$$dU = (u_E + u_B) A\, dz = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) A c\, dt$$

QUAL E' L'ENERGIA CHE FLUISCE PER UNITA' DI AREA E UNITA' DI TEMPO? $\Rightarrow |\vec{S}|$

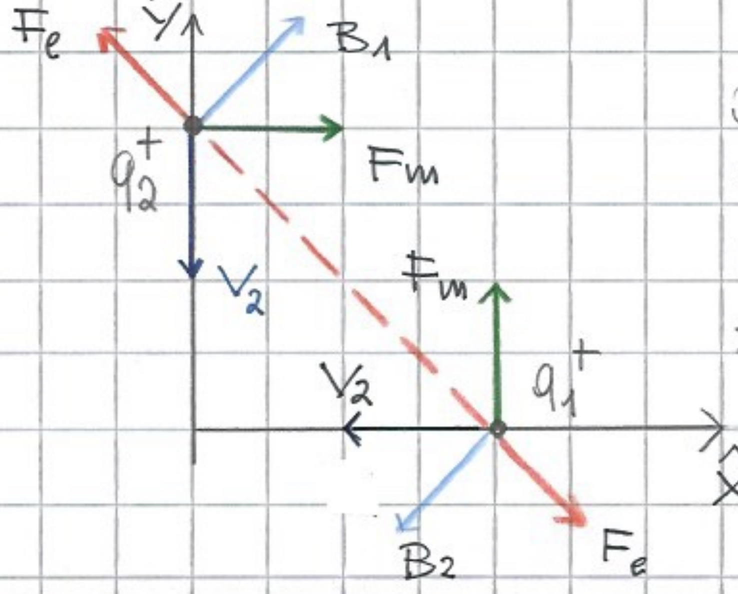
$$|\vec{S}| = \frac{1}{A}\frac{dU}{dt} = \frac{c}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) = \frac{c}{2}\left(\varepsilon_0 c E B + \frac{EB}{c\mu_0}\right) =$$

$$= \frac{EB}{2\mu_0}\left(\underbrace{\varepsilon_0 \mu_0 c^2}_{=1} + 1\right) = \frac{EB}{\mu_0}$$

LEZIONE #7

- EQ. DI CONTINUITA' (CONSERVAZIONE) DEL MOMENTO LINEARE

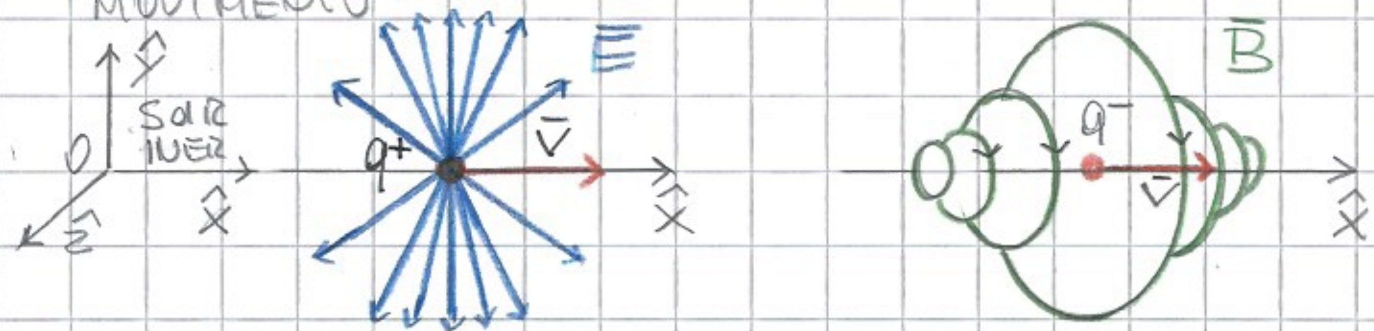
AL FINE DI RENDERE ESPLICITO IL PROBLEMA CHE SI INCONTRA NEL CALCOLO DEL MOMENTO (LINEARE E ANGOLARE) E DELLA SUA CONSERVAZIONE IN UNA CONFIGURAZIONE DI CARICHE E CORRENTI CHE EVOLVONO TEMPORALMENTE FACCIAMO IL SEGUENTE ESEMPIO



