^{(n)}} \vartheta^{x_1,\ldots,x_n}_{c_1,\ldots,c_n}$;

per eliminaz. di c_{i+1} , da $\vdash_{\Lambda^{(i+1)}} \vartheta^{x_1,\ldots,x_{i+1}}_{c_1,\ldots,c_{i+1}}$ discende $\vdash_{\Lambda^{(i)}} \vartheta^{x_1,\ldots,x_i}_{c_1,\ldots,c_i}$

Corollario (Dimostrabilità delle tautologie)

Se ϑ è una formula tautologica allora, nel calcolo predicativo:

$$\vdash_{\Lambda} \ \vartheta\,.$$

Dim.:

Introduciamo nuove costanti

$$c_1\,, \ldots, c_n$$

in numero pari a quello delle var. libere distinte in ϑ :

$$\vartheta \ = \ \vartheta(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Per $i = 0, \ldots, n$, otteniamo $\Lambda^{(i)}$ aggiungendo $c_1\,, \ldots, c_i$ a Λ .

Per il Cor. di Post: $\vdash_{\Lambda^{(n)}} \vartheta^{x_1,\ldots,x_n}_{c_1,\ldots,c_n}$;

per eliminaz. di c_{i+1} , da $\vdash_{\Lambda^{(i+1)}} \vartheta^{x_1,\ldots,x_{i+1}}_{c_1,\ldots,c_{i+1}}$ discende $\vdash_{\Lambda^{(i)}} \vartheta^{x_1,\ldots,x_i}_{c_1,\ldots,c_i}$.

Propagando a ritroso . . . .

Corollario (Dimostrabilità delle tautologie)

Se ϑ è una formula tautologica allora, nel calcolo predicativo:

$$\vdash_{\Lambda} \ \vartheta \, .$$

Dim.:

Introduciamo nuove costanti

$$c_1 \, , \ldots , \, c_n$$

in numero pari a quello delle var. libere distinte in ϑ :

$$\vartheta \ = \ \vartheta(x_1, \ldots, x_n) \, .$$

Per $i = 0, \ldots, n$, otteniamo $\Lambda^{(i)}$ aggiungendo $c_1 \, , \ldots , \, c_i$ a Λ .

Per il Cor. di Post: $\vdash_{\Lambda^{(n)}} \vartheta^{x_1,\ldots,x_n}_{c_1,\ldots,c_n}$;

per eliminaz. di c_{i+1} , da $\vdash_{\Lambda^{(i+1)}} \vartheta^{x_1,\ldots,x_{i+1}}_{c_1,\ldots,c_{i+1}}$ discende $\vdash_{\Lambda^{(i)}} \vartheta^{x_1,\ldots,x_i}_{c_1,\ldots,c_i}$.

Propagando a ritroso, otteniamo $\vdash_{\Lambda^{(0)}} \vartheta$. $\square$

Es. d'uso di Taut:

Se $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \varphi(x)$ allora $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \forall x\, \varphi(x)$

Possiamo cosí *prolungare* una dimostrazione di

$$\varphi(x)$$

da $\mathcal{A}$

SE $\mathcal{A} \vdash_\Lambda \varphi(x)$ ALLORA $\mathcal{A} \vdash_\Lambda \forall x\, \varphi(x)$

Possiamo cosí *prolungare* una dimostrazione di

da $\mathcal{A}$:

$$\varphi(x)$$

$\varphi(x) \Rightarrow (\varphi(x) \Rightarrow f) \Rightarrow f$	Taut
$(\varphi(x) \Rightarrow f) \Rightarrow f$	MP
$\exists x\, (\varphi(x) \Rightarrow f) \Rightarrow f$	$\text{Gen}_\exists$

SE $\mathcal{A} \vdash_\Lambda \varphi(x)$ ALLORA $\mathcal{A} \vdash_\Lambda \forall x\, \varphi(x)$

Possiamo cosí *prolungare* una dimostrazione di

$$\varphi(x)$$

da $\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{ll}
\varphi(x) \Rightarrow (\varphi(x) \Rightarrow f) \Rightarrow f & \text{Taut} \\
(\varphi(x) \Rightarrow f) \Rightarrow f & \text{MP} \\
\exists x\, (\varphi(x) \Rightarrow f) \Rightarrow f & \text{Gen}_\exists
\end{array}$$

e si richiamino le def.

$$\begin{array}{lll}
\neg\psi & =_{\text{Def}} & \psi \Rightarrow f \\
\forall x\, \varphi & =_{\text{Def}} & \neg(\exists x \neg \varphi)
\end{array}$$

$\square$

TEOREMA (della premessa fantasma)

Siano

$$\Lambda\,,\Lambda'\,,c\,,\mathcal{A}\,,\varphi$$

come sopra e in φ compaia libera solo la x. Allora da

$$\mathcal{A},\ (\exists\, x\, \varphi)\ \Rightarrow\ \varphi_c^x \quad \vdash_{\Lambda'} \quad \varphi$$

discende che

$$\mathcal{A}\ \vdash_{\Lambda}\ \varphi\,.$$

$\leadsto$

Teorema (della premessa fantasma)

Siano

$$\Lambda, \Lambda', c, \mathcal{A}, \varphi$$

come sopra e in φ compaia libera solo la x. Allora da

$$\mathcal{A}, (\exists x \varphi) \Rightarrow \varphi_c^x \quad \vdash_{\Lambda'} \quad \varphi$$

discende che

$$\mathcal{A} \ \vdash_{\Lambda} \ \varphi .$$

$\rightsquigarrow$

Lemma (preparatorio al Teor. della premessa fantasma)

