SISTEMI DINAMICI

20 Aprile 2021

Sistemi dinamici lineari

$$\dot{x} = f(x) \longrightarrow \dot{x} = Ax$$

problema algebrico

$$A \rightsquigarrow T^{-1}AT \rightsquigarrow \text{risolvere}$$

$\rightsquigarrow$ tornare indietro

$$\underbrace{T^{-1}AT}_{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_m & & & \\ & & & D_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D_l \end{pmatrix}$$

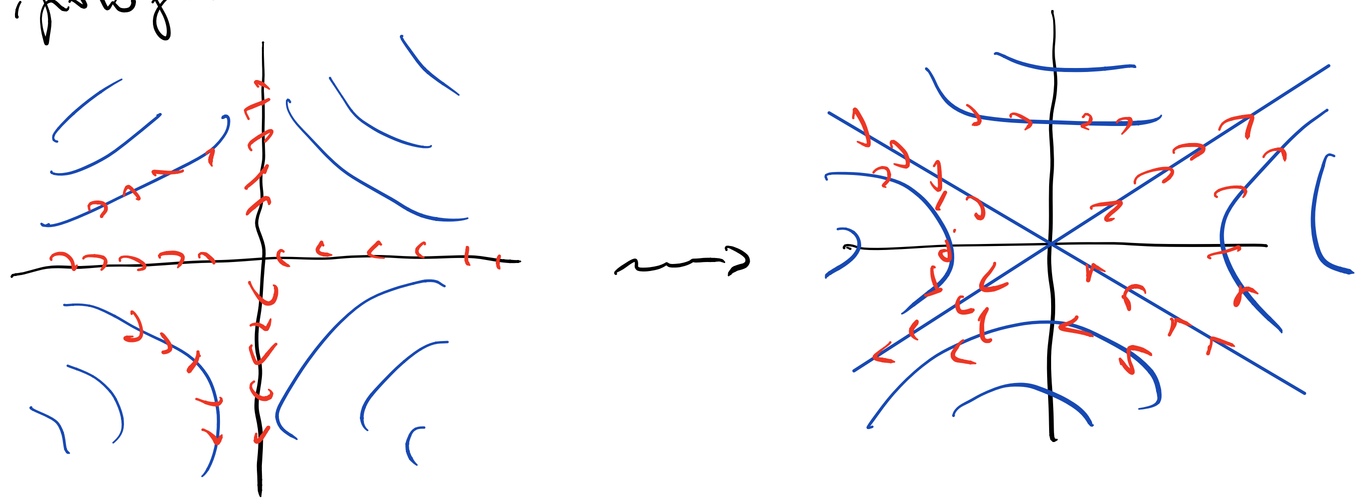
$$D_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$$

Analisi qualitativa : sistemi planari

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11} x + a_{12} y \\ \dot{y} = a_{21} x + a_{22} y \end{cases} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

↳ casistica determinata dalla tipologia di autovalori



$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

<u>Esempio</u>

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} X \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix}$

$$= (1-\lambda)\left[(3-\lambda)(-2-\lambda) + 4\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[-6+2\lambda-3\lambda+\lambda^2+4\right]$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

Autovalori $\lambda = 2$, $\lambda = 1$, $\lambda = -1$

Autovettori

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$\lambda = 2$ $\qquad$ $\lambda = 1$ $\qquad$ $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

