Due esercizi sui linguaggi predicativi

Eugenio G. Omodeo

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI

Trieste, aprile–maggio 2021

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Scaletta

1. Enunciare in $\overbrace{\text{una teoria del } 1^{\underline{o}} \text{ ordine}}$ la

   Congettura di Goldbach

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Scaletta

1. Enunciare in $\overbrace{\text{una teoria del } 1^{\underline{o}} \text{ ordine}}$ la

   Congettura di Goldbach

   - Discussione

Scaletta

1. Enunciare in $\overbrace{\text{una teoria del } 1^{\underline{o}} \text{ ordine}}$ la

   Congettura di Goldbach

   - Discussione
   - La soluzione proposta

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Scaletta

1. Enunciare in $\overbrace{\text{una teoria del } 1^{\underline{o}} \text{ ordine}}$ la

   Congettura di Goldbach

   - Discussione
   - La soluzione proposta
   - Altre soluzioni proponibili...

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Scaletta

1. Enunciare in $\overbrace{\text{una teoria del } 1^{\underline{o}} \text{ ordine}}^{\text{un'aritmetica}}$ la

   Congettura di Goldbach

   - Discussione
   - La soluzione proposta
   - Altre soluzioni proponibili...
   - ...fra cui una che sfrutti il teorema Davis-Putnam-Robinson

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Scaletta

1. Enunciare in $\overbrace{\text{una teoria del } 1^{\underline{o}} \text{ ordine}}^{\text{un'aritmetica}}$ la

   Congettura di Goldbach

   - Discussione
   - La soluzione proposta
   - Altre soluzioni proponibili...
   - ...fra cui una che sfrutti il teorema Davis-Putnam-Robinson

2. Modellare un'aritmetica derogando dal suo 'standard'

Scaletta

1. Enunciare in $\overbrace{\text{una teoria del } 1^{\underline{o}} \text{ ordine}}^{\text{un'aritmetica}}$ la

   Congettura di Goldbach

   - Discussione
   - La soluzione proposta
   - Altre soluzioni proponibili...
   - ...fra cui una che sfrutti il teorema Davis-Putnam-Robinson

2. Modellare un'aritmetica derogando dal suo 'standard'

Riferim. bibliografico: [Enderton(2001), pp. 182–197 e 202 segg.]

Interpretando il linguaggio di A_E (v. sotto) nella struttura

$$\mathfrak{N} \;=\; (\,\mathbb{N},\, 0;\, S,\, +,\, \cdot,\, E;\, <\,)\,,$$

esprimervi la congettura di Christian Goldbach (del 1742):

Interpretando il linguaggio di A_E (v. sotto) nella struttura

$$\mathfrak{N} \;=\; (\,\mathbb{N},\, 0;\, S,\, +,\, \cdot,\, E;\, <\,)\,,$$

esprimervi la congettura di Christian Goldbach (del 1742):

Ogni numero intero pari $n > 2$ può venir scomposto come

$$n \;=\; p + q\,,$$

con p, q numeri primi.

Richiamo: Es. di ling. interpretato / teoria

where A_E is the set consisting of the eleven sentences listed below. (As in the preceding section, $x \leq y$ abbreviates $x < y \vee x = y$.)

Set A_E of Axioms

$\forall x$	$\mathbf{S}x \neq \mathbf{0}$	(S1)
$\forall x \forall y$	$(\mathbf{S}x = \mathbf{S}y \rightarrow x = y)$	(S2)
$\forall x \forall y$	$(x < \mathbf{S}y \leftrightarrow x \leq y)$	(L1)
$\forall x$	$x \not< \mathbf{0}$	(L2)
$\forall x \forall y$	$(x < y \vee x = y \vee y < x)$	(L3)
$\forall x$	$x + \mathbf{0} = x$	(A1)
$\forall x \forall y$	$x + \mathbf{S}y = \mathbf{S}(x + y)$	(A2)
$\forall x$	$x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$	(M1)
$\forall x \forall y$	$x \cdot \mathbf{S}y = x \cdot y + x$	(M2)
$\forall x$	$x\mathbf{E}\mathbf{0} = \mathbf{S}\mathbf{0}$	(E1)
$\forall x \forall y$	$x\,\mathbf{E}\,\mathbf{S}y = x\,\mathbf{E}\,y \cdot x$	(E2)

$$\forall y\ (\ y \neq \mathbf{0}\ \rightarrow\ \exists x\ \ y = \mathbf{S}\,x\ ) \qquad \text{(S3)}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Richiamo: Es. di ling. interpretato / teoria

where A_E is the set consisting of the eleven sentences listed below. (As in the preceding section, $x \leq y$ abbreviates $x < y \vee x = y$.)