Se in ψ compare libera solo la var. y, allora

$$\vdash_{\Lambda} \ \exists y \Big((\exists x \psi_x^y) \Rightarrow \psi \Big) .$$

(Dim: Vedi [Davis93, pagg. 27–28])

Dimostrazione (Teor. della premessa fantasma)

$\rightsquigarrow$ **Dim.:**

Il teor. di deduzione ci dà:

$$\mathcal{A} \;\vdash_{\Lambda'}\; (\exists x\, \varphi \Rightarrow \varphi^{x}_{c}) \Rightarrow \varphi\,,$$

DIMOSTRAZIONE (Teor. della premessa fantasma)

$\rightsquigarrow$ **Dim.:**

Il teor. di deduzione ci dà:

$$\mathcal{A} \vdash_{\Lambda'} (\exists x\, \varphi \Rightarrow \varphi^x_c) \Rightarrow \varphi\,,$$

donde eliminiamo la c sostituendole una $\boxed{\textit{nuova}}$ var. libera y :

$$\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} (\exists x\, \varphi \Rightarrow \varphi^x_y) \Rightarrow \varphi\,.$$

Dimostrazione (**Teor. della premessa fantasma**)

$\rightsquigarrow$ **Dim.:**

Il teor. di deduzione ci dà:

$$\mathcal{A} \ \vdash_{\Lambda'} \ (\exists x\, \varphi \Rightarrow \varphi^x_c) \Rightarrow \varphi\,,$$

donde eliminiamo la c sostituendole una $\boxed{\textit{nuova}}$ var. libera y :

$$\mathcal{A} \ \vdash_{\Lambda} \ (\exists x\, \varphi \Rightarrow \varphi^x_y) \Rightarrow \varphi\,.$$

Di qui, per $\text{Gen}_\exists$,

$$\mathcal{A} \ \vdash_{\Lambda} \ \exists y\,(\exists x\, \varphi \Rightarrow \varphi^x_y) \Rightarrow \varphi$$

Dimostrazione (**Teor. della premessa fantasma**)

$\rightsquigarrow$ **Dim.:**

Il teor. di deduzione ci dà:

$$\mathcal{A} \ \vdash_{\Lambda'} \ (\exists x\, \varphi \Rightarrow \varphi^x_c) \Rightarrow \varphi\,,$$

donde eliminiamo la c sostituendole una $\boxed{\textit{nuova}}$ var. libera y :

$$\mathcal{A} \ \vdash_{\Lambda} \ (\exists x\, \varphi \Rightarrow \varphi^x_y) \Rightarrow \varphi\,.$$

Di qui, per $\mathrm{Gen}_\exists$,

$$\mathcal{A} \ \vdash_{\Lambda} \ \exists y\, (\exists x\, \varphi \Rightarrow \varphi^x_y) \Rightarrow \varphi\,;$$

onde, grazie al lemma preparatorio (ove $\psi = \varphi^x_y$), tramite MP:

$$\mathcal{A} \ \vdash_{\Lambda} \ \varphi\,.$$

$\square$

Potremmo forse introdurre, anziché nuove costanti, simboli di funzione come 'testimoni' di enunciati della forma

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \quad \exists y \quad \chi(x_1, \ldots, x_n, y) \ ?$$

Potremmo forse introdurre, anziché nuove costanti, simboli di funzione come 'testimoni' di enunciati della forma

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \quad \exists y \quad \chi(x_1, \ldots, x_n, y) \ ?$$

(**A. Thoralf Skolem**, Sandsvær 1887–Oslo 1963)

$$\forall g\, \forall h\, \forall k\, (\quad (g \cdot h) \cdot k \;=\; g \cdot (h \cdot k) \qquad)$$

$$\exists e\, \forall g\, (\quad e \cdot g = g \;\;\&\;\; \exists h\;\; h \cdot g = e \quad)$$

$$\forall g \forall h \forall k \, (\quad (g \cdot h) \cdot k \; = \; g \cdot (h \cdot k) \quad)$$

$$\exists e \forall g \, (\quad e \cdot g = g \quad \& \quad \exists h \quad h \cdot g = e \quad)$$

$$\Downarrow\Downarrow\Downarrow$$

$$\forall g \forall h \forall k \, (\quad g \cdot h \cdot k \; = \; g \cdot (h \cdot k) \quad)$$

$$\exists e \forall g \exists h (\quad e \cdot g = g \quad \& \quad h \cdot g = e \quad)$$

$$\forall g\,\forall h\,\forall k\,\big(\ (g\cdot h)\cdot k \;=\; g\cdot(h\cdot k)\ \big)$$
$$\exists e\,\forall g\,\big(\ e\cdot g = g \ \ \&\ \ \exists h\ \ h\cdot g = e\ \big)$$
$$\downdownarrows\downdownarrows\downdownarrows$$
$$\forall g\,\forall h\,\forall k\,\big(\ g\cdot h\cdot k \;=\; g\cdot(h\cdot k)\ \big)$$
$$\exists e\,\forall g\,\exists h\big(\ e\cdot g = g \ \ \&\ \ h\cdot g = e\ \big)$$
$$\downdownarrows\downdownarrows\downdownarrows$$
$$\forall g\,\forall h\,\forall k\,\big(\ g\cdot h\cdot k \;=\; g\cdot(h\cdot k)\ \big)$$
$$\forall g\,\big(\ \mathbf{e}\cdot g = g \ \ \&\ \ g^{-}\cdot g = \mathbf{e}\ \big)$$

(E) $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$

(N) $\exists z \forall v (\neg v \in z)$

(W) $\forall x \forall y \exists w \forall v (v \in w \leftrightarrow (v \in x \vee v = y))$

(L) $\forall x \forall y \exists \ell \forall v (v \in \ell \leftrightarrow (v \in x \,\&\, \neg v = y))$

(R) $\forall x \exists a \forall y (y \in x \rightarrow (a \in x \,\&\, \neg y \in a))$

(E) $\forall x \forall y (\ \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y \ )$

$\rightsquigarrow$???