I autovettori non sono normalizzati,

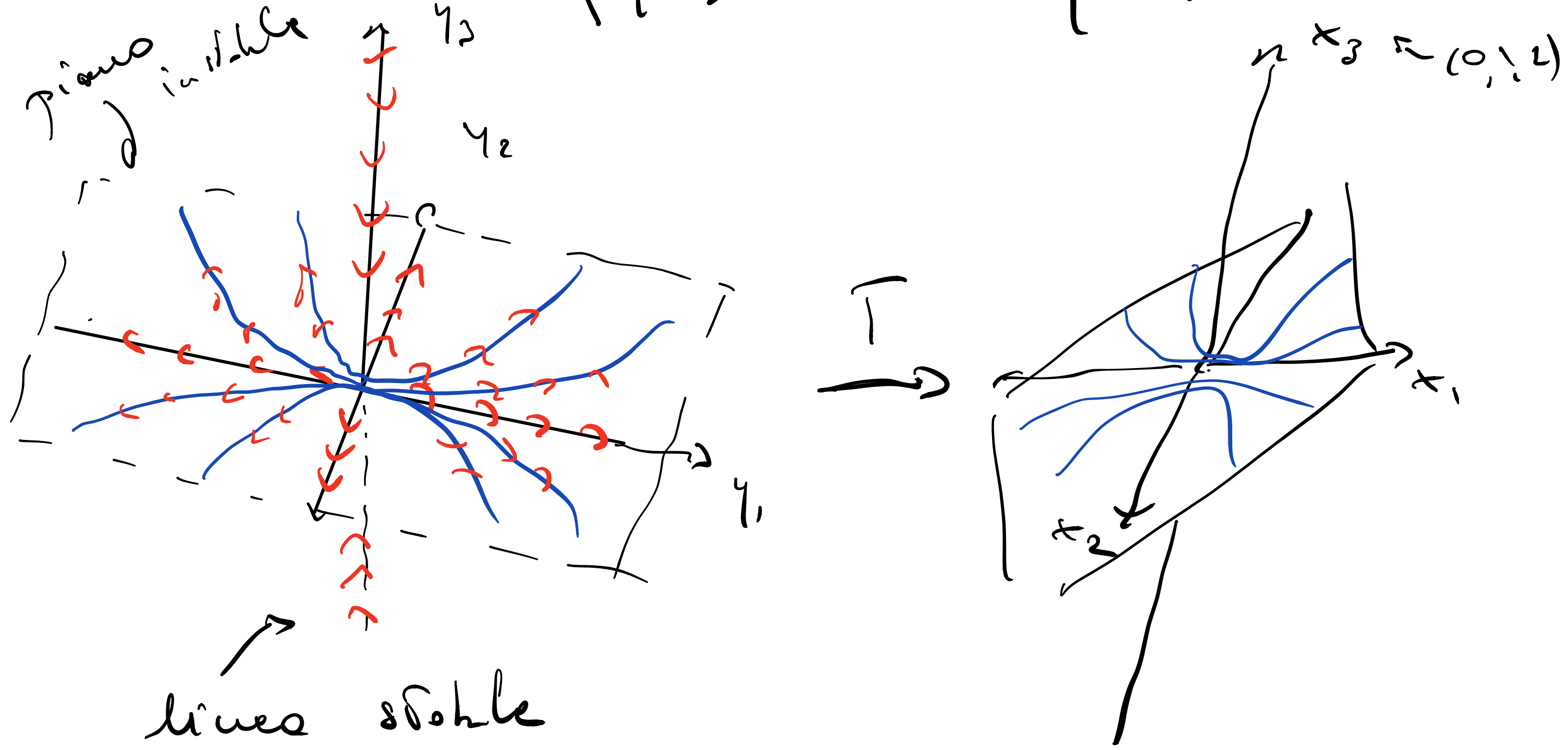
$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ converte

$$\dot{X} = AX \quad \text{in} \quad \dot{y} = (T^{-1}AT)\, y$$

$$\dot{\underline{Y}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \underline{Y}$$

$$\underline{X}(t) = T\,\underline{Y}(t) =$$

$$= c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Oscillatori armonici disaccoppiati

Consideriamo
$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega_1^2 x_1 \\ \ddot{x}_2 = -\omega_2^2 x_2 \end{cases}$$

riduciamo questo sistema ad un sistema del primo ordine

$$y_i = \dot{x}_i \qquad i = 1,2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_j = y_j \\ \dot{y}_j = -\omega_j^2 x_j \end{cases} \qquad j = 1,2$$

Cosi: $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ -\omega_1^2 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & -\omega_2^2 & 0 \end{array}\right)$

$$\underline{\tilde{X}} = (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

Si trova: autovalori $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$

$$i\omega_1 \to v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$i\omega_2 \to v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i\omega_2 \end{pmatrix}$$

$w_1 = \mathrm{Re}\, v_1 \qquad w_2 = \mathrm{im}\, v_1$

$w_3 = \mathrm{Re}\, v_2 \qquad w_4 = \mathrm{im}\, v_2$

Prendiamo T tale che $T e_j = w_j$

(colonne sono autovettori)