Set A_E of Axioms

$\forall x$	$\mathbf{S}x \neq \mathbf{0}$	(S1)
$\forall x \forall y$	$(\mathbf{S}x = \mathbf{S}y \rightarrow x = y)$	(S2)
$\forall x \forall y$	$(x < \mathbf{S}y \leftrightarrow x \leq y)$	(L1)
$\forall x$	$x \not< \mathbf{0}$	(L2)
$\forall x \forall y$	$(x < y \vee x = y \vee y < x)$	(L3)
$\forall x$	$x + \mathbf{0} = x$	(A1)
$\forall x \forall y$	$x + \mathbf{S}y = \mathbf{S}(x + y)$	(A2)
$\forall x$	$x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$	(M1)
$\forall x \forall y$	$x \cdot \mathbf{S}y = x \cdot y + x$	(M2)
$\forall x$	$x\mathbf{E}\mathbf{0} = \mathbf{S}\mathbf{0}$	(E1)
$\forall x \forall y$	$x\,\mathbf{E}\,\mathbf{S}y = x\,\mathbf{E}\,y \cdot x$	(E2)
$\forall y$	$(y \neq \mathbf{0} \rightarrow \exists x \;\; y = \mathbf{S}x)$	(S3)

(Raphael Mitchel Robinson , 1911–1994)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Richiamo: Es. di ling. interpretato / teoria

3: Undecidability 203

where A_E is the set consisting of the eleven sentences listed below. (As in the preceding section, $x \leq y$ abbreviates $x < y \vee x = y$.)

Set A_E of Axioms

$\forall x$	$\mathbf{S}x \neq \mathbf{0}$	(S1)
$\forall x \forall y$	$(\mathbf{S}x = \mathbf{S}y \rightarrow x = y)$	(S2)
$\forall x \forall y$	$(x < \mathbf{S}y \leftrightarrow x \leq y)$	(L1)
$\forall x$	$x \not< \mathbf{0}$	(L2)
$\forall x \forall y$	$(x < y \vee x = y \vee y < x)$	(L3)
$\forall x$	$x + \mathbf{0} = x$	(A1)
$\forall x \forall y$	$x + \mathbf{S}y = \mathbf{S}(x + y)$	(A2)
$\forall x$	$x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$	(M1)
$\forall x \forall y$	$x \cdot \mathbf{S}y = x \cdot y + x$	(M2)
$\forall x$	$x\mathbf{E}\mathbf{0} = \mathbf{S}\mathbf{0}$	(E1)
$\forall x \forall y$	$x\,\mathbf{E}\,\mathbf{S}y = x\,\mathbf{E}\,y \cdot x$	(E2)
$\forall y\ (y \neq \mathbf{0} \rightarrow \exists x\ \ y = \mathbf{S}\,x)$		(S3)

$$\forall^{\mathfrak{I}} = \mathbb{N}$$

$$x \overset{\mathrm{S}^{\mathfrak{I}}}{\mapsto} x+1$$

$$\ddots$$

$$(x, y) \overset{\mathrm{E}^{\mathfrak{I}}}{\mapsto} x^y$$

(Raphael Mitchel Robinson , 1911–1994)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

La struttura $\mathfrak{N}$

La struttura interpretativa

$$\mathfrak{N} \;=\; (\,\mathbb{N},\, 0;\, S,\, +,\, \cdot,\, E;\, <\,),$$

è definita cosí:

La struttura $\mathfrak{N}$

La struttura interpretativa

$$\mathfrak{N} \;=\; (\,\mathbb{N},\, 0;\, S,\, +,\, \cdot,\, E;\, <\,),$$

è definita cosí:

$$\forall^{\mathfrak{I}} \;=\; \mathbb{N}, \qquad\qquad 0^{\mathfrak{I}} \;=\; 0,$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