(N) $\exists z \forall v (\ \neg\, v \in z \ )$

$\rightsquigarrow$ $\forall v (\ v \notin \varnothing \ )$

(W) $\forall x \forall y \exists w \forall v (\ v \in w \leftrightarrow (v \in x \vee v = y) \ )$

(L) $\forall x \forall y \exists \ell \forall v (\ v \in \ell \leftrightarrow (v \in x \,\&\, \neg\, v = y) \ )$

(R) $\forall x \exists a \forall y (\ y \in x \rightarrow (a \in x \,\&\, \neg\, y \in a) \ )$

(E) $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$

(N) $\exists z \forall v (\neg\, v \in z)$

$\rightsquigarrow$ $\forall v (v \notin \varnothing)$

(W) $\forall x \forall y \exists w \forall v (v \in w \leftrightarrow (v \in x \vee v = y))$

$\rightsquigarrow$ $\forall x \forall y \forall v (v \in \mathrm{w}(x, y) \leftrightarrow (v \in x \vee v = y))$

(L) $\forall x \forall y \exists \ell \forall v (v \in \ell \leftrightarrow (v \in x \,\&\, \neg\, v = y))$

(R) $\forall x \exists a \forall y (y \in x \rightarrow (a \in x \,\&\, \neg\, y \in a))$

Es. Skolemizzazione: primi assiomi insiemistici

$$
\begin{array}{lrcl}
\textbf{(E)} & \forall x\,\forall y\big(& \forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y & \big) \\
\textbf{(N)} & \exists z\,\forall v\big(& \neg\, v \in z & \big) \\
\rightsquigarrow & \forall v\big(& v \notin \varnothing & \big) \\
\textbf{(W)} & \forall x\,\forall y\,\exists w\,\forall v\,\big(& v \in w \leftrightarrow (v \in x \vee v = y) & \big) \\
\rightsquigarrow & \forall x\,\forall y\,\forall v\,\big(& v \in \mathrm{w}(x,y) \leftrightarrow (v \in x \vee v = y) & \big) \\
\textbf{(L)} & \forall x\,\forall y\,\exists \ell\,\forall v\,\big(& v \in \ell \leftrightarrow (v \in x \,\&\, \neg\, v = y) & \big) \\
\rightsquigarrow & \forall x\,\forall y\,\forall v\,\big(& v \in \ell(x,y) \leftrightarrow (v \in x \,\&\, v \neq y) & \big) \\
\textbf{(R)} & \forall x\,\exists a\,\forall y\big(& y \in x \to (a \in x \,\&\, \neg\, y \in a) & \big)
\end{array}
$$

(E) $\forall x \forall y \big(\forall z \, (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y \big)$

$\rightsquigarrow$???

(N) $\exists z \forall v \big(\neg \, v \in z \big)$

$\rightsquigarrow$ $\forall v \big(v \notin \varnothing \big)$

(W) $\forall x \forall y \exists w \forall v \big(v \in w \leftrightarrow (v \in x \vee v = y) \big)$

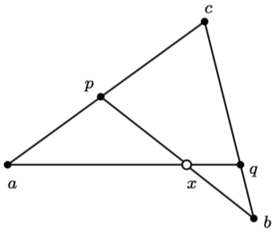
$\rightsquigarrow$ $\forall x \forall y \forall v \big(v \in \mathrm{w}(x, y) \leftrightarrow (v \in x \vee v = y) \big)$

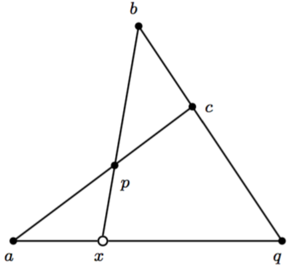
(L) $\forall x \forall y \exists \ell \forall v \big(v \in \ell \leftrightarrow (v \in x \,\&\, \neg \, v = y) \big)$

$\rightsquigarrow$ $\forall x \forall y \forall v \big(v \in \ell(x, y) \leftrightarrow (v \in x \,\&\, v \neq y) \big)$

(R) $\forall x \exists a \forall y \big(y \in x \rightarrow (a \in x \,\&\, \neg \, y \in a) \big)$

$\rightsquigarrow$ $\forall x \forall y \big(y \in x \rightarrow (\mathrm{arb}(x) \in x \,\&\, y \notin \mathrm{arb}(x)) \big)$





$$\boxed{\begin{array}{lcl} B\,apc \,\&\, B\,bqc & \longrightarrow & \exists\, x\ (\,B\,pxb \,\&\, B\,qxa\,) \\ B\,apc \,\&\, B\,qcb & \longrightarrow & \exists\, x\ (\,B\,axq \,\&\, B\,bpx\,) \end{array}} \quad \begin{array}{l} (\mathrm{IP}) \\ (\mathrm{OP}) \end{array}$$

