CORPO RIGIDO

Due corpi:

$$L = T - V$$

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{\bar{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\bar{r}}_2^{\,2} \\ V &= V(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = V(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \end{aligned}\right\} \text{6 gradi di libertà}$$

$\updownarrow$

coord. lib. $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$

Nuove coord.

$$\begin{cases} \bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2 \\ \bar{R} = \dfrac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

coord. del centro di massa (c.m.)

$$M \equiv m_1 + m_2$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \bar{r}_1 = \bar{R} + \dfrac{m_2 \bar{r}}{M} \\ \bar{r}_2 = \bar{R} - \dfrac{m_1 \bar{r}}{M} \end{cases}$$

sostituiamo in L

$$T = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\bar{R}}^2 + \cancel{\frac{2 m_2}{M} \dot{\bar{R}} \cdot \dot{\bar{r}}} + \frac{m_2^2}{M^2} \dot{\bar{r}}^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\bar{R}}^2 - \cancel{\frac{2 m_1}{M} \dot{\bar{R}} \cdot \dot{\bar{r}}} + \frac{m_1^2}{M^2} \dot{\bar{r}}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\bar{R}}^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{M^2}}_{\frac{\cancel{(m_1+m_2)}\, m_1 m_2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}} \equiv \mu} \dot{\bar{r}}^2$$

MASSA RIDOTTA

$$V = V(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) = V(\bar{r})$$

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\bar{R}}^2}_{\text{particella libera con massa } M \text{ e posiz. c.m.}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu \dot{\bar{r}}^2 - V(\bar{r})}_{\text{rappresenta di un corpo di massa } \mu \text{ soggetto a un potenziale } V}$$

Per un sist. a N corpi : Teorema di König

$$\bar r_i = \bar R + \bar r_i' \qquad \Rightarrow \qquad T = T' + \frac{1}{2} M \dot{\bar R}^2$$

$$\bar R = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \bar r_i}{M} \qquad M = \sum_i m_i$$

posizioni relative al c.m.

$$T' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \|\dot{\bar r}_i'\|^2$$

en. cin. del c.m.

Dim. $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \|\dot{\bar r}_i\|^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \left(\|\dot{\bar R}\|^2 + \|\dot{\bar r}_i'\|^2 + 2\dot{\bar R}\cdot\dot{\bar r}_i'\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i\right)\dot{\bar R}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\bar r}_i'^2 + \underbrace{\dot{\bar R}\cdot\sum_i m_i \dot{\bar r}_i'}_{=0}$$

$\propto$ velocità del c.m. nel sist. d'rif. del c.m.

$\Rightarrow = 0$ //

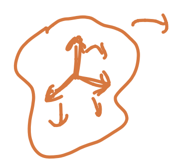
Moto rigido di N pti materiali

$$\|\bar r_i - \bar r_j\| = \text{cost. nel tempo} \quad \forall i,j$$

$\Rightarrow$ distanze di tutti i pti da un pto scelto (solidale) è cost. in t.

Prop. Dato un moto rigido. Ad ogni istante t $\exists!$ vettore $\bar\omega(t)$ t.c. $\forall \bar u$ vett. solidale si ha

$$\dot{\bar u} = \bar\omega \times \bar u$$



Dim. Prendiamo una terna o.n. $\{\bar e_i(t)\}_{i=1,2,3}$ solidale al corpo rigido.

Allora $\bar u(t) = \sum_{i=1}^{3} u_i \, \bar e_i(t) \Rightarrow \dot{\bar u}(t) = \sum_{i=1}^{3} u_i \, \dot{\bar e}_i(t)$

$\rightarrow$ basta dim. che $\exists \bar\omega$ t.c. $\dot{\bar e}_i = \bar\omega \times \bar e_i \quad i = 1,\dots,3$,

ovvero trovare una soluz. all'eq. $\dot{\bar e}_i = \bar\omega \times \bar e_i$ con incognita $\bar\omega$