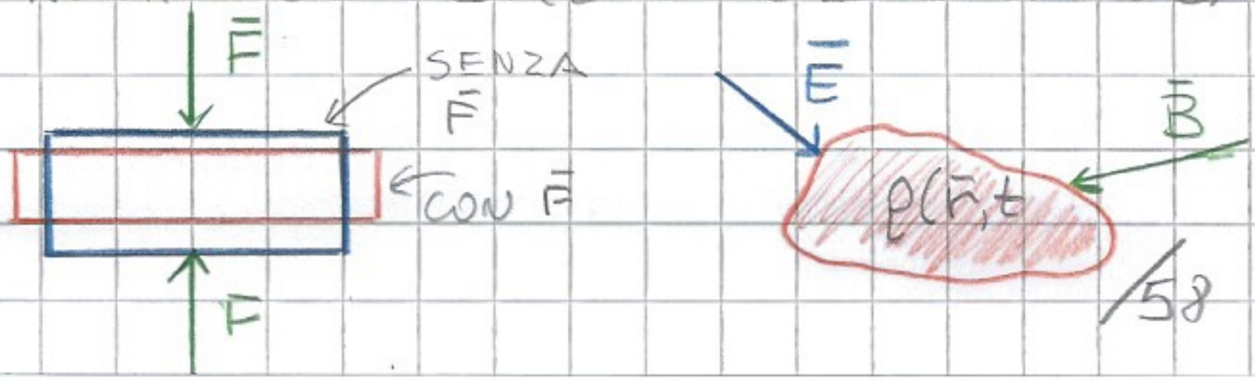
QUESTO SISTEMA SEMBRA VIOLARE LA 3 LEGGE DELLA DINAMICA $\Rightarrow$ $\sum_i$ DELLE FORZE INTERNE $\neq 0$ $\Rightarrow$

IL MOMENTO LINEARE NON SI CONSERVA!

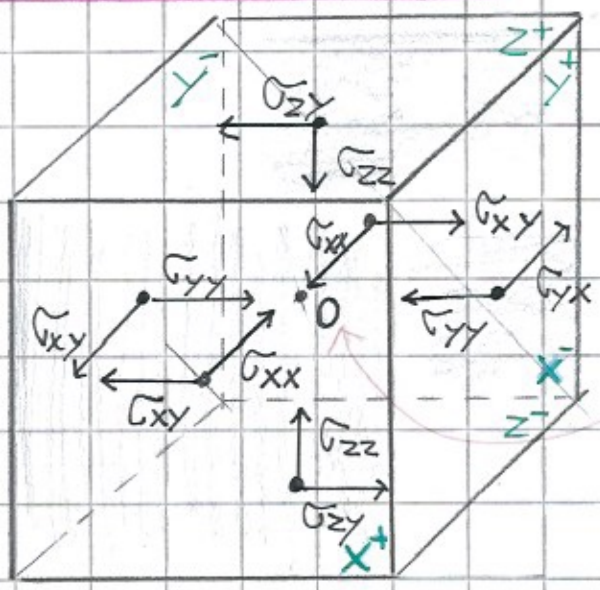
LA RISPOSTA STA NEL FATTO CHE NON STIAMO CONSIDERANDO IL MOMENTO ASSOCIATO AL CAMPO E.M. TUTTAVIA PRIMA DI AFFROTARE QUESTO PROBLEMA VOGLIO FARE UN'OSSERVAZIONE RELATIVA AI CAMPI DI UNA CARICA IN MOVIMENTO



