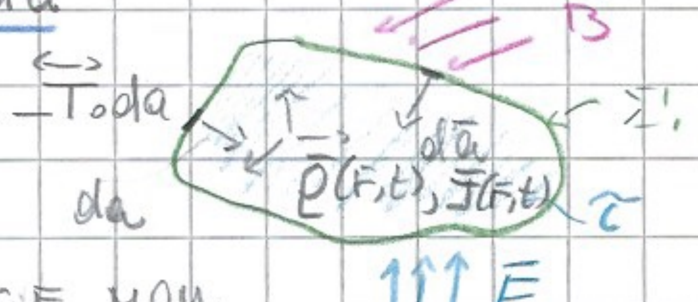
TE DA UN FORMALISMO TENSORIALE.

- SI NOTI ANCHE CHE $\bar{S}'$ (COME APPARE NELLE LEGGI DI CONSERVAZIONE) E' UNA DENSITÀ DI POTENZA $(F \cdot L / L^2 T)$ MENTRE $\mu_0 \varepsilon_0 \bar{S}'$ E' UNA DENSITÀ DI MOMENTO $\left(\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{T^2}{L^2}\right) \Rightarrow$
$\mu_0 \varepsilon_0 S' = \frac{T^2}{L^2} \cdot \frac{F \cdot L}{L^2 T} = \frac{FT}{L^3}$. ALLO STESSO MODO NOTIAMO CHE $\overleftrightarrow{T}$ HA UN DOPPIO RUOLO. $\overleftrightarrow{T}$ E' LO STRESS E.M. (F/L^2) FORZA/SUP MENTRE $-\overleftrightarrow{T}$ E' LA DENSITÀ DEL FLUSSO DEL MOMENTO

- OSSERVAZIONE. PARTIAMO DALLA LEGGE DI CONS. DEL MOMENTO $\frac{d\bar{P}_{MEC}}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{\tau} \varepsilon_0 \mu_0 \bar{S} d\tau + \oint_{\Sigma(\tau)} \overleftrightarrow{T} \circ d\bar{a}$

SE $\bar{P}_{MEC} \uparrow \Rightarrow \bar{g}_{EM} \downarrow$ OPPURE I CAMPI STANNO PORTANDO DEL MOMENTO ATTRAVERSO LA SUPERFICIE CHE RACCHIUDE τ. LA DENSITÀ DI $\bar{g}_{EM} = \varepsilon_0 \mu_0 \bar{S} = \varepsilon_0 (\bar{E} \times \bar{B})$ MENTRE IL FLUSSO DEL MOMENTO DEI CAMPI E' $-\overleftrightarrow{T}$.
IN ALTRI TERMINI $-\overleftrightarrow{T} \circ d\bar{a}$ E' IL MOMENTO E.M. PER UNITÀ DI TEMPO CHE ATTRAVERSA L'AREA da



E' IL CAMPO $\bar{E}, \bar{B}$ CHE TRASFERISCE MOM. ALLA CONFIGURA DI CARICHE E CORRENTI.
SI NOTI ANCHE CHE $\overleftrightarrow{T}$ E' UN TENSORE SIMMETRICO $\Rightarrow$ $\boxed{T_{ij} = T_{ji}}$

LEZIONE #8

ESPRIMENDO LA DENSITÀ DEL MOMENTO E.M. $\bar{g}$ LA LEGGE DI CONSERVAZIONE DEL MOMENTO TOTALE $\bar{P}_{TOT} = \bar{P}_{MEC} + \bar{P}_{EM}$ E RICORDANDO CHE $(\hat{n} \circ \overleftrightarrow{T})_j = \hat{n} T_{ij}$ (VEDI PRODOTTO SCALARE TRA VETTORE E TENSORE $\overleftrightarrow{T}$) POSSIAMO SCRIVERE LA LEGGE DI CONSERVAZIONE DEL MOMENTO COME

$$\frac{d P_{TOT}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{P}_{MEC} + \bar{P}_{EM}) = \int_{\Sigma(e)} \hat{n} \circ \overleftrightarrow{T} da$$

OSSERVAZIONE SI NOTI ANCHE CHE T HA LA DIMENSIONE DI UN (MOMENTO/VOL.) × VEL. (ABBIAMO VISTO CHE $\overleftrightarrow{T}$ È UNA FORZA / AREA

$$\Rightarrow \text{MASSA} \cdot \frac{L}{T^2} \cdot \frac{1}{L^2} = \underbrace{\left(\text{MASSA} \cdot \frac{L}{T}\right)}_{\text{MOM. LINEARE}} \cdot \frac{1}{T L^2} =$$

$$P \cdot \frac{1}{T L^2} \cdot \frac{L}{L} \Rightarrow \frac{P}{VOL} \cdot VEL. \Rightarrow$$ IL TENSORE