Def.: Espansione di Henkin della firma di Λ

La firma di Λ sia

$$\mathcal{C}\,,\quad \mathcal{F}\,,\quad \mathcal{R}$$

Def.: ESPANSIONE DI HENKIN DELLA FIRMA DI Λ

La firma di Λ sia

$$\mathcal{C}\,,\quad \mathcal{F}\,,\quad \mathcal{R}\,,\quad d\,.$$

Associamo univocam. a ogni $\boxed{\text{enunciato}}$ di Λ della forma $\exists\, x\, \varphi$ una costante c_φ *non* appartenente a $\mathcal{C}$; poi poniamo:

Def.: Espansione di Henkin della firma di Λ

La firma di Λ sia

$$\mathcal{C}\,,\quad \mathcal{F}\,,\quad \mathcal{R}\,,\quad d\,.$$

Associamo univocam. a ogni $\boxed{\text{enunciato}}$ di Λ della forma $\exists\, x\, \varphi$ una costante c_φ *non* appartenente a $\mathcal{C}$; poi poniamo:

$$\widehat{\Lambda} \; =_{\text{Def}} \text{ linguaggio con la firma}$$

$$\mathcal{C} \cup \left\{ c_\varphi : \exists\, x\, \varphi \text{ enunciato di } \Lambda \right\}, \mathcal{F}\,, \mathcal{R}$$

Def.: ESPANSIONE DI HENKIN DELLA FIRMA DI Λ

La firma di Λ sia

$$\mathcal{C}\,, \quad \mathcal{F}\,, \quad \mathcal{R}\,, \quad d\,.$$

Associamo <u>univocam.</u> a ogni $\boxed{\text{enunciato}}$ di Λ della forma $\exists\, x\ \varphi$ una costante c_φ <u>*non*</u> appartenente a $\mathcal{C}$; poi poniamo:

$\widehat{\Lambda} \ =_{\text{Def}}$ linguaggio con la firma

$$\mathcal{C} \cup \left\{\, c_\varphi : \exists\, x\ \varphi \text{ enunciato di } \Lambda \,\right\}, \mathcal{F}, \mathcal{R};$$

$\mathcal{E}_\Lambda \ =_{\text{Def}}$

$$\left\{\, \left(\exists\, x\ \varphi \ \Rightarrow\ \varphi^{x}_{c_\varphi}\right) : \exists\, x\ \varphi \text{ enunciato di } \Lambda \,\right\}.$$

Supponendo ad es. di avere, in Λ :

- in $\mathcal{C}$ la costante 0
- in $\mathcal{R}$ il relatore $=$ (con $\mathrm{d}(=) = 2$),

in $\widehat{\Lambda}$ troveremo (assieme a infinite altre) due nuove costanti $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{k}$ soggette, in $\mathcal{E}_\Lambda$, alle condizioni

1. $\big(\exists\, x\, \neg x = 0\big) \quad \rightarrow \quad \neg \boldsymbol{c} = 0$
2. $$\big(\exists\, x\, \exists\, y\, \neg(x = 0 \vee y = 0 \vee x = y)\big) \quad \rightarrow$$ $$\big(\exists\, y\, \neg(\boldsymbol{k} = 0 \vee y = 0 \vee \boldsymbol{k} = y)\big)$$

Teorema: Da $\mathcal{A} \cup \mathcal{E}_\Lambda \vdash_{\widehat{\Lambda}} \gamma$, con $\mathcal{A} \cup \{\gamma\}$ enunciati di Λ, discende $\mathcal{A} \vdash_\Lambda \gamma$

Teorema: Da $\mathcal{A} \cup \mathcal{E}_{\Lambda} \vdash_{\widehat{\Lambda}} \gamma$ **, con** $\mathcal{A} \cup \{\gamma\}$ **enunciati di** Λ**, discende** $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \gamma$

Dim. "By compactness, we can do with a finite number of elements of $\mathcal{E}_{\Lambda}$. But then the Ghost Premise Theorem permits us to eliminate them one at a time." [Davis93, pag. 29] □

Def.: Completamento di Henkin

Poniamo:

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_0 & =_{\mathsf{Def}} & \Lambda\,, \\ \Lambda_{i+1} & =_{\mathsf{Def}} & \widehat{\Lambda}_i\,, \\ \mathcal{H}_i & =_{\mathsf{Def}} & \mathcal{E}_{\Lambda_0} \cup \cdots \cup \mathcal{E}_{\Lambda_i}\,, \end{array}$$

per $i = 0, 1, 2, \ldots$; da ultimo,

Def.: Completamento di Henkin

Poniamo:

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_0 & =_{\mathsf{Def}} & \Lambda\,, \\ \Lambda_{i+1} & =_{\mathsf{Def}} & \widehat{\Lambda}_i\,, \\ \mathcal{H}_i & =_{\mathsf{Def}} & \mathcal{E}_{\Lambda_0} \cup \cdots \cup \mathcal{E}_{\Lambda_i}\,, \end{array}$$

per $i = 0, 1, 2, \ldots$; da ultimo,

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_\omega & =_{\mathsf{Def}} & \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Lambda_i\,, \\ \mathcal{H}_\omega & =_{\mathsf{Def}} & \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_i\,. \end{array}$$

Proseguendo nell'esempio di prima: in Λ_2 ci sarà (con ∞ altre) una nuova costante $\boldsymbol{h}$ tale che in $\mathcal{H}_2$ ($\subseteq \mathcal{H}_\omega$), siano compresenti le condizioni