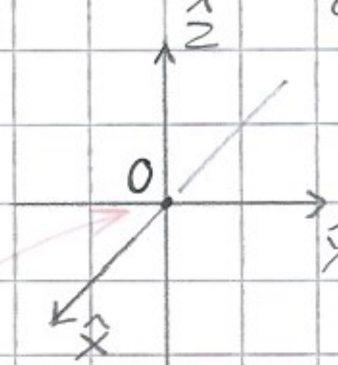
NELLA FIGURA SOPRA SONO SCHEMATIZZATI I CAMPI $\bar{E}$ E $\bar{B}$ PER UNA CARICA q^+ E q^- RISPETTIVAMENTE IN MOTO RETTILINEO UNIFORME RISPETTO A UN SISTEMA DI RIF. INERZIALE.
TUTTAVIA, PER AFFRONTARE QUESTO PROBLEMA DOBBIAMO PRIMA DOTARCI DI ALCUNE NOZIONI DI TEORIA DEI MEZZI ELASTICI E DELLA RAPPRESENTAZIONE DEL TENSORE DI STRESS CHE È UTILE PER DESCRIVERE LE DEFORMAZIONI DI UN MEZZO ELASTICO QUANDO DELLE FORZE ESTERNE AGISCONO SUL MEZZO. L'ANALOGIA CONSISTE NEL FATTO CHE UNA FORZA CHE AGISCE SU UN MEZZO EASTICO LO DEFORMA ANCHE NELLA DIREZIONE $\perp$ ALLA FORZA



TENSORE DI STRESS



S.d.R AL CENTRO DEL CUBO



σ_{ij} i = FACCIA DEL CUBO SU CUI AGISCE LO STRESS

PER ES. SE i = X SI CONSIDERANO LE FACCIE $\perp$ A X

j = INDICA LA DIREZIONE DELLO STRESS

σ_{xy} STRESS SULLA FACCIA X^+ CHE AGISCE NELLA DIREZIONE $-\hat{y}$ (O VICEVERSA)

σ_{xx} FACCIA X^+ STRESS $-\hat{x}$ (O VICEVERSA)

IN GENERALE σ_{ij} CON $i=j \Rightarrow$ FORZA $\perp$ AREA $\Downarrow$ $F/A \Rightarrow$ PRESSIONE

σ_{ij} CON $i \neq j$ = FORZA // AREA => F/A => SCORRIMENTO

A QUESTO PUNTO POSSIAMO COSTRUIRE UNA MATRICE 3X3 CON σ_{ij}

RIGA ↗ i j ↖ COLONNA

$$\begin{matrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{matrix}$$

→ STRES (STRAIN) DI SCORRIMENTO

→ STRESS (STRAIN) DI COMPRESSIONE (PRESSIONE) (TENSIONE)

$$\begin{matrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{matrix}$$

FORZA SULLA FACCIA x

FORZA NELLA DIREZIONE $\hat{x}$.

- ORA CALCOLIAMO LA FORZA E.M. TOTALE SULLE CARICHE IN UN VOLUME τ. LA FORZA CHE AGISCE E' QUELLA DI LORENTZ SE LE CARICHE SI TROVANO SOTTO L'AZIONE DI UN CAMPO E.M. AVEVAMO GIÀ VISTO IN PRECEDENZA CHE L'AZIONE DI $\bar{E}$ CAMBIA L'ENERGIA CINETICA, MENTRE $\bar{B}$ AGISCE SULLA TRAIETTORIA. QUI POSSIAMO FARE UN'ALTRA OSSERVAZIONE, L'AZIONE DI $\bar{E}$ SULLA CARICA $q\bar{E}$ E' UNA COMPONENTE DI $\bar{F} /\!/ \bar{E}$, MENTRE L'AZIONE DI $\bar{B}$ E' UNA COMPONENTE $\perp$ DI $\bar{F}$. QUESTO GENERA UN EFFETTO ANALOGO A QUELLO DI UNA FORZA ESTERNA SU UN MEZZO ELASTICO, i.e. ESSA GENERA UN EFFETTO $/\!/ \bar{F}$ (σ_{ij} CON $i=j$) E UNO $\perp$ (σ_{ij} CON $i \neq j$) CHE SONO APPUNTO GLI EFFETTI DI PRESSIONE E DI STRESS.