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & & \\ -\omega_1 & 0 & & \\ & & 0 & \omega_2 \\ & & -\omega_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\alpha \pm i\beta$$

$$\Psi(\tau) = \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ y_1(\tau) \\ x_2(\tau) \\ y_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cos \omega_1 \tau + b_1 \sin \omega_1 \tau \\ -a_1 \sin \omega_1 \tau + b_1 \cos \omega_1 \tau \\ a_2 \cos \omega_2 \tau + b_2 \sin \omega_2 \tau \\ -a_1 \sin \omega_2 \tau + b_2 \cos \omega_2 \tau \end{pmatrix}$$

$\big(x_i(\tau), y_i(\tau)\big)$ $i = 1, 2$ è periodica di periodo $\frac{2\pi}{\omega_i}$. Questo non vuol dire che la soluzione completa sia periodica: questo avviene se $\exists\, m, n$ interi con

$$\omega_1 \tau = m\, 2\pi, \qquad \omega_2 \tau = n\, 2\pi$$

la soluzione è periodica se

$$\tau = 2\pi \frac{m}{\omega_1} = 2\pi \frac{n}{\omega_2}$$

deve essere $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n}{m}$. Il rapporto

Fra le due frequenze deve essere un numero razionale.

In forma canonica:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \omega_i y_i \\ \dot{y}_i = -\omega_i x_i \end{cases} \qquad i=1,2$$

Conviene: riscriviamo il sistema in coordinate polari $(x_i, y_i) \to (r_i, \theta_i)$

$$x_i = r_i \cos\theta_i \qquad i=1,2$$
$$y_i = r_i \sin\theta_i$$

$$x_i^2 + y_i^2 = r_i^2 \;. \leftarrow \text{ deriviamo questa relazione}$$

$$2 r_i \dot{r}_i = 2 x_i \dot{x}_i + 2 y_i \dot{y}_i$$
$$= 2 x_i \omega_i y_i + 2 y_i (-\omega_i x_i) = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\dot{r}_i = 0} \qquad i=1,2$$

$$\frac{y_i}{x_i} = \frac{r_i \sin\theta_i}{r_i \cos\theta_i} = \tan\theta_i \qquad i=1,2$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta_i}\,\dot{\theta}_i = \frac{\dot{y}_i x_i - y_i \dot{x}_i}{x_i^2}$$

$$= \boxed{\frac{-\omega_i r_i^2}{r_i^2 \cos^2\theta_i}}$$

$$\dot{\theta}_i = -\omega_i \qquad i = 1, 2$$

Abbiamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{r}_i = 0 \\ \dot{\theta}_i = -\omega_i \end{cases} \qquad i = 1, 2$$

Seconda parte

Siamo arrivati a

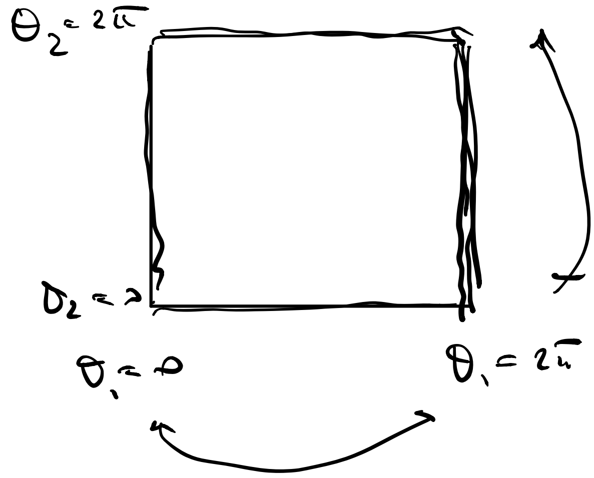
$$\begin{cases} \dot{r}_i = 0 \\ \dot{\theta}_i = -\omega_i \end{cases}$$

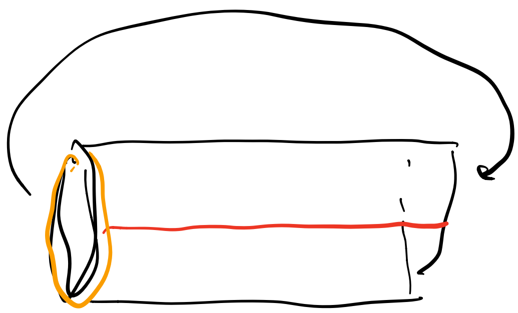
Quindi r_1 e r_2 sono costanti lungo tutte le soluzioni. Posiamo $r_1 = r_2 = 1$

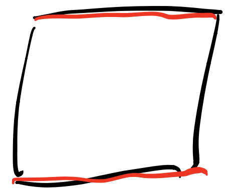
le due variabili θ_1 e θ_2 sono periodiche, perché siamo in coordinate poloni.