1. $\big(\exists\, x\, \neg x = 0\big) \quad \rightarrow \quad \neg \boldsymbol{c} = 0$
3. $$\big(\exists\, x\ \neg(x = 0 \vee \boldsymbol{c} = 0 \vee x = \boldsymbol{c})\big) \quad \rightarrow \quad \neg(\boldsymbol{h} = 0 \vee \boldsymbol{c} = 0 \vee \boldsymbol{h} = \boldsymbol{c})$$

Conservatività del completamento di Henkin

Teorema: Da $\mathcal{A} \cup \mathcal{H}_\omega \vdash_{\Lambda_\omega} \gamma$, con $\mathcal{A} \cup \{\gamma\}$ enunciati di Λ, discende $\mathcal{A} \vdash_\Lambda \gamma$

1

[1]

TEOREMA: Da $\mathcal{A} \cup \mathcal{H}_\omega \vdash_{\Lambda_\omega} \gamma$, con $\mathcal{A} \cup \{\gamma\}$ enunciati di Λ, discende $\mathcal{A} \vdash_\Lambda \gamma$

Dim. "By compactness (and the Free Constant Theorem)

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{H}_n \ \vdash_{\Lambda_n} \ \gamma$$

for some n. Now, by the previous theorem, we can replace n by $n-1$. Continuing, we get the result." [Davis93, pag. 29] $\square$

[1] Il "Free constant theorem" è quello piú su abbiamo chiamato: "Teorema della costante eliminabile".

> Wir haben oft ein Zeichen nötig, mit dem wir einen sehr zusammengesetzten Sinn verbinden. Dieses Zeichen dient uns sozusagen als Gefäß, in dem wir diesen Sinn mit uns führen können, immer in dem Bewußtsein, daß wir dieses Gefäß öffnen können, wenn wir seines Inhalts bedürfen.
>
> (Gottlob Frege) [2]

[2] "Spesso ci occorre associare un qualche significato altamente composito ad un simbolo. Tale simbolo ci serve per cosí dire da contenitore, in cui portarci dietro questo significato, consci sempre che potremmo aprirlo ove ci servisse il suo contenuto."

Gottlob Frege, Logik in der Mathematik. In G. Frege, Schriften zur Logik und Sprachphilosophie. Aus dem Nachlaß herausgegeben von G. Gabriel. Felix Meiner Verlag, Philosophische Bibliothek, Band 277, Hamburg, 1971, 92–165 (the quote is from pp. 101/102).

Definizione

Dicesi *Universo di Herbrand* l'insieme dei termini $\boxed{\text{chiusi}}$ di un linguaggio (pred. del 1º ord.) dotato di

Definizione

Dicesi ***Universo di Herbrand*** l'insieme dei termini $\boxed{\text{chiusi}}$ di un linguaggio (pred. del $1^{\underline{o}}$ ord.) dotato di

- un insieme *contabile* —o, come caso particolare, finito— di costanti ,

Definizione

Dicesi *Universo di Herbrand* l'insieme dei termini $\boxed{\text{chiusi}}$ di un linguaggio (pred. del 1º ord.) dotato di

- un insieme *contabile* —o, come caso particolare, finito— di costanti ,
- *almeno una* costante (perché ?)

Definizione

Dicesi *Universo di Herbrand* l'insieme dei termini $\boxed{\text{chiusi}}$ di un linguaggio (pred. del 1º ord.) dotato di

- un insieme *contabile* —o, come caso particolare, finito— di costanti ,
- *almeno una* costante (perché ?)
- un ins. *finito* —o, come caso particolare, vuoto— di funtori ,

DEFINIZIONE

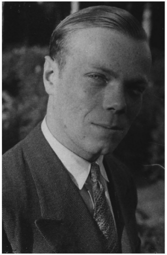
Dicesi ***Universo di Herbrand*** l'insieme dei termini $\boxed{\text{chiusi}}$ di un linguaggio (pred. del 1º ord.) dotato di

- un insieme *contabile* —o, come caso particolare, finito— di costanti ,
- *almeno una* costante (perché ?)
- un ins. *finito* —o, come caso particolare, vuoto— di funtori ,
- un ins. *finito* —ma non vuoto— di relatori .

DEFINIZIONE

Dicesi —un po' impropriam.— ***Universo di Herbrand*** l'insieme dei termini $\boxed{\text{chiusi}}$ di un linguaggio (pred. del 1º ord.) dotato di

- un insieme *contabile* —o, come caso particolare, finito— di costanti ,
- *almeno una* costante (perché ?)
- un ins. *finito* —o, come caso particolare, vuoto— di funtori ,
- un ins. *finito* —ma non vuoto— di relatori .



(Jacques Herbrand, 1908–1931)

Digressione sugli universi di Herbrand

Definizione

Dicesi —un po' impropriam.— ***Universo di Herbrand*** l'insieme dei termini $\boxed{\text{chiusi}}$ di un linguaggio (pred. del 1º ord.) dotato di

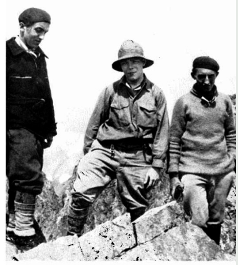
- un insieme *contabile* —o, come caso particolare, finito— di costanti ,
- *almeno una* costante (perché ?)
- un ins. *finito* —o, come caso particolare, vuoto— di funtori ,
- un ins. *finito* —ma <u>non</u> vuoto— di relatori .