ORA CALCOLIAMO LA FORZA E.M. TOTALE SULLA CARICA NEL VOLUME τ

$$\bar{F} = \int_{\tau} \rho [E + (\bar{v} \times B)] d\tau = \int_{\tau} [\underbrace{\rho \bar{E} + (\bar{J} \times \bar{B})}_{\text{FORZA PER UNITÀ DI VOL.}}] d\tau$$

$$\bar{f} = \rho \bar{E} + (\bar{J} \times \bar{B})$$

COME ABBIAMO OSSERVATO IN PRECEDENZA QUESTA EQ. CONTIENE CAMPI CARICHE E CORR., LA RISCRIVIAMO IN TERMINI DI SOLI CAMPI

$$\bar{f} = \underbrace{\varepsilon_0 (\bar{\nabla} \cdot \bar{E})}_{\rho} \bar{E} + \Big[\frac{1}{\mu_0} \underbrace{(\bar{\nabla} \times \bar{B}) - \varepsilon_0 \partial_t \bar{E}}_{\text{IV EQ. M.}} \Big] \times \bar{B}$$

ORA $\partial_t (\bar{E} \times \bar{B}) = (\partial_t \bar{E} \times \bar{B}) + (\bar{E} \times \partial_t \bar{B}) \Rightarrow$ MA

$\partial_t \bar{B} = -\bar{\nabla} \times \bar{E} \Rightarrow \partial_t \bar{E} \times \bar{B} = \partial_t (\bar{E} \times \bar{B}) + \bar{E} \times (\bar{\nabla} \times \bar{E})$

$$\Rightarrow \bar{f} = \varepsilon_0 [(\bar{\nabla} \cdot E)\bar{E} - \bar{E} \times (\bar{\nabla} \times \bar{E})] - \frac{1}{\mu_0} [\bar{B} \times (\bar{\nabla} \times \bar{B})] - \varepsilon_0 \partial_t (E \times \bar{B})$$

POSSIAMO AGGIUNGERE UN TERMINE $(\bar{\nabla} \cdot \bar{B}) \bar{B}$ DATO CHE È $= \emptyset$. INOLTRE OSSERVIAMO CHE $\bar{E} \times (\bar{E} \times \bar{E}) = \frac{1}{2} \underbrace{\bar{\nabla} (E^2)}_{\text{GRAD.}} - (\bar{E} \cdot \bar{\nabla}) \bar{E}$

E LO STESSO POSSIAMO FARE PER $\bar{B} \times (\bar{\nabla} \times \bar{B})$

SOSTITUENDO $\bar{f} = \varepsilon_0 [(\bar{\nabla} \cdot \bar{E}) \bar{E} + (\bar{E} \cdot \bar{\nabla}) \bar{E}] +$

$$+ \frac{1}{\mu_0} [(\bar{\nabla} \cdot \bar{B}) \bar{B} + (\bar{B} \cdot \bar{\nabla}) \bar{B}] - \frac{1}{2} \bar{\nabla} (\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) - \varepsilon_0 \partial_t (\bar{E} \times \bar{B})$$

POSSO RICONOSCERE DUE TERMINI IN $\bar{E}$ E $\bar{B}$ FORMALMENTE SIMILI. UN TERMINE CHE CONTIENE IL $\bar{\nabla}$ (GRAD.) DELLA DENSITÀ DI ENERGIA E UN TERMINE CHE POSSO RICONDURRE A

$\varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \bar{S} \rightarrow \left(\frac{\mu_0}{\mu_0} \varepsilon_0 \partial_t (\bar{E} \times \bar{B}) = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \frac{1}{\mu_0} (\bar{E} \times \bar{B}) \right).$

SUL PIANO FORMALE f È MOLTO COMPLICATA MA SVILUPPANDOLA COMPLETAMENTE POSSIAMO RICONOSCERE DEI TERMINI COMUNI CHE INDICHEREMO IN BASE AGLI INDICI $i\,j$

$$T_{ij} = \varepsilon_0\left(E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right)$$

GLI INDICI i E j (COME ABBIAMO VISTO PER IL TENSORE STRESS ELASTICO, SI RIFERISCONO ALLE COORDINATE x, y, z $\Rightarrow$ IN TOTALE 9 TERMINI (3^2) $(T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}, T_{xy}, T_{xz}, \dots$ CON δ_{ij} = DELTA DI KRONECKER ($\delta_{ij} = 1$ PER $i = j$ E $\delta_{ij} = \emptyset$ PER $i \neq j$) $\Rightarrow$

$$T_{xx} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2\right) + \frac{1}{2\mu_0}\left(B_x^2 - B_y^2 - B_z^2\right)$$

$$T_{xy} = \varepsilon_0\left(E_x E_y\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_x B_y\right).$$

PROBLEMA: SCRIVERE GLI ALTRI 7 TERMINI.