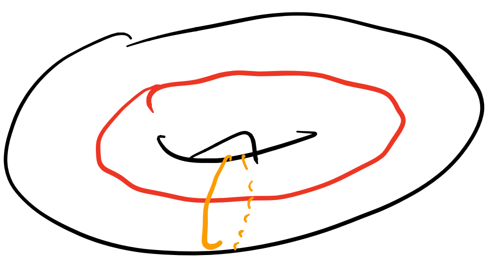
$\rightarrow$ questo luogo di punti descrive un Toro in $\mathbb{R}^4$

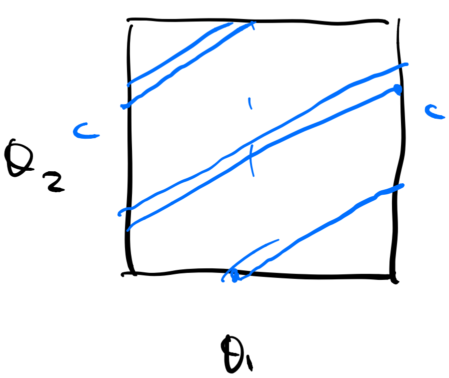
$$\begin{cases} \dot\theta_1 = -\omega_1 \\ \dot\theta_2 = -\omega_2 \end{cases}$$











il campo vettoriale ha pendenza

$$\frac{\dot\theta_2}{\dot\theta_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

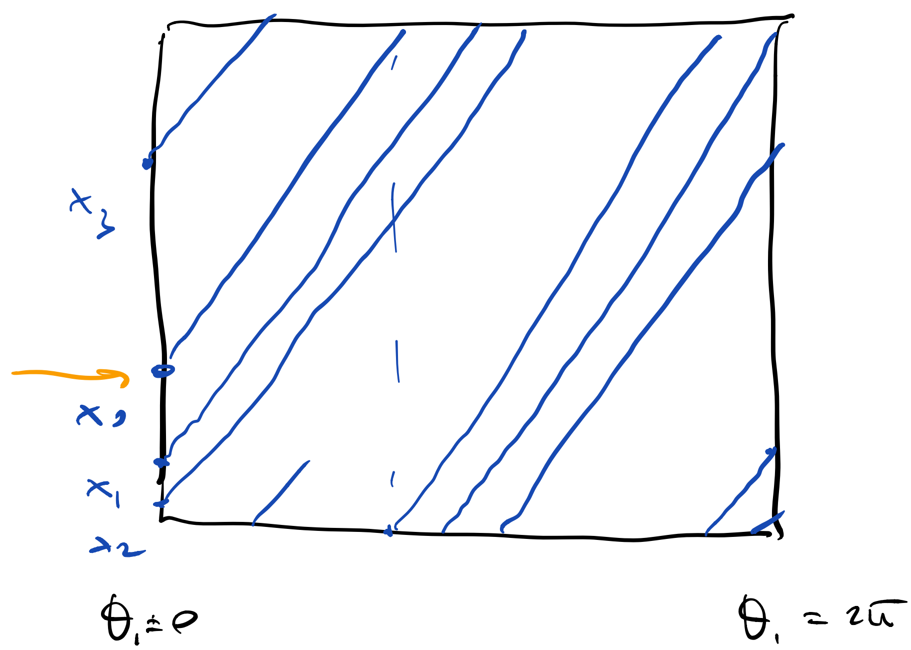
$$\frac{\dot y}{\dot x} = \ldots$$

Questo significa che quando una soluzione raggiunge $\theta_1 = 2\pi$ per un certo

valore $\theta_2 = c$, riappare a $\theta_1 = 0$
con lo stesso valore $\theta_2 = c$ e
con lo stesso pendenza

Se $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ è un numero razionale $\frac{n}{m}$,
la soluzione parte da $(\theta_1(0), \theta_2(0))$
e attraversa gli estremi del quadrato
n volte verticalmente e m volte
orizzontalmente, prima di tornare al
punto di partenza.