Definizione

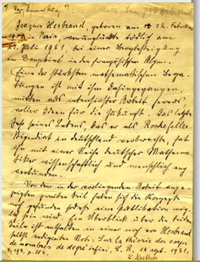
Dicesi —un po' impropriam.— ***Universo di Herbrand*** l'insieme dei termini $\boxed{\text{chiusi}}$ di un linguaggio (pred. del 1º ord.) dotato di

- un insieme *contabile* —o, come caso particolare, finito— di costanti ,
- *almeno una* costante (perché ?)
- un ins. *finito* —o, come caso particolare, vuoto— di funtori ,
- un ins. *finito* —ma <u>non</u> vuoto— di relatori .

Jacques HERBRAND



Jacques Herbrand (*au centre*) au cours de l'excursion où il trouva la mort



Esempio di universo di Herbrand

Supponendo ad es. di avere, in Λ :

- in $\mathcal{C}$ la costante 0
- in $\mathcal{F}$ il funtore S (con $\mathrm{d}(S) = 1$),

nel relativo universo di Herbrand troveremo i 'numerali' (?)

$$0\,,\quad S\,(0)\,,\quad S\,(\,S\,(0)\,)\,,\quad S\Big(\,S\,(\,S\,(0)\,)\Big)\,,\quad S\bigg(\,S\Big(\,S\,(\,S\,(0)\,)\Big)\bigg)\,,\quad \ldots$$

Supponendo ad es. di avere, in Λ :

- in $\mathcal{C}$ la costante 0
- in $\mathcal{F}$ il funtore S (con $\mathrm{d}(S) = 1$),

nel relativo universo di Herbrand troveremo i 'numerali' (?)

$$0\,,\quad S\,(0)\,,\quad S\,(\,S\,(0)\,)\,,\quad S\Big(\,S\,(\,S\,(0)\,)\,\Big)\,,\quad S\bigg(\,S\Big(\,S\,(\,S\,(0)\,)\,\Big)\,\bigg)\,,\quad \ldots$$

ESERCIZIO:

E se in $\mathcal{F}$ avessimo anche l'operatore $+$ (con $\mathrm{d}(+) = 2$),
cosa cambierebbe? $\square$

Definizione:

Un linguaggio (pred. del 1º ord.) si dice **semplice** se

1. ha un insieme *contabile* finito o infinito $\mathcal{C}$ di costanti;
2. ha un insieme *finito* $\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ di funtori e relatori

$\square$

Definizione:

Un linguaggio (pred. del 1º ord.) si dice **semplice** se

1. ha un insieme *contabile* finito o infinito $\mathcal{C}$ di costanti;
2. ha un insieme *finito* $\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ di funtori e relatori

$\square$

Esercizio:

Mostrare che se Λ è semplice, allora i termini chiusi di Λ_ω formano un universo di Herbrand. $\square$

Esercizio:

Mostrare: Tranne che Λ abbia $\mathcal{C}$ vuoto, ogni insieme di enunciati atomici di Λ induce una struttura interpretativa per Λ. $\square$

Al netto dell'uguaglianza (per ora!):

COMPLETEZZA DEL CALCOLO PREDICATIVO DEL $1^{\underline{o}}$ ORDINE

Sia $\mathcal{A} \cup \{\gamma\}$ un insieme di enunciati di Λ.
Se γ è vera in ogni modello $\mathfrak{I}$ di $\mathcal{A}$, allora

$$\mathcal{A} \ \vdash_{\Lambda} \ \gamma\,.$$

Teorema di completezza (Kurt Gödel, 1929; Leon Henkin, 1948; Gisbert Hasenjaeger, 1953)

Al netto dell'uguaglianza (per ora!):

Completezza del calcolo predicativo del 1º ordine

Sia $\mathcal{A} \cup \{\gamma\}$ un insieme di enunciati di Λ.
Se γ è vera in ogni modello $\mathfrak{I}$ di $\mathcal{A}$, allora

$$\mathcal{A} \;\vdash_{\Lambda}\; \gamma\,.$$

In breve: Da $\mathcal{A} \models_{\Lambda} \gamma$ discende $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \gamma$.

Traccia della dim. che da $\mathcal{A} \models_{\Lambda} \gamma$ discende $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \gamma$

Siano Λ_ω ed $\mathcal{H}_\omega$ come sopra e sia $\mathcal{X}$ l'insieme di tutti gli enunciati di Λ_ω della forma

$$\psi_\tau^x \quad \rightarrow \quad \exists\, x\, \psi\,.$$

Traccia della dim. che da $\mathcal{A} \models_{\Lambda} \gamma$ discende $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \gamma$

Siano Λ_ω ed $\mathcal{H}_\omega$ come sopra e sia $\mathcal{X}$ l'insieme di tutti gli enunciati di Λ_ω della forma

$$\psi^{x}_{\tau} \quad \rightarrow \quad \exists\, x\, \psi\,.$$

Partendo con un ipotetico $\boxed{\text{assegnamento}}$ q per gli enunciati di Λ_ω che inveri $\mathcal{X} \cup \mathcal{H}_\omega \cup \mathcal{A}$, mostreremo che $q(\gamma) = \mathtt{v}$.