A QUESTO PUNTO NOTIAMO CHE POSSIAMO COSTRUIRE UNA MATRICE 3X3 SIMILE A QUELLA DEL TENSORE DI STRESS ELASTICO:

$$\begin{matrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{matrix}$$

CON TERMINI DIAGONALI E TERMINI FUORI DIAG. CHIAMEREMO QUESTA MAT. TENSORE STRESS DI MAXW.

A VOLTE QUESTO TIPO DI TENSORE È SCRITTO COME $\overleftrightarrow{T}$. NATURALMENTE È POSSIBILE SVILUPPARE SIA L'ALGEBRA CHE IL CALCOLO DIFF. PER I TENSORI, COSÌ COME È STATO FATTO PER GLI SCALARI E PER I VETTORI. QUI RICORDIAMO SOLO DUE PROPRIETÀ

$$\underbrace{\left(\bar{a} \cdot \overleftrightarrow{T}\right)_j}_{\text{VETTORE CON 1 INDICE}} = \sum_{i=x,y,z} a_i T_{ij}$$

PROBLEMA: SI RICAVINO LE 3 COMP. DEL VETTORE.

- $$\left(\bar{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{T}\right)_j = \varepsilon_0\left[(\underbrace{\bar{\nabla}\cdot\bar{E}}_{\text{VETT.}})\underbrace{E_j}_{\text{COMP.}} + (\bar{E}\cdot\bar{\nabla})E_j - \frac{1}{2}\underbrace{\nabla_j}_{\text{COMP }\bar{\nabla}} E^2\right] +$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\left[(\bar{\nabla}\cdot\bar{B})B_j + (\bar{B}\cdot\bar{\nabla})B_j - \frac{1}{2}\nabla_j B^2\right]$$

$\Rightarrow \bar{f} = \overleftrightarrow{\nabla}\,\bar{T} - \varepsilon_0\mu_0\,\partial_t\bar{S}$. IN MODO ANALOGO A QUANTO FATTO PER IL TENSORE STRESS POSSIAMO FARE PER $\overleftrightarrow{T}$

$$\begin{vmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{vmatrix}$$

$\rightarrow$ TERMINI FUORI DIAG. FORZE DI SCORRIMENTO (STRES-STRAIN)

TERMINI DIAG. COMP. $\Rightarrow$ FORZE DI PRESSIONE

RICORDIAMO ANCHE CHE SE $T_{ij} = T_{ji}$ CON $i \neq j$ IL TENSORE È SIMMETTRICO. $\Rightarrow$ LE PROPRIETÀ DEL TENSORE RIFLETTONO LE PROPRIETÀ (ALCUNE) FISICHE DEL SISTEMA RAPPRESENTATO. PER ESEMPIO LA RIFLESSIONE DI UN RAGGIO CHE INCIDE $\perp$ SU UNA SUPER. (PER ESEMPIO UNO SPECCHIO) È DESCRIVIBILE COME UNA FORZA E.M. CHE ESERCITA UNA PRESSIONE SU UNA SUP. E QUINDI DAI TERMINI DIAGONALI DI $\overleftrightarrow{T}$.