La struttura $\mathfrak{N}$

La struttura interpretativa

$$\mathfrak{N} \;=\; (\,\mathbb{N},\, 0;\, S,\, +,\, \cdot,\, E;\, <\,),$$

è definita cosí:

$$\forall^{\mathfrak{I}} \;=\; \mathbb{N}, \qquad 0^{\mathfrak{I}} \;=\; 0, \qquad x \overset{S^{\mathfrak{I}}}{\mapsto} x+1,$$

$$(x,y) \overset{+^{\mathfrak{I}}}{\mapsto} x+y, \qquad (x,y) \overset{\cdot^{\mathfrak{I}}}{\mapsto} x\,y, \qquad (x,y) \overset{E^{\mathfrak{I}}}{\mapsto} x^{y},$$

La struttura interpretativa

$$\mathfrak{N} \;=\; (\,\mathbb{N},\, 0;\, S,\, +,\, \cdot,\, E;\, <\,),$$

è definita cosí:

$$\forall^{\mathfrak{I}} \;=\; \mathbb{N}, \qquad 0^{\mathfrak{I}} \;=\; 0, \qquad x \overset{S^{\mathfrak{I}}}{\mapsto} x+1,$$

$$(x,y) \overset{+^{\mathfrak{I}}}{\mapsto} x+y, \qquad (x,y) \overset{\cdot^{\mathfrak{I}}}{\mapsto} x\,y, \qquad (x,y) \overset{E^{\mathfrak{I}}}{\mapsto} x^{y},$$

$$x <^{\mathfrak{I}} y \quad \text{sse} \quad x < y.$$

Ogni numero intero pari $n > 2$ può venir scomposto come

$$n \quad = \quad p + q \,,$$

con p, q numeri primi.

Soluz. dell'es. sulla congettura di Goldbach

$$\forall x \left(\mathrm{S\,S\,0} < x \;\&\; \exists y\, x = y + y \rightarrow \exists p \exists q \left(x = p + q \;\&\; \mathrm{Pr}(p) \;\&\; \mathrm{Pr}(q) \right) \right)$$

ove

$$\mathrm{Pr}(X) \quad =_{\mathrm{Def}} \quad ???$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Soluz. dell'es. sulla congettura di Goldbach

$$\forall x \left(\mathrm{S}\,\mathrm{S}\,0 < x \;\&\; \exists y\, x = y + y \rightarrow \exists p \exists q \left(x = p + q \;\&\; \mathrm{Pr}(p) \;\&\; \mathrm{Pr}(q) \right) \right)$$

ove

$$\mathrm{Pr}(X) \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \neg \exists u \exists v \left(X = (u + 2) \cdot (v + 2) \right)$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Soluz. dell'es. sulla congettura di Goldbach

$$\forall x \left(\mathrm{S\,S\,0} < x \;\&\; \exists y\, x = y + y \rightarrow \exists p \exists q \left(x = p + q \;\&\; \mathrm{Pr}(p) \;\&\; \mathrm{Pr}(q) \right) \right)$$

ove

$$\mathrm{Pr}(X) \quad =_{\mathrm{Def}} \quad \neg \exists u \exists v \left(X = (u + 2) \cdot (v + 2) \right)$$

o anche:

$$\mathrm{Pr}(X) \quad =_{\mathrm{Def}} \quad \forall u \forall v \left(X = u \cdot v \rightarrow \left(u = \mathrm{S\,0} \;\leftrightarrow\; v \neq \mathrm{S\,0} \right) \right)$$

Altre enunciaz. proponibili: Equivalenti ?

$$\forall x \forall y \left(\mathrm{S\,S\,0} < x \;\&\; x = y + y \rightarrow \exists p \exists q \left(x = p + q \;\&\; \mathrm{Pr}(p) \;\&\; \mathrm{Pr}(q) \right) \right)$$

('Pr' come sopra)

Altre enunciaz. proponibili: Equivalenti ?