TRACCIA DELLA DIM. CHE DA $\mathcal{A} \models_\Lambda \gamma$ DISCENDE $\mathcal{A} \vdash_\Lambda \gamma$

Siano Λ_ω ed $\mathcal{H}_\omega$ come sopra e sia $\mathcal{X}$ l'insieme di tutti gli enunciati di Λ_ω della forma

$$\psi^x_\tau \quad \rightarrow \quad \exists\, x\, \psi\,.$$

Partendo con un ipotetico $\boxed{\text{assegnamento}}$ q per gli enunciati di Λ_ω che inveri $\mathcal{X} \cup \mathcal{H}_\omega \cup \mathcal{A}$, mostreremo che $q(\gamma) = \mathtt{v}$.
Grazie al teor.-chiave per le logiche booleane, discenderà che

$$\begin{array}{rrcl} & \mathcal{X} \cup \mathcal{H}_\omega \cup \mathcal{A} & \vdash_{\Lambda_\omega} & \gamma \\ \therefore & \mathcal{H}_\omega \cup \mathcal{A} & \vdash_{\Lambda_\omega} & \gamma \\ \therefore & \mathcal{A} & \vdash_{\Lambda} & \gamma\,, \end{array}$$

tenendo conto: (1) che $\mathcal{X}$ è costituito da assiomi;
(2) della $\boxed{\text{conservatività}}$. $\square$

0. Ricaveremo da q un'interpretazione $\mathfrak{I}$ per Λ_ω...

Come fare ?

0. Ricaveremo da q un'interpretazione $\mathfrak{I}$ per Λ_{ω}...
1. ...nella quale i termini chiusi siano 'autonimi' e...

0. Ricaveremo da q un'interpretazione $\mathfrak{I}$ per Λ_ω...
1. ...nella quale i termini chiusi siano 'autonimi' e...
2. ...$\mathsf{val}_{\mathfrak{I}}(\alpha) = q(\alpha)$, per ogni enunciato α.

0. Ricaveremo da q un'interpretazione $\mathfrak{I}$ per Λ_ω...
1. ...nella quale i termini chiusi siano 'autonimi' e...
2. ...$\mathrm{val}_{\mathfrak{I}}(\alpha) = q(\alpha)$, per ogni enunciato α.
3. $\therefore$ $\mathfrak{I}$ modella $\mathcal{A}$,

Come fare ?

0. Ricaveremo da q un'interpretazione $\mathfrak{I}$ per $\Lambda_\omega \ldots$
1. ... nella quale i termini chiusi siano 'autonimi' e...
2. ... $\mathsf{val}_{\mathfrak{I}}(\alpha) = q(\alpha)$, per ogni enunciato α.
3. $\therefore$ $\mathfrak{I}$ modella $\mathcal{A}$,
4. $\therefore$ $\mathsf{val}_{\mathfrak{I}}(\gamma) = \mathtt{v}$,

0. Ricaveremo da q un'interpretazione $\mathfrak{I}$ per Λ_ω...
1. ...nella quale i termini chiusi siano 'autonimi' e...
2. ...$\mathsf{val}_{\mathfrak{I}}(\alpha) = q(\alpha)$, per ogni enunciato α.
3. $\therefore$ $\mathfrak{I}$ modella $\mathcal{A}$,
4. $\therefore$ $\mathsf{val}_{\mathfrak{I}}(\gamma) = \mathtt{v}$,
5. $\therefore$ $q(\gamma) = \mathtt{v}$.

Dominio (non vuoto):

3

Dominio (non vuoto): L'insieme dei termini chiusi di Λ_ω ;

3

Costituzione della struttura $\mathfrak{I}$

Dominio (non vuoto): L'insieme dei termini chiusi di Λ_ω ;

Interpretaz. costanti: per ogni costante c di Λ_ω ,[3]

$$c^{\mathfrak{I}} \quad =_{\mathsf{Def}} \quad c\ ;$$

[3] c può appartenere a $\mathcal{C}$ o essere una cost. di Henkin.

Costituzione della struttura $\mathfrak{I}$

Dominio (non vuoto): L'insieme dei termini chiusi di Λ_ω ;

Interpretaz. costanti: per ogni costante c di Λ_ω ,

$$c^{\mathfrak{I}} \quad =_{\mathsf{Def}} \quad c \, ;$$

Interpretaz. funtori: per ogni g in $\mathcal{F}$,

$$(\underbrace{\tau_1, \ldots, \tau_{d(g)}}_{\text{t. chiusi}}) \quad \stackrel{g^{\mathfrak{I}}}{\longmapsto} \quad g\left(\tau_1, \ldots, \tau_{d(g)}\right) \; ;$$

3

Dominio (non vuoto): L'insieme dei termini chiusi di Λ_ω ;

Interpretaz. costanti: per ogni costante c di Λ_ω ,

$$c^{\mathfrak{I}} \quad =_{\mathrm{Def}} \quad c\,;$$

Interpretaz. funtori: per ogni g in $\mathcal{F}$,

$$\underbrace{(\,\tau_1,\ldots,\tau_{d(g)}\,)}_{\text{t. chiusi}} \quad \stackrel{g^{\mathfrak{I}}}{\longmapsto} \quad g\left(\tau_1,\ldots,\tau_{d(g)}\right) \ ;$$

Interpretaz. relatori: per ogni r in $\mathcal{R}$,

$$r^{\mathfrak{I}}\underbrace{(\,\tau_1,\ldots,\tau_{d(r)}\,)}_{\text{t. chiusi}} \quad = \quad q\left(r\left(\tau_1,\ldots,\tau_{d(r)}\right)\right) \ .$$

3

[4] intesa come fedeltà a q

AUTONIMIA: ogni termine designa se stesso — ovvio (induttivam.) ;

[4] intesa come fedeltà a q

AUTONIMIA: ogni termine designa se stesso — ovvio (induttivam.) ;

PRESERVAZ.[4] VALORE ENUNCIATI ATOMICI: ovvia ;

[4] intesa come fedeltà a q

AUTONIMIA: ogni termine designa se stesso — ovvio (induttivam.) ;

PRESERVAZ.[4] VALORE ENUNCIATI ATOMICI: ovvia ;