- moltiplichiamo a des. e sin. per $\bar e_i \times$

$\downarrow$

$$\bar e_i \times \dot{\bar e}_i = \bar e_i \times (\bar\omega \times \bar e_i) = \bar\omega(\bar e_i \cdot \bar e_i) - \bar e_i(\bar\omega \cdot \bar e_i) =$$

$$\bar a \times (\bar b \times \bar c) = \bar a \times \left(\sum_{ijk} \epsilon_{ijk} b_j c_k \bar e_i \right) = \qquad -\epsilon_{imp}$$

$$= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \sum_{mnp} \epsilon_{mnp} a_m \underbrace{(\bar e_i)_n}_{\delta_{in}} \bar e_p b_j c_k = \sum_{ijkmp} \epsilon_{ijk} \widetilde{\epsilon_{mip}} a_m b_j c_k \bar e_p =$$

$$= -\sum_{jkmp} (\delta_{jm}\delta_{kp} - \delta_{jp}\delta_{km}) a_m b_j c_k e_p = -\sum_{jk} a_j b_j c_k \bar e_k + \sum_{jk} a_k b_j c_k \bar e_j$$

$$\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{imp} = (\delta_{jm}\delta_{kp} - \delta_{jp}\delta_{km})$$

$$= -(\bar a \cdot \bar b)\bar c + (\bar a \cdot \bar c)\bar b$$

$$\bar e_i \times \dot{\bar e}_i = \bar\omega - \omega_i \bar e_i$$

$$v = \sum_j v_j \bar e_j \qquad \bar v \cdot \bar e_i = \sum_j v_j \bar e_j \cdot \bar e_i = \sum_j v_j \delta_{ij} = v_i$$

$$\sum_{i=1}^{3} \bar e_i \times \dot{\bar e}_i = \sum_{i=1}^{3} (\bar\omega - \omega_i \bar e_i) = 3\bar\omega - \sum_i \omega_i \bar e_i = 3\bar\omega - \bar\omega = 2\bar\omega$$

$$\Rightarrow \bar\omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \bar e_i \times \dot{\bar e}_i$$

$$\Rightarrow \bar\omega \times \bar u = \dot{\bar u}$$ (dim. per es.) //

MOMENTO ANGOLARE del corpo rigido (rispetto origine O di terna solidale)

$$\bar M = \sum_{i=1}^{N} m_i \bar r_i \times \bar v_i$$

vett. solidal. — vel. $\bar v_i = \dot{\bar r}_i$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \bar r_i \times (\bar\omega \times \bar r_i)$$

← espressione LINEARE in $\bar\omega$ ⇓ si può scrivere come un op. lineare che agisce sul vett. ω

$$\equiv I \bar\omega$$

"vel. ANGOLARE" — "OPERATORE d'INERZIA"

ENERGIA CINETICA (Importante per scrivere la Lagrangiana del corpo rigido)

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \bar{v}_i \cdot \bar{v}_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i (\bar{\omega}\times\bar{r}_i)\cdot(\bar{\omega}\times\bar{r}_i)$$

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\bar{\omega}\cdot\left[\bar{r}_i\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_i)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot\sum_{i=1}^{N} m_i\,\bar{r}_i\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_i) = \frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot\mathcal{I}\,\bar{\omega}$$

OP. D'INERZIA:

- Simmetrico $:\ \bar{u}'\cdot\mathcal{I}\bar{u} = \bar{u}\cdot\mathcal{I}\bar{u}'$
- Def. positivo $:\ \bar{u}\cdot\mathcal{I}\bar{u} > 0 \quad \forall\bar{u}\neq 0$, se il corpo è costituito da almeno 3 pti non allineati.
- $\mathcal{I}$ può essere rappresentato da una MATRICE, una volta scelta una base

$$\mathcal{I}\,\bar{e}_j = \sum_i \underbrace{(\bar{e}_i\cdot\mathcal{I}\bar{e}_j)}_{\mathcal{I}_{ij}}\,\bar{e}_i$$

MATRICE

$$\mathcal{I}\bar{u} = \sum_k u_k\,\mathcal{I}\bar{e}_k = \sum_{kj} u_k\,\mathcal{I}_{jk}\,\bar{e}_j$$

$$= \sum_j \underbrace{\Big(\sum_k \mathcal{I}_{jk}u_k\Big)}_{\text{com. del vett. } \mathcal{I}\bar{u}}\bar{e}_j$$

$$\mathcal{I}_{11} = (\mathcal{I}\bar{e}_1)\cdot\bar{e}_1 = \bar{e}_1\cdot\sum_i m_i\,\bar{r}_i\times(\bar{e}_1\times\bar{r}_i) =$$

$$= \bar{e}_1\cdot\sum_i m_i\left[\bar{e}_1\,\bar{r}_i^2 - \bar{r}_i(\bar{r}_i\cdot\bar{e}_1)\right] =$$

$$= \sum_i m_i\left(\bar{r}_i^2 - (\bar{e}_1\cdot\bar{r}_i)^2\right) = \sum_i m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2 - x_i^2)$$

$$= \sum_i m_i(y_i^2+z_i^2) = \sum_i m_i\, d^2_{\text{asse}\,x} = I_x$$ momento d'inerzia risp asse x