$$\forall x \forall y \left(\mathrm{S\,S\,0} < x \;\&\; x = y + y \rightarrow \exists p \exists q \left(x = p + q \;\&\; \mathrm{Pr}(p) \;\&\; \mathrm{Pr}(q) \right) \right)$$

('Pr' come sopra), oppure

$$\forall x \forall y \left(\mathrm{S\,S\,0} < x \;\&\; x = y + y \rightarrow \exists p \exists q \; \forall u \forall v \left(x = p + q \;\& \right. \right.$$
$$\left. \left((p = u \cdot v \vee q = u \cdot v) \rightarrow \right. \right.$$
$$\left. \left. (u = \mathrm{S\,0} \;\leftrightarrow\; v \neq \mathrm{S\,0}) \right) \right) \right)$$

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Proviamone un'altra ancora: Equivalente ?

$$\forall x \cancel{\forall y} \exists y \left(\mathrm{S\,S\,0} < x \,\&\, x = y + y \rightarrow \exists p \exists q \left(x = p + q \,\&\, \mathrm{Pr}(p) \,\&\, \mathrm{Pr}(q) \right) \right)$$

('Pr' come sopra).

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Proviamone un'altra ancora: Equivalente ?

$$\forall x \cancel{\forall y} \exists y \left(\mathrm{S\,S\,0} < x \;\&\; x = y + y \rightarrow \exists p \exists q \left(x = p + q \;\&\; \mathrm{Pr}(p) \;\&\; \mathrm{Pr}(q) \right) \right)$$

Questo enunciato è banalmente vero in $\mathfrak{N}$.

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Proviamone un'altra ancora: Equivalente ?

$$\forall x \cancel{\forall y} \exists y \Big(\mathrm{S\,S\,0} < x \;\&\; x = y + y \rightarrow \exists p \exists q \big(x = p + q \;\&\; \mathrm{Pr}(p) \;\&\; \mathrm{Pr}(q) \big) \Big)$$

Questo enunciato è banalmente vero in $\mathfrak{N}$. Si prenda come valore per la y, indipendentemente dal val. di x:

Proviamone un'altra ancora: Equivalente ?

$$\forall x \cancel{\forall y} \exists y \Big(\mathrm{S\,S\,0} < x \;\&\; x = y + y \rightarrow \exists p \exists q \big(x = p + q \;\&\; \mathrm{Pr}(p) \;\&\; \mathrm{Pr}(q) \big) \Big)$$

Questo enunciato è banalmente vero in $\mathfrak{N}$. Si prenda come valore per la y, indipendentemente dal val. di x: lo 0.

E quest'altra enunciazione è equivalente ?

$$\forall z \, \exists p \, \exists q \left(z \cdot \mathrm{S\,S\,0} + \mathrm{S\,S\,S\,S\,S\,0} \;=\; p + q \,\&\, \mathrm{Pm}(p) \,\&\, \mathrm{Pm}(q) \right)$$

ove

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

E quest'altra enunciazione è equivalente ?

$$\forall z \exists p \exists q \left(z \cdot \mathrm{S\,S\,0} + \mathrm{S\,S\,S\,S\,S\,0} = p + q \,\&\, \mathrm{Pm}(p) \,\&\, \mathrm{Pm}(q) \right)$$

ove

$$\mathrm{Pm}(X) \quad =_{\mathrm{Def}} \quad \forall u \forall v \left(X = u \cdot v \rightarrow X = u \vee X = v \right) \,\&$$

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

E quest'altra enunciazione è equivalente ?

$$\forall z \exists p \exists q \left(z \cdot \mathrm{S\,S\,0} + \mathrm{S\,S\,S\,S\,S\,0} = p + q \,\&\, \mathrm{Pm}(p) \,\&\, \mathrm{Pm}(q) \right)$$

ove

$$\mathrm{Pm}(X) \quad =_{\mathrm{Def}} \quad \forall u \forall v \left(X = u \cdot v \rightarrow X = u \vee X = v \right) \,\&\, \mathrm{S\,0} < X$$

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

E quest'altra enunciazione è equivalente ?