($L^2 \cdot L = L^3$)

STRESS È UN MOMENTO DELLA DENSITÀ DI CORRENTE. COSÌ T_{ij} È LA RAPIDITÀ (RATE) AL QUALE LA i-ESIMA COMPONENTE DEL MOMENTO CHE FLUISCE ATTRAVERSO UN ELEMENTO DI AREA $\hat{n}_j da$. NON COSÌ OVVIO CHE T_{ij} È ANCHE IL "RATE" AL QUALE LA j-ESIMA COMPONENTE DEL MOMENTO FLUISCE ATTRAVERSO L'ELEMENTO D'AREA $\hat{n}_i da$. QUESTA È LA DIRETTA CONSEGUENZA CHE $T_{ij} = T_{ji}$, OVVERO CHE IL TENSORE È SIMMETRICO.

- **PROBLEMA.** OSSERVANDO LA FIGURA DEL CUBO CHE SCHEMATIZZA IL TENSORE STRESS DA COSA SI DEDUCE CHE IL $\overleftrightarrow{T}$ E' SIMMETRICO (PER PARITÀ). SUGG. SI CONSIDERI CHE L'OPERAZIONE DI PARITÀ E' EQUIVALENTE ALLA RIFLESSIONE.
- **OSSERVAZIONE.** ORA ABBIAMO GLI STRUMENTI PER FARE UN'OSSERVAZIONE IMPORTANTE. CONSIDERIAMO LE RELAZIONI DI CONSER. DI ENERGIA E MOMENTO NELLA LORO FORMA INTEGRALE. $\frac{d}{dt}\left(U_{MEC}+U_{EM}\right) = -\oint_{\Sigma'} \vec{S}\cdot\hat{n}\,da$

E $\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_{MEC}+\vec{P}_{EM}\right) = \oint_{\Sigma'} \hat{n}\cdot\overleftrightarrow{T}\,da$

AFFINCHE' L'ENERGIA E IL MOMENTO TOTALI SI CONSERVINO $\Rightarrow$ $\left(U_{MEC}+U_{EM}\right) = COST$ E $\left(\vec{P}_{MEC}+\vec{P}_{EM}\right) = COST$ $\Rightarrow$ LE LORO $\frac{d}{dt} = \emptyset$
$\Rightarrow -\oint_{\Sigma'} \vec{S}\cdot\hat{n}\,da = \emptyset$ E $\int_{\Sigma'} \hat{n}\cdot\overleftrightarrow{T}\,da = \emptyset$.

QUESTE RELAZIONI DEVONO ESSE VERE PER $\Sigma' \to \infty$. PER CAPIRE A FONDO QUESTO ARGOMENTO DOBBIAMO FARE UN'ANALISI DIMENSIONALE DEI DUE INTEGLALI DI FLUSSO $\oint_{\Sigma'\to\infty} \vec{S}\cdot\hat{n}\,da$ E $\oint_{\Sigma'\to\infty} \hat{n}\cdot\overleftrightarrow{T}\,da$. DA QUESTA NOTIAMO CHE da HA LE DIMENSIONI DI L^2 MENTRE $\vec{S}$ DIMENSIONALMENTE E' $\propto \vec{E}\times\vec{B}$ MENTRE $T_{ij} = \varepsilon_0\left[E_i E_j - \frac{1}{\delta_{ij}} E^2\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[B_{ij} - \delta_{ij} B^2\right]$

SE IL PRODOTTO $|\bar{E}||\bar{B}|$ E $\propto$ A $\frac{1}{r^n}$ CON $n > 2 \Rightarrow \frac{1}{L^n}$ CON $n>2$ ALLORA GLI INTEG. $\int_{\Sigma'_1 \to \infty} \frac{1}{L^n} \cdot L^2$ CON $n>2$ PER $r \to \infty$ ($\Rightarrow |\bar{E}||\bar{B}| \to$ 0 PIÙ RAPIDAMENTE DI da) $\Rightarrow \emptyset$ MA SE $n \leq 2$ ALLORA GLI INTEGRALI DI FLUSSO ANCHE PER $r \to \infty \Rightarrow \Sigma'_1 \to \infty$ AVRANNO UN VALORE FINITO $\Rightarrow \frac{d}{dt}(U_{MEC} + U_{EM})$ E $\frac{d}{dt}(\bar{P}_{MEC} + \bar{P}_{EM}) \neq \emptyset$ E PARTE DELLA ENERGIA E DEL MOMENTO SONO DISSIPATI. NEL CASO DI CAMPI STATICI O QUASI STATICI (IN QUESTO CASO A PARTE FENOMENI DISSIPATIVI O DI ORDINE SUPERIORE) $E \propto \frac{1}{r^2}$ E $B \propto \frac{1}{r^2}$