- FORZA TOTALE E RELAZIONE DI CONTINUITÀ

LA FORZA TOTALE $\bar{F} = \int_\tau \bar{f}\,d\tau = \underbrace{\int_\tau \bar{\nabla}\cdot\overleftrightarrow{T}\,d\tau}_{\text{TEOR. }\bar{\nabla}} - \int_\tau \varepsilon_0\mu_0\,\partial_t\bar{S}\,d\tau$

$\Rightarrow \bar{F} = \oint_\Sigma \overleftrightarrow{T}\cdot d\bar{a} - \varepsilon_0\mu_0\int_\tau \dot{\bar{S}}\,d\tau$ CHE NEL CASO STATICO

DIVENTA $\bar{F} = \oint_{\Sigma'} \overleftrightarrow{T} \circ d\bar{a} \Rightarrow \overleftrightarrow{T}$ E' UNA FORZA PER UNITÀ DI AREA $\frac{d\bar{F}}{da} = \overleftrightarrow{T}$. PIÙ PRECISAMENTE T_{ij} E' LA FORZA PER UNITÀ DI AREA NELLA DIREZ. i CHE AGISCE SULL'ELEMENTO DI SUP j. SI NOTI CHE NELLA NOTAZIONE ADOTTATA DA D. GRIFFITHS i E j HANNO SIGNIFICATO OPPOSTO, MA QUESTA E' SOLO UNA QUESTIONE FORMALE E NON SOSTANZIALE.

- DALLA SECONDA LEGGE DELLA MECC. QUINDI DALLA REL. PREC. $\Rightarrow \bar{F} = \frac{d\bar{P}_{MEC}}{dt} = -\varepsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt}\int_{\tau} \bar{S}\, d\tau + \oint_{\Sigma'} \overleftrightarrow{T} \circ d\bar{a}$

DOVE $\bar{P}_{MEC}$ E' IL MOMENTO MECC. TOTALE $\Rightarrow d\bar{P}_{MEC} = d\int_{\tau} \bar{p}_M d\tau$

$$\Rightarrow \frac{d\int_{\tau} \bar{p}_{MEC} d\tau}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{\tau} \varepsilon_0\mu_0 \bar{S}\, d\tau + \int_{\Sigma'(\tau)} \overleftrightarrow{T} \circ d\bar{a}$$

$\varepsilon_0\mu_0\bar{S} \to$ DENSITÀ DEL MOMENTO E.M. $\bar{p}_{EM}$

APP. IL TEOR. $\bar{\nabla}\circ$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\tau} \bar{p}_{MEC} d\tau\right) = -\frac{d}{dt}\int \bar{p}_{EM} d\tau + \int_{\Sigma'(\tau)} \overleftrightarrow{T} \circ d\bar{a} \Rightarrow$$

$$\boxed{\partial_t (\bar{p}_{MEC} + \bar{p}_{EM}) = \bar{\nabla} \circ \overleftrightarrow{T}}$$ $\to$ RELAZIONE DI CONTINUITÀ (CONS. DEI MOMENTI)

$\bar{p}_M$ E $\bar{p}_{EM}$ SINGOLARMENTE NON SI CONS. $\to$ MA LA LORO Σ SI!

QUESTA E' LA RISPOSTA AL NOSTRO PROBLEMA INIZIALE! IN LETTERATURA, A VOLTE, $\bar{p}_{EM} = \bar{g}_{EM} = \mu_0\varepsilon_0 \bar{S} = \varepsilon_0 (\bar{E} \times \bar{B})$. SE $\frac{d}{dt}\bar{p}_M = 0$

$\Rightarrow$ SIAMO NELLO SPAZIO LIBERO $\Rightarrow$ NON CI SONO

MASSE CARICHE $\Rightarrow \partial_t \bar{g}_{EM} = \bar{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T}$ QUINDI LE 3 EQ. DI CONTINUITÀ PER LO SPAZIO LIBERO SONO $\bar{\nabla} \cdot \bar{J} = -\partial_t \rho$; $\bar{\nabla} \cdot \bar{S} = -\partial_t u_{EM}$; $\bar{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T} = \partial_t \bar{g}_{EM}$