$I_{22} = I_y \qquad I_{33} = I_z$

$$I_{12} = \dots = \bar{e}_1 \cdot \sum_i m_i \left[\cancel{\bar{e}_2 \cdot \bar{r}_i^2} - \bar{r}_i (\bar{r}_i \cdot \bar{e}_2) \right] = -\sum_i m_i x_i y_i$$

"prodotti d'inerzia"

I è SIMMETRICO $\Rightarrow$ DIAGONALIZZABILE, cioè si può scegliere una base (solidale) t.c. I_{ij} è diagonale

(⇝ assi $\bar{e}_i$ vengono detti assi principali d'inerzia

⇝ I_{ii} vengono detti momenti principali d'inerzia)

Se $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ è una terna principale d'inerzia, cioè $\bar{e}_i$ sono autovetti di I con autovalori I_i $(= I_{ii})$, allora

$$\bar{M} = I\bar{\omega} = I \sum_{k=1}^{3} \omega_k \bar{e}_k = \sum_{k=1}^{3} \omega_k I_k \bar{e}_k$$

$$T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot I \bar{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} I_k \omega_k^2$$

Teorema di Hygens-Steiner: dato asse a_B passante per c.m. e un asse a parallelo a a_B e da esso distante d, allora

$$I_a = I_{a_B} + Md^2$$

Dim. prendiamo $a \,//\, a_B \,//$ asse z

$$I_{a_B} = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$I_a = \sum_i m_i \left((x_i - d)^2 + y_i^2 \right) = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) + \sum_i m_i d^2 - 2d \underbrace{\sum_i m_i x_i}_{=0}$$

//

Analogamente: $\mathcal{I}_O$ e $\mathcal{I}_B$ op. d'inerzia relativi a un polo generico O e cm. B, allora

$$\mathcal{I}_O = \mathcal{I}_B + \mathcal{I}_O^B$$

dove $\mathcal{I}_O^B$ t.c. $\mathcal{I}_O^B \bar{u} = m\, \bar{r}_{OB} \times (\bar{u} \times \bar{r}_{OB}) \quad \forall \bar{u} \in \mathbb{R}^3$.

Asse di rotazione fisso:

scegliamo $\bar{e}_3 \parallel$ asse fisso $\Rightarrow \dot{\bar{e}}_3 = 0$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \bar{e}_j \times \dot{\bar{e}}_j = \frac{1}{2} \left(\bar{e}_1 \times \dot{\bar{e}}_1 + \bar{e}_2 \times \dot{\bar{e}}_2 \right)$$

La config. del corpo rigido è determinata dalla conoscenza dei vett. solidali $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ $\quad \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \qquad \dot{\bar{e}}_1 = \dot{\theta} \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \dot{\theta}\, \bar{e}_2$$

$$\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \dot{\bar{e}}_2 = \dot{\theta} \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = -\dot{\theta}\, \bar{e}_1$$

La config. può cambiare nel tempo, e il moto è descritto dalla funzione $\theta(t)$ (1 grado di lib.)

$$\to \bar{\omega} = \frac{1}{2} \Big(\bar{e}_1 \times \underbrace{\dot{\theta} \bar{e}_2}_{\dot{\bar{e}}_1} + \bar{e}_2 \times \underbrace{(-\dot{\theta} \bar{e}_1)}_{\dot{\bar{e}}_2} \Big) = \frac{\dot{\theta}}{2} \left(\bar{e}_1 \times \bar{e}_2 + \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 \right)$$

$$\bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \bar{e}_3$$

$$\overset{!}{=} \dot{\theta}\, \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \dot{\theta}\, \bar{e}_3$$

$\dot{\theta}$: velocità dell'angolo di rotazione

$\bar{e}_3$: asse di rotazione $\quad \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \mathcal{I} \bar{\omega} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \bar{e}_3 \cdot \mathcal{I} \bar{e}_3 = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \mathcal{I}_{33} = \frac{1}{2} I_z \dot{\theta}^2$$

I_z: mom. d'in. risp. asse di rotaz.