$$\forall z \exists p \exists q \left(z \cdot \mathrm{S\,S\,0} + \mathrm{S\,S\,S\,S\,S\,0} = p + q \,\&\, \mathrm{Pm}(p) \,\&\, \mathrm{Pm}(q) \right)$$

ove

$$\mathrm{Pm}(X) \quad =_{\mathrm{Def}} \quad \forall u \forall v \left(X = u \cdot v \rightarrow X = u \vee X = v \right) \,\&\, \mathrm{S\,0} < X$$

Qui interviene sapere piú specifico, riguardante

- $\mathfrak{N}$ o, quanto meno,

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

E quest'altra enunciazione è equivalente ?

$$\forall z \exists p \exists q \left(z \cdot \mathrm{S\,S\,0} + \mathrm{S\,S\,S\,S\,S\,0} = p + q \,\&\, \mathrm{Pm}(p) \,\&\, \mathrm{Pm}(q) \right)$$

ove

$$\mathrm{Pm}(X) \quad =_{\mathrm{Def}} \quad \forall u \forall v \left(X = u \cdot v \rightarrow X = u \vee X = v \right) \,\&\, \mathrm{S\,0} < X$$

Qui interviene sapere piú specifico, riguardante

- $\mathfrak{N}$ o, quanto meno,
- una struttura in cui tutti gli assiomi di A_E siano veri

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Sfruttando il teorema di
[Davis et al.(1961)Davis, Putnam, and Robinson],

Teorema (Davis-Putnam-Robinson). Sia

$$g : \quad \mathbb{N}^{m} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{ \perp \}$$

una funzione computabile — anche solo parzialmente. Allora il GRAFO di g, i.e.

$$\mathcal{G}(a_0, a_1, \ldots, a_m) \quad \leftrightarrow_{\text{Def}} \quad a_0 = g(a_1, \ldots, a_m)$$

è una relazione diofantea esponenziale.

delineare come costruire un'equazione diofantea esponenziale $G = 0$ che *manca di soluzione* sse la cong. di Goldbach è vera.

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

1. Si scriva un programma a registri γ che computi la funzione

$$g(a) \quad =_{\text{Def}} \quad \begin{cases} 1 & \text{se vi sono primi } p, q \\ & \text{tali che } a + a + 4 = p + q\,, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Usando il teor. DPR possiamo far meglio? –II

1. Si scriva un programma a registri γ che computi la funzione

$$g(a) \quad =_{\text{Def}} \quad \begin{cases} 1 & \text{se vi sono primi } p,\ q \\ & \text{tali che } a + a + 4 = p + q\,, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2. Alla stregua della dimostraz. Jones-Matiyasevich del teorema DPR, si ricavi da γ un sistema di equaz. diofantee esponenziali definente il grafo $\mathcal{G}(b, a)$ di g .

Usando il teor. DPR possiamo far meglio? –II

1. Si scriva un programma a registri γ che computi la funzione

$$g(a) \quad =_{\text{Def}} \quad \begin{cases} 1 & \text{se vi sono primi } p,\ q \\ & \text{tali che } a + a + 4 = p + q\,, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2. Alla stregua della dimostraz. Jones-Matiyasevich del teorema DPR, si ricavi da γ un sistema di equaz. diofantee esponenziali definente il grafo $\mathcal{G}(b, a)$ di g .
3. Si riscriva tale sistema come una singola equazione esponenziale parametrica $G(\, b, a, y_1, \ldots, y_m \,) = 0$.

Usando il teor. DPR possiamo far meglio? –II

1. Si scriva un programma a registri γ che computi la funzione

$$g(a) \quad =_{\text{Def}} \quad \begin{cases} 1 & \text{se vi sono primi } p,\ q \\ & \text{tali che } a + a + 4 = p + q\,, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2. Alla stregua della dimostraz. Jones-Matiyasevich del teorema DPR, si ricavi da γ un sistema di equaz. diofantee esponenziali definente il grafo $\mathcal{G}(b, a)$ di g .
3. Si riscriva tale sistema come una singola equazione esponenziale parametrica $G(\, b, a, y_1, \ldots, y_m \,) = 0$.
4. La specifica richiesta è

$$\neg \exists\, x\, \exists\, y_1 \cdots \exists\, y_m \quad G(\, 0, x, y_1, \ldots, y_m \,) = 0\,.$$