- OSSERVAZIONE RIMANE DA CHIARIRE IL FATTO CHE LA RELAZIONE DI CONS. DELLA ENERGIA SI ESPRIME CON UN FORMALISMO VETTORIALE, MENTRE QUELLA DEL MOMENTO UTILIZZA UN FORMALISMO TENSORIALE. LA SPIEGAZIONE NASCE DAL FATTO CHE NEL PRIMO CASO SI PARTE CALCOLANDO IL LAVORO DELLA FORZA DI LORENTZ SU UNA CARICA $\bar{F} \cdot d\bar{\ell}$ E IL CAMPO $\bar{B}$ NON FA VARIARE L'ENER. CINETICA DELL CARICA (RICORDATE CHE NON ESISTE CARICA SENZA MASSA) MA ENTRA SOLO NELLA RELAZIONE COMPLESSIVA DEL COMPUTO COME ENERGIA INTRINSECA $\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) = u_M$. NEL SECONDO CASO CALCOLIAMO $\partial_t \bar{F} = \bar{p}$. QUESTA ∂_t È $\neq \emptyset$ SE VARIA VARIA IL $|\bar{v}|$ O SE $\bar{v}$ VARIA DIREZIONE O SE VARIANO ENTRAMBE DATO CHE $\bar{p} = m\bar{v}$ $\bar{E} \rightarrow$ VARIA IL MODULO, $\bar{B}$ AGISCE SULLA DIREZIONE TRAMITE $(\bar{v} \times \bar{B})$. DA QUI NASCE IL FATTO CHE UN CAMPO E.M. POSSIEDE UN MOMENTO ANGOLARE INTRINSECO. IL SOLO CAMPO $\bar{E}$ NON AGISCE SULLA TRAIETTORIA. LA PRESENZA DI UN PRODOTTO VETTORIALE $(\bar{v} \times \bar{B})$ NELLA RELAZIONE DELLA FORZA FA SI CHE LA FORZA DI LORENTZ ABBIA DUE AZIONI $\perp \bar{v} \times \bar{B}$, $\bar{E} // \bar{v}$ QESTE COME NEL CASO DELLA DEFORMAZIONE ELASTICA SONO MEGLIO RAPPRE..

TE DA UN FORMALISMO TENSORIALE.

- SI NOTI ANCHE CHE $\bar{S}'$ (COME APPARE NELLE LEGGI DI CONSERVAZIONE) E' UNA DENSITÀ DI POTENZA $(F.L/L^2T)$ MENTRE $\mu_0\varepsilon_0\bar{S}'$ E' UNA DENSITÀ DI MOMENTO $\left(\mu_0\varepsilon_0 = \frac{T^2}{L^2}\right) \Rightarrow$ $\mu_0\varepsilon_0 S' = \frac{T^2}{L^2}\cdot\frac{F.L}{L^2T} = \frac{FT}{L^3}$. ALLO STESSO MODO NOTIAMO CHE $\overleftrightarrow{T}$ HA UN DOPPIO RUOLO. $\overleftrightarrow{T}$ E' LO STRESS E.M. (F/L^2) FORZA/SUP MENTRE $-\overleftrightarrow{T}$ E' LA DENSITÀ DEL FLUSSO DEL MOMENTO

- <u>OSSERVAZIONE</u>. PARTIAMO DALLA LEGGE DI CONS. DEL MOMENTO $\frac{d\bar{P}_{MEC}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\tau}\varepsilon_0\mu_0\bar{S}\,d\tau + \oint_{\Sigma(\tau)}\overleftrightarrow{T}\cdot d\bar{a}$

SE $\bar{P}_{MEC}\uparrow \Rightarrow \bar{g}_{EM}\downarrow$ OPPURE I CAMPI STANNO PORTANDO DEL MOMENTO ATTRAVERSO LA SUPERFICIE CHE RACCHIUDE τ. LA DENSITÀ DI $\bar{g}_{EM} = \varepsilon_0\mu_0\bar{S} = \varepsilon(\bar{E}\times\bar{B})$ MENTRE IL FLUSSO DEL MOMENTO DEI CAMPI E' $-\overleftrightarrow{T}$.
IN ALTRI TERMINI $-\overleftrightarrow{T}\cdot d\bar{a}$ E' IL MOMENTO E.M. PER UNITÀ DI TEMPO CHE ATTRAVERSA L'AREA da

E' IL CAMPO $\bar{E}, \bar{B}$ CHE TRASFERISCE MOM.
ALLA CONFIGURA DI CARICHE E CORRENTI