Nel caso in cui $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ è irrazionale



Questo definisce una "mappa di Poincaré"

Associo a x_0 la coordinata (su θ_2) della traiettoria quando ritorna a $\theta_1 = 0$

$x_0 \longrightarrow x_1$ "primo ritorno"

Supponiamo che il primo ritorno avvenga al punto $\theta_2(\tau)$ dove τ è il tempo per cui $\theta_1(\tau) = 2\pi$

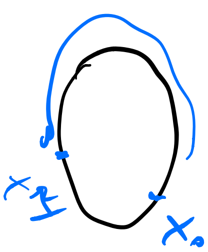
Siccome $\theta_1(\tau) = \underbrace{\theta_1(0)}_{=\,0} + \omega_1 \tau$

$$\theta_1(\tau) \underset{\text{def di } \tau}{=} 2\pi = \omega_1 \tau \longrightarrow \tau = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

Allora per $\theta_2(\tau) = \underbrace{x_0}_{\theta_2(0)} + \omega_2 \left(\frac{2\pi}{\omega_1} \right)$

cioè la mappa di Poincaré è

$$f(x_0) = x_0 + 2\pi \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \mod 2\pi$$



θ_2

ruoto x_0 di un angolo $2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}$

Lo abbiamo associato un sistema dinamico discreto ad un

Sistema dinamico continuo

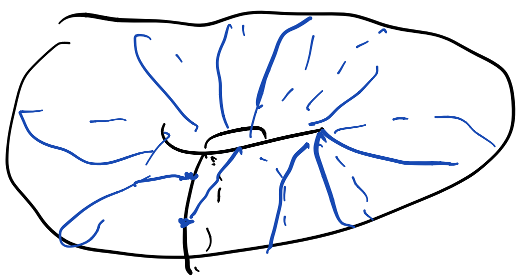
x_0, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(f(x_0))$ ...

$x_n = f(x_{n-1})$

Si può dim [Hirsch, Smale, Devaney]

che l'orbita di x_0 è densa nel

cerchio (per $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ irrazionale)



Esponenziale di una matrice

$$A \rightsquigarrow e^A$$

Consideriamo un operatore lineare

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad$ ($T : E \to E$)

Se $x \in E$, sappiamo $|x|$ la norma

Def Definiamo la norma per T

$$\|T\| = \sup_{|x|=1} |T(x)|$$ "norma uniforme"

Un operatore è <u>limitato</u> se $\|T\| < \infty$

Rappresentiamo T (che è lineare) con una matrice A.

Allora $|T(x)|^2 = x^T A^T A x = x^T S x \geq 0$

$(\ )\|\| = \|\|$

$S = A^T A$ è simmetrica $\rightarrow$ diagonalizzabile con una trasformazione ortogonale ($O^{-1} = O^T$). $S = O^T \Lambda O$

Siccome S è definita positiva

$$\Lambda = \mathrm{diag}(r_1^2, r_2^2, \dots, r_n^2)$$

(r_i la radice quadrata non negativa)

Gli elementi r_i sono detti "valori singolari" di T.

Se poniamo $x = O^T y$

$$|T(x)|^2 = (O^T y)^T S (O^T y) =$$

$$= y^T \underbrace{O O^T}_{\mathbb{1}} \Lambda \underbrace{O O^T}_{\mathbb{1}} y = y^T \Lambda y$$

$$= \sum_{i=1}^{n} r_i^2 y_i^2$$

Inoltre siccome O è ortogonale

$$|x| = |y|$$

Pertanto

$$|T(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} r_i^2 y_i^2} \qquad \text{con } |y| = 1$$

Allora il max si ottiene quando

$y = e_k$ dove r_k è il valore

$\llcorner$ base di $\mathbb{R}^n$ $\{e_i\}$

singolare più grande

$$\Rightarrow \|T\| = \max_{i=1,\dots,n} r_i$$

$\Rightarrow$ ogni matrice corrisponde ad ad un operatore <u>limitato</u>

L'esponenziale di un operatore è definito formalmente da

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$$

<u>Teorema</u> La serie $\sum_n \frac{T^n}{n!}$ è assolutamente convergente per ogni operatore limitato T.

<u>Dim</u> Se T è limitato, allora anche T^n è limitato

Supponiamo $\| T \| = \alpha > 0$, allora

$$\left\| \frac{T^k}{k!} \right\| \leq \frac{\alpha^k}{k!}$$

. Quindi la serie reale $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!}$ converge a e^α

$\Rightarrow$ allora anche $\sum T^k$ converge assolutamente

■

$e^A \rightarrow$ proprietà