Rotaz. attorno a un ASSE passante per il c.m.

Si va a sist. di rif. del c.m.

$$T = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + T'$$

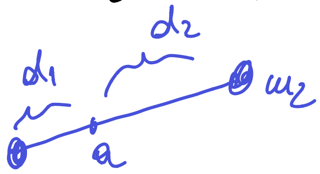
$\nwarrow$ in tale sist. di rif. l'asse di rotaz. è fisso $\Rightarrow$ si applica quanto detto sopra.

$\swarrow$

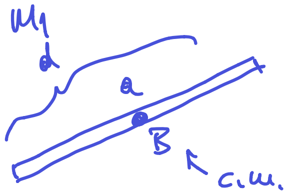
3 + 1 gradi di libertà

Trottola non rientra nei casi precedenti

Esempi di momento d'inerzia.

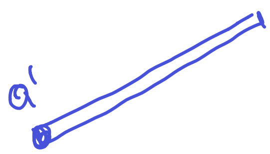
1) 

$$I_a = \sum_{i=1}^{2} m_i d_i^2 = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2$$

2) 

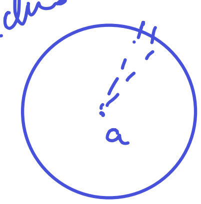
asta omogenea di lungh. d e dens. lin. ρ
$\rightarrow M = \rho \cdot d$

$$I_a = \int_{-d/2}^{d/2} s^2 \rho \, ds = \frac{s^3}{3}\Big|_{-d/2}^{d/2} \cdot \rho = 2\rho \frac{d^3}{24} = \frac{Md^2}{12}$$

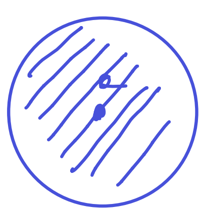
3) 

$$I_{a'} = \int_0^d s^2 \rho \, ds = \frac{d^3}{3}\rho = \frac{Md^2}{3}$$

$$= I_a + M\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{Md^2}{12} + \frac{Md^2}{4} = \frac{Md^2}{3}$$

4) anello 

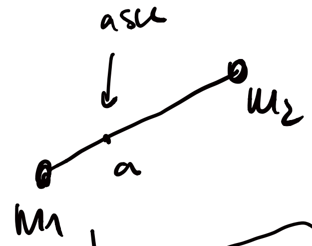
$$I_a = \int_0^{2\pi} R^2 \rho R \, d\theta = R^3 \rho \, 2\pi = R^2 (2\pi R \cdot \rho) = MR^2$$

5) disco 

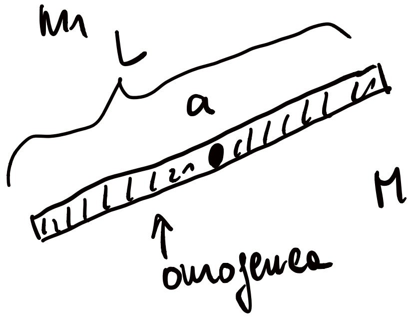
ρ dens. sup.

$$I_a = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \rho \, r \, dr \, d\theta = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= \rho \frac{R^4}{4} 2\pi = (\pi R^2 \rho) \frac{R^2}{2} = \frac{MR^2}{2}$$



$$I_a = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2$$



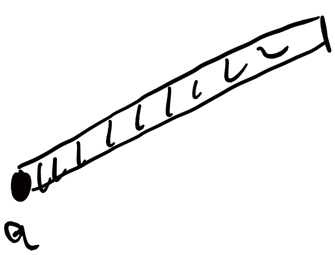
$$M = \int_0^L \rho \, ds$$

ρ: densità lin. di massa (cost.)