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Usando il teor. DPR possiamo far meglio? –II

1. Si scriva un programma a registri γ che computi la funzione

$$g(a) \quad =_{\text{Def}} \quad \begin{cases} 1 & \text{se vi sono primi } p,\ q \\ & \text{tali che } a + a + 4 = p + q\,, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2. Alla stregua della dimostraz. Jones-Matiyasevich del teorema DPR, si ricavi da γ un sistema di equaz. diofantee esponenziali definente il grafo $\mathcal{G}(b, a)$ di g .
3. Si riscriva tale sistema come una singola equazione esponenziale parametrica $G(\, b, a, y_1, \ldots, y_m \,) = 0$.
4. La specifica richiesta è

$$\neg \exists\, x\, \exists\, y_1 \cdots \exists\, y_m \quad G(\, 0, x, y_1, \ldots, y_m \,) = 0\,.$$

(E se sfruttassimo il teorema di Matiyasevich?)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Trovare una struttura interpretativa *significativamente* diversa dall'interpretazione privilegiata (quale?) in cui risultino tutti contemporaneamente veri i segg. enunciati:[1]

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{S}\,x & \neq & 0 \\
\mathrm{S}\,x = \mathrm{S}\,y & \rightarrow & x = y \\
y \neq 0 & \rightarrow & \exists\, x\; y = \mathrm{S}\,x \\
\underbrace{\mathrm{S}\,\mathrm{S}\cdots\mathrm{S}}_{n+1 \text{ volte}}\,x & \neq & x
\end{array}
$$

[1] Enunciati davvero? Omessi per brevità quantificatori universali all'inizio.

Soluz. dell'esercizio d'interpretazione

Possiamo, per $\ell = 1, 2, 3, 4, \ldots$, individuare una distinta struttura

$$\mathfrak{Z}_\ell \quad = \quad (\, \mathbb{Z} \setminus \{-\ell, -2 \cdot \ell, -3 \cdot \ell, \ldots\}, \quad , \qquad\qquad\qquad)\,,$$

ove

$$\mathbb{Z} \quad = \quad \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

(interi *con segno*).

Soluz. dell'esercizio d'interpretazione

Possiamo, per $\ell = 1, 2, 3, 4, \ldots$, individuare una distinta struttura

$$\mathfrak{Z}_\ell \;=\; (\,\mathbb{Z}\setminus\{-\ell, -2\cdot\ell, -3\cdot\ell, \ldots\},\; 0\,,\qquad\qquad\qquad\qquad)\,,$$

ove

$$\mathbb{Z} \;=\; \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

(interi *con segno*).

Soluz. dell'esercizio d'interpretazione

Possiamo, per $\ell = 1, 2, 3, 4, \ldots$, individuare una distinta struttura

$$\mathfrak{Z}_\ell \;=\; (\,\mathbb{Z}\setminus\{-\ell, -2\cdot\ell, -3\cdot\ell, \ldots\},\; 0\,,\; m \overset{\mathrm{S}^{\mathfrak{I}}}{\mapsto} m+\ell\,)\,,$$

ove

$$\mathbb{Z} \;=\; \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

(interi *con segno*).

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Soluz. dell'esercizio d'interpretazione

Possiamo, per $\ell = 1, 2, 3, 4, \ldots$, individuare una distinta struttura

$$\mathfrak{Z}_\ell \;=\; (\,\mathbb{Z}\setminus\{-\ell, -2\cdot\ell, -3\cdot\ell, \ldots\},\; 0\,,\; m \overset{\mathrm{S}^{\mathfrak{I}}}{\mapsto} m+\ell\,)\,,$$

ove

$$\mathbb{Z} \;=\; \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}$$

(interi *con segno*).

Il dominio risulta, cosí, ripartito in una catena isomorfa al dominio $\mathbb{N}$ dei naturali (con l'operazione di incremento unitario) e da $\ell - 1$ catene isomorfe al dominio degli interi (con la stessa operaz.).