$\Rightarrow |\bar{E}||\bar{B}| \propto \frac{1}{r^4} \Rightarrow \oint_{\Sigma'_1 \to \infty} \bar{S}' \cdot \hat{n} \, da \to \emptyset$ E

$\oint_{\Sigma'_1 \to \infty} \hat{n} \cdot \bar{T} \, da \to \emptyset$ MENTRE PER CAMPI $\bar{E}$ E $\bar{B}$ GENERATI DA CARICHE ACC. (VEDREMO CON GRANDE DETTAGLIO QUESTO PIÙ AVANTI) CI SONO COMPONENTI DEI CAMPI $\bar{E}$ E $\bar{B}$ (DETTE DI ACCELERAZIONE) CHE SONO $\propto \frac{1}{r} \Rightarrow \bar{S} \propto \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{L^2}\right)$ E $\overleftrightarrow{T} \propto \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{L^2}\right)$

PER $r \to \infty \Rightarrow \oint_{\Sigma'_1 \to \infty} \bar{S}' \cdot \hat{n} \, da \neq 0$ E $\oint_{\Sigma'_1} \hat{n} \cdot \overleftrightarrow{T} \, da \neq 0$

QUESTA E' ENERGIA E MOMENTO CHE SI

SI DISSIPANO SOTTO FORMA DI RADIAZIONE $\Rightarrow$

$-\bar{\nabla}\cdot \bar{s}' \neq 0$ E $\bar{\nabla}\cdot \overleftrightarrow{T} \neq 0$

- CONTEST (15.3 - A. ZANGWILL). UNA CARICA q SI MUOVE LENTAMENTE NELLO SPAZIO DOVE E' PRESENTE UN CAMPO $\bar{B}(\bar{r},t)$ ESTERNO CHE INDUCE SULLA CARICA UNO SPOSTAMENTO $\delta\bar{r}$, IN UN TEMPO δt. SI DERIVI LA FORZA SU q DALLA VARIAZIONE DEL MOMENTO E.M. CHE ACCOMPAGNA LO SPOSTAMENTO. ARGOMENTO COMPLEMENTARE (AZ p514)
- SIGNIFICATO FISICO DI $\bar{A}(\bar{r},t)$ (POTENZIALE VETTORE). PRIMA DI AFFRONTARE QUESTO ARGOMENTO DOBBIAMO PRIMA CHIARIRE L'USO DI ALCUNI SIMBOLI CHE CI PERMETTONO UN FORMALISMO SEMPLIFICATO. QUESTI SONO LA δ_{ij} DI KRONECKER E LE REGOLE DI PERMUTAZIONE DI LEVI-CIVITA RELATIVE AL SIMBOLO ε_{ijk} DOVE i, j, k SI RIFERISCONO ALLE COORDINATE x, y, z. ESSI SONO DEFINITI COME SEGUE.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} ; \quad \varepsilon_{ijk} \begin{cases} 1 & ijk = xyz \rightarrow yzx \rightarrow zxy \\ -1 & ijk = xzy \rightarrow yxz \rightarrow zyx \\ 0 & \text{TUTTI GLI ALTRI CASI} \end{cases}$$

PER QUANTO RIGUARDA IL SIMBOLO DI LEVI-CIVITA IN 3D POSSIAMO NOTARE CHE LA PRIMA RIGA DELLE PERMUTAZIONI E' DEL TIPO 123, 231, 312 E' PARI, MENTRE LA SECONDA 132, 213 321 E' DISPARI DALLA DEF. DI PERMUTAZIONE: MODO DI ORDINARE IN SUCCESSIONE GLI OGGETTI

LA PERMUTAZIONE È PARI SE CI SONO STATE $\emptyset$ TRASPOSIZIONI RISPETTO ALL'ORDINE ORIGINALE (x,y,z). È DISPARI SE C'È STATA UNA TRASPOSIZIONE RISPETTO ALL'ORDINE ORIGINALE

$x\,y\,z \rightarrow$ TRASPOSTO $x\,z\,y$

NATURALMENTE I SIMBOLI DI LEVI-CIVITA POSSONO ESSER ESTESI ANCHE A SPAZI n-D. NOI LI APPLICHEREMO PIÙ AVANTI ALLO SPAZIO $\mathbb{R}^{1,4}$. ALCUNE IDENTITÀ UTILI SONO LE SEGUENTI