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} s^2 \rho \, ds = \left.\frac{s^3}{3}\right|_{-L/2}^{L/2} \rho =$$

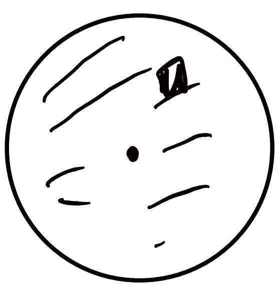
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8}\right)\rho = \frac{1}{12} L^2 (\rho L)$$

$$= \frac{1}{12} L^2 M$$



$$I = \int_0^L s^2 \rho \, ds = \left.\frac{s^3}{3}\right|_0^L \rho = \frac{L^3}{3}\rho = \frac{1}{3} M L^2$$

$$= \underbrace{I_{c.m.}}_{\frac{1}{12} L^2 M} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = L^2 M \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) = \frac{L^2 M}{3}$$



omogeneo

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \rho \, r \, dr \, d\theta = \rho \, 2\pi \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R =$$

ρ: dens M/sup.

$$= 2 \frac{R^2}{4} \cdot \underbrace{(\rho \pi R^2)}_{M} = \frac{1}{2} M R^2$$

MOTO CENTRALE

Dati due corpi con potenziale $V = V(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$, allora

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\bar{R}}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \mu \dot{\bar{r}}^2 - V(\bar{r})}$$ ⇝ problema disaccoppiato

Ci restringiamo al caso di potenziale centrale

$$V(\bar{r}) = V(\|\bar{r}\|^2)$$

$$L(\bar{r}, \dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2} \mu \dot{\bar{r}}^2 - V(\bar{r}^2)$$

$\uparrow$

è una Lag. INVARIANTE per ROTAZIONI:

presa rotaz. O (matrice ortogonale) $\qquad \varphi(\bar{r}) = O\bar{r}$

$$\|O \cdot \bar{r}\|^2 = \bar{r}^T O^T O \bar{r} = \bar{r}^T \bar{r} = \|\bar{r}\|^2$$

$$\|O \dot{\bar{r}}\|^2 \qquad \dot{\bar{r}} \qquad \dot{\bar{r}} \qquad = \|\dot{\bar{r}}\|^2$$

$$\Rightarrow L(O\bar{r}, O\dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2} \mu \|O\dot{\bar{r}}\|^2 - V(\|O\bar{r}\|^2) = L(\bar{r}, \dot{\bar{r}})$$

$\xRightarrow{\text{teorema di Nöther}}$ $\bar{M}$ (mom. ang.) è una cost. del moto

(cioè abbiamo 3 cost. del moto scalari)

$$L(\bar{r}, \dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2} \mu \dot{\bar{r}}^2 - V(\|\bar{r}\|)$$

Se $\bar{M}$ è cost. del moto, vuol dire che quando è valutata in $\bar{r}(t), \dot{\bar{r}}(t)$ che soddisfano le eq. di Lag., è cost. nel tempo.

$$\bar{M} = \bar{r} \times m\dot{\bar{r}} \qquad (\star)$$

Se $\overline{M} \neq 0$, (A) ci dice che $\overline{r}$ e $\dot{\overline{r}}$ sono $\perp \overline{M}$

Siccome $\overline{M}$ è fisso durante il moto, vuol dire che $\overline{r}(t)$ e $\dot{\overline{r}}(t)$ stanno sempre nel PIANO ORTOGONALE a $\overline{M}$ cioè il MOTO avviene su un PIANO.

(Se $\overline{M} = 0$, (A) $\Rightarrow$ $\overline{r} \parallel \dot{\overline{r}}$ cioè moto rettilineo)

$\rightsquigarrow$ possiamo assumere che il moto avvenga su un PIANO, e che quindi $\overline{r} = x\overline{e_1} + y\overline{e_2}$ $\quad \dot{\overline{r}} = \dot{x}\overline{e_1} + \dot{y}\overline{e_2}$

$\Rightarrow$ problema è ridotto a 2 GRADI DI LIBERTA'

$\overline{M} \parallel$ asse z

$$L(\overline{r}, \dot{\overline{r}}) = \frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(\sqrt{x^2+y^2})$$

- per scrivere L a 2 gradi di lib. abbiamo usato 2 delle 3 costanti del moto: abbiamo infatti usato solo la direzione di $\overline{M}$ (2 cost. del moto)

  Rimane il MODULO di $\overline{M}$ (ovvero la componente di M lungo asse z)

  $\downarrow$

  ci aspettiamo di ritrovare questa cost. del moto in L.