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Soluz. dell'esercizio d'interpretazione

Possiamo, per $\ell = 1, 2, 3, 4, \ldots$, individuare una distinta struttura

$$\mathfrak{Z}_\ell \;=\; (\,\mathbb{Z}\setminus\{-\ell, -2\cdot\ell, -3\cdot\ell, \ldots\},\; 0\,,\; m \overset{\mathrm{S}^{\mathfrak{I}}}{\mapsto} m+\ell\,)\,,$$

ove

$$\mathbb{Z} \;=\; \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

(interi *con segno*).

Il dominio risulta, cosí, ripartito in una catena isomorfa al dominio $\mathbb{N}$ dei naturali (con l'operazione di incremento unitario) e da $\ell - 1$ catene isomorfe al dominio degli interi (con la stessa operaz.).

Ogni $\mathfrak{Z}_\ell$ modella gli assiomi della 'teoria del Successore'.

Soluz. dell'esercizio d'interpretazione

Possiamo, per $\ell = 1, 2, 3, 4, \ldots$, individuare una distinta struttura

$$\mathfrak{Z}_\ell \;=\; (\,\mathbb{Z}\setminus\{-\ell, -2\cdot\ell, -3\cdot\ell, \ldots\},\; 0\,,\; m \overset{\mathrm{S}^{\mathfrak{I}}}{\mapsto} m+\ell\,),$$

ove

$$\mathbb{Z} \;=\; \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

(interi *con segno*).

Il dominio risulta, cosí, ripartito in una catena isomorfa al dominio $\mathbb{N}$ dei naturali (con l'operazione di incremento unitario) e da $\ell - 1$ catene isomorfe al dominio degli interi (con la stessa operaz.).

Ogni $\mathfrak{Z}_\ell$ modella gli assiomi della 'teoria del Successore'.

Si potrebbe andare oltre, e considerare modelli con *infinite* catene isomorfe a $\mathbb{Z}$, e.g.

$$\mathfrak{R}_\ell \;=\; (\,\mathbb{R}\setminus\{-1, -2, -3, \ldots\},\; 0\,,\; r \overset{\mathrm{S}^{\mathfrak{I}}}{\mapsto} r+1\,),$$

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

ove $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali.

La teoria del successore vista sopra, come anche la sua variante che incorpora il relatore $<$ di confronto, assiomatizzabile così:

$$
\begin{array}{rcl}
y \neq 0 & \rightarrow & \exists\, x\; y = \mathrm{S}\, x \\
x < \mathrm{S}\, y & \leftrightarrow & x < y \vee x = y \\
 & \neg & x < 0 \\
x < y & \vee \quad x = y & \vee \quad y < x \\
x < y & \rightarrow & \neg\, y < x \\
x < y & \rightarrow \quad y < z & \rightarrow \quad x < z
\end{array}
$$

(da chiudersi universalmente !) sono ***complete*** nel senso che, in esse, ogni enunciato γ è ***dimostrabile*** o ***refutabile***:

$$\{\,\text{assiomi}\,\} \;\vdash\; \gamma \qquad \text{oppure} \qquad \{\,\text{assiomi}\,\} \;\vdash\; \neg\,\gamma\,.$$

(Vedi [Enderton(2001), pagg. 187–196])

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Tenuto conto dell'*enumerabilità effettiva* delle deduzioni da un insieme decidibile di premesse, otteniamo che dette teorie—in quanto complete—sono entrambe *decidibili* .

E. . .

Tenuto conto dell'*enumerabilità effettiva* delle deduzioni da un insieme decidibile di premesse, otteniamo che dette teorie—in quanto complete—sono entrambe *decidibili* .

E...

...che altro si ricava, dalla completezza della teoria, alla luce del teor. di correttezza ?

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Si può decidere—vedi [Cegielski and Richard(2001)]—la teoria della struttura

$$\left(\mathbb{N}\,,\ \mathsf{paio}_{/2}\,,\ \mathbb{4} \right)$$

ove

$$\mathsf{paio}: \quad \mathbb{N}^2 \ \longrightarrow \ \mathbb{N}$$

è la biiezione di Cantor

$$(\,x\,,\,y\,) \ \overset{paio}{\longmapsto} \ \frac{(x+y)\cdot(x+y+1)}{2} + x$$

e $\mathbb{4}$ è una qualsiasi delle seguenti relazioni o funzioni:

- moltiplicazione,
- divisibilità,
- addizione,
- ordine,
- successore.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Riferimenti bibliografici


Patrick Cegielski and Denis Richard.
Decidability of the theory of the natural integers with the Cantor pairing function and the successor.
Theoretical Computer Science, 257:51–77, 2001.