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \ ; \ \partial_k r_j = \delta_{jk}$$

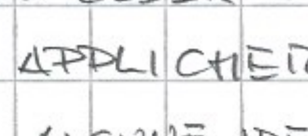
$$(\bar{\nabla} \times \bar{F})_i = \varepsilon_{ijk} \nabla_j F_k \ ; \ [\bar{\nabla} \times \bar{A}]_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k$$

SE C È UNA MATRICE 3×3 $(C_{11}, C_{12} \cdots)$

$$\det C = \varepsilon_{ijk} C_{i1} C_{j2} C_{k3} \quad \text{ESPAN. PER COLONNE}$$

$$\det C = \varepsilon_{ijk} C_{1i} C_{2j} C_{3k} \quad \text{ESPAN. PER RIGHE}$$

CONSIDERIAMO ORA LA SEGUENTE CONFIGURAZIONE



CON q_1 SOLIDALE CON IL S.d.R. CI PROPONIAMO DI CALCOLARE $\bar{P}_{EM}$

$$= \varepsilon_0 \int_{\tilde{c}} (\bar{E} \times \bar{B})\, d\tilde{c}$$

CON $\bar{E}$ E $\bar{B}$ CAMPI COMPLESSIVI. $\Rightarrow$ q_1 GENERA $\bar{E}_1, \bar{B}_1$ E q_2 GENERA $\bar{E}_2, \bar{B}_2$. IL MOMENTO RELATIVO ALLA INTERAZIONE SARÀ $\bar{E}_1 \times \bar{B}_2 + \bar{E}_2 \times \bar{B}_1$

CAMPO GEN. DAL MOTO DI q_2 SU q_1

MA $\bar{B}_1 = 0$ DATO CHE q_1 È FERMA.

$$\bar{P}_{EM} = \varepsilon_0 \int_{\tilde{c}} (\bar{E}_1 \times \bar{B}_2)\, d\tilde{c}$$

USANDO LA RELAZIONE $(\bar{E}_1 \times B_2)_k = \varepsilon_{klm} E_{1l} E_{2m}$

E RICORDANDO CHE $\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A} \Rightarrow B_{2m} = \varepsilon_{mst} \partial_s A_{2t}$

(DOVE k l m s t SONO INDICI)

$$P_{EM,k} = \varepsilon_0 \int_\tau (E_{1l} \partial_k A_{2l} - E_{1l} \partial_l A_{2k}) \, d\tau$$

INTEGRANDO I DUE TERMINI PER PARTI E ASSUMENDO CHE I TERMINI DI SUPERFICIE $\to 0$

$$P_{EM,k} = \varepsilon_0 \int (A_{2k} \bar{\nabla} \cdot \bar{E} - A_{2l} \partial_k E_{1l}) \, d\tau$$

ORA $\bar{\nabla} \times \bar{E} = 0 \Rightarrow \partial_k E_{1l} = \partial_l E_{1k}$ E UN'ALTRA INTEGRAZIONE PER PARTI DA:

$$\bar{P}_{EM} = \varepsilon_0 \int [\bar{A}_2 (\bar{\nabla} \cdot \bar{E}_1) + \bar{E}_1 (\bar{\nabla} \cdot \bar{A}_2)] \, d\tau$$

MA $\varepsilon_0 \bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \rho$ E $\bar{\nabla} \cdot \bar{A}_2 = 0 \Rightarrow \bar{P}_{EM} = \int \rho_1(r) \bar{A}_2(r) \, d\tau$

SE q_1 E' UNA CARICA PUNTUALE ALLORA

$\rho_1(\bar{r}) = q_1 \delta(r - r_1) \Rightarrow \boxed{\bar{P}_{EM} = q_1 \bar{A}_2(\bar{r}_1, t)}$

QUESTO SPIEGA PERCHE' $\bar{A}(\bar{r}, t)$ E' ANCHE DETTO MOMENTO ELETTRO-CINETICO

- MOMENTO ANGOLARE

A QUESTO PUNTO CI DOVREBBE ESSERE CHIARO CHE IL CAMPO E.M. NON E' "SEMPLICEMENTE" UN MEDIATORE DELLE INTERAZIONI TRA CARICHE MA PRESENTA DELLE PROPRIETA' INTRINSECHE IMPORTANTI AI FINI DI CAPIRE I FENOMENI E.D.

PER ESEMPIO IL CAMPO E.M. TRASPORTA ENERGIA $u_{EM} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2\right)$ E UN MOMENTO $\bar{p}_{EM} = \mu_0 \varepsilon_0 