PRESERVAZ. VALORE ENUNCIATI $\alpha \rightarrow \beta$:

$$\begin{aligned} \mathrm{val}_{\mathfrak{I}}(\alpha \rightarrow \beta) &= \mathrm{val}_{\mathfrak{I}}(\alpha) \rightarrow \mathrm{val}_{\mathfrak{I}}(\beta) \\ &= q(\alpha) \rightarrow q(\beta) \quad = \quad q(\alpha \rightarrow \beta)\,; \end{aligned}$$

[4] intesa come fedeltà a q

AUTONIMIA: ogni termine designa se stesso — ovvio (induttivam.) ;

PRESERVAZ.[4] VALORE ENUNCIATI ATOMICI: ovvia ;

PRESERVAZ. VALORE ENUNCIATI $\alpha \rightarrow \beta$:

$$\begin{aligned} \mathrm{val}_{\mathfrak{I}}(\alpha \rightarrow \beta) &= \mathrm{val}_{\mathfrak{I}}(\alpha) \rightarrow \mathrm{val}_{\mathfrak{I}}(\beta) \\ &= q(\alpha) \rightarrow q(\beta) \quad = \quad q(\alpha \rightarrow \beta)\,; \end{aligned}$$

PRESERVAZ. VALORE ENUNCIATI $\exists\, x\, \psi$: Se $\mathrm{val}_{\mathfrak{I}}(\exists\, x\, \psi) = \mathtt{v}$, allora $\mathrm{val}_{\mathfrak{I}}(\psi^{x}_{\tau}) = \mathtt{v} = q(\psi^{x}_{\tau})$ per qualche t. chiuso τ e,

[4] intesa come fedeltà a q

AUTONIMIA: ogni termine designa se stesso — ovvio (induttivam.) ;

PRESERVAZ.[4] VALORE ENUNCIATI ATOMICI: ovvia ;

PRESERVAZ. VALORE ENUNCIATI $\alpha \rightarrow \beta$:

$$\begin{aligned} \mathsf{val}_{\mathfrak{I}}(\alpha \rightarrow \beta) &= \mathsf{val}_{\mathfrak{I}}(\alpha) \rightarrow \mathsf{val}_{\mathfrak{I}}(\beta) \\ &= q(\alpha) \rightarrow q(\beta) \quad = \quad q(\alpha \rightarrow \beta) ; \end{aligned}$$

PRESERVAZ. VALORE ENUNCIATI $\exists\, x\, \psi$: Se $\mathsf{val}_{\mathfrak{I}}(\exists\, x\, \psi) = \mathtt{v}$, allora $\mathsf{val}_{\mathfrak{I}}(\psi^{x}_{\tau}) = \mathtt{v} = q(\psi^{x}_{\tau})$ per <u>qualche</u> t. chiuso τ e, dato che $\psi^{x}_{\tau} \rightarrow \exists\, x\, \psi$ sta in $\mathcal{X}$,

$$q(\psi^{x}_{\tau} \rightarrow \exists\, x\, \psi) = \mathtt{v} = q(\exists\, x\, \psi) .$$

$\rightsquigarrow$

[4] intesa come fedeltà a q

$\rightsquigarrow$

PRESERVAZ. VALORE ENUNCIATI $\exists\, x\, \psi$: (cont.)

Se $\mathsf{val}_{\mathfrak{I}}(\exists\, x\, \psi) = \mathsf{f}$, allora $\mathsf{val}_{\mathfrak{I}}(\psi^{x}_{\tau}) = \mathsf{f} = q(\psi^{x}_{\tau})$
per ogni t. chiuso τ e,

$\square$

$\rightsquigarrow$

PRESERVAZ. VALORE ENUNCIATI $\exists x\, \psi$: (cont.)

Se $\mathsf{val}_{\mathfrak{I}}(\exists x\, \psi) = \mathsf{f}$, allora $\mathsf{val}_{\mathfrak{I}}(\psi^x_\tau) = \mathsf{f} = q(\psi^x_\tau)$ per ogni t. chiuso τ e, dato che $\exists x\, \psi \rightarrow \psi^x_{c_\psi}$ sta in $\mathcal{H}_\omega$,

$$\begin{aligned} q(\exists x\, \psi \rightarrow \psi^x_{c_\psi}) &= \mathtt{v}\,, \\ q(\psi^x_{c_\psi}) &= \mathsf{f} \quad = \quad q(\exists x\, \psi)\,. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema di correttezza ('soundness')

Correttezza del calcolo predicativo del 1º ordine

Sia $\mathcal{A} \cup \{\gamma\}$ un insieme di enunciati di Λ.
Se
$$\mathcal{A} \ \vdash_{\Lambda} \ \gamma\,,$$
allora γ è vera in ogni modello $\mathfrak{I}$ di $\mathcal{A}$.

(Vedi [Davis93, pagg. 31–32])

Teorema di correttezza (‘soundness’)

Correttezza del calcolo predicativo del $1^{\underline{o}}$ ordine

Sia $\mathcal{A} \cup \{\gamma\}$ un insieme di enunciati di Λ.
Se

$$\mathcal{A} \;\; \vdash_{\Lambda} \;\; \gamma\,,$$

allora γ è vera in ogni modello $\mathfrak{I}$ di $\mathcal{A}$.

In breve: Da $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \gamma$ discende $\mathcal{A} \models_{\Lambda} \gamma$.

(Vedi [Davis93, pagg. 31–32])

Martin Davis.
Lecture Notes in Logic.
Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1993.