Martin Davis, Hilary Putnam, and Julia Robinson.
The decision problem for exponential Diophantine equations.
Annals of Mathematics, Second Series, 74(3):425–436, 1961.


Herbert B. Enderton.
A Mathematical Introduction to Logic.
Hartcourt/Academic Press, Burlington, MA, USA, 2nd edition, 2001.


James P. Jones, Daihachiro Sato, Hideo Wada, and Douglas Wiens.
Diophantine representation of the set of prime numbers.
Amer. Math. Monthly, 83(6):449–464, 1976.

Può un pol. come questo generare i primi ?

$$
\begin{aligned}
&\Big(K+2\Big)\cdot\Big(1\\
&\quad-(\bullet\cdot Z+H+J-Q)^2\\
&\quad-\Big((G\cdot K+2\cdot G+K+1)\cdot(H+J)+H-Z\Big)^2\\
&\quad-(2\cdot N+P+Q+Z-E)^2\\
&\quad-\Big(16\cdot(K+1)^3\cdot(K+2)\cdot(N+1)^2+1-\bullet^2\Big)^2\\
&\quad-\Big(E^3\cdot(E+2)\cdot(A+1)^2+1-\bullet^2\Big)^2\\
&\quad-\Big((A^2-1)\cdot Y^2+1-X^2\Big)^2\\
&\quad-\Big(16\cdot\bullet^2\cdot Y^4\cdot(A^2-1)+1-U^2\Big)^2
\end{aligned}
$$

Può un pol. come questo generare i primi ?

$$
\begin{aligned}
&-(N+L+\bullet-Y)^2\\
&-\Big(\big((A+U^2\cdot(U^2-A))^2-1\big)\cdot(N+4\cdot\bullet\cdot Y)^2+1-(X+\bullet\cdot U)^2\Big)^2\\
&-\Big((A^2-1)\cdot L^2+1-M^2\Big)^2\\
&-(A\cdot I+K+1-L-I)^2\\
&-\Big(Z+P\cdot L\cdot(A-P)\ +\ \bullet\cdot(2\cdot A\cdot P-P^2-1)-P\cdot M\Big)^2\\
&-\Big(Q+Y\cdot(A-P-1)+\bullet\cdot(2\cdot A\cdot P\ +\ 2\cdot A-P^2-2\cdot P-2)-X\Big)^2\\
&-\Big(P+L\cdot(A-N-1)+\bullet\cdot(2\cdot A\cdot N+2\cdot A-N^2-2\cdot N-2)-M\Big)^2\\
&\Big)
\end{aligned}
$$

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Può un pol. come questo generare i primi ?

$$
\begin{aligned}
&-(N+L+\bullet-Y)^2\\
&-\Big(\big((A+U^2\cdot(U^2-A))^2-1\big)\cdot(N+4\cdot\bullet\cdot Y)^2+1-(X+\bullet\cdot U)^2\Big)^2\\
&-\Big((A^2-1)\cdot L^2+1-M^2\Big)^2\\
&-(A\cdot I+K+1-L-I)^2\\
&-\Big(Z+P\cdot L\cdot(A-P)\ +\ \bullet\cdot(2\cdot A\cdot P-P^2-1)-P\cdot M\Big)^2\\
&-\Big(Q+Y\cdot(A-P-1)+\bullet\cdot(2\cdot A\cdot P\ +\ 2\cdot A-P^2-2\cdot P-2)-X\Big)^2\\
&-\Big(P+L\cdot(A-N-1)+\bullet\cdot(2\cdot A\cdot N+2\cdot A-N^2-2\cdot N-2)-M\Big)^2\\
)
\end{aligned}
$$

Idea: Se ne considerino i valori positivi !

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Si può far di meglio ?

"*Perhaps some industrious reader will construct a shorter prime representing polynomial.*"

[Jones et al.(1976)Jones, Sato, Wada, and Wiens, p. 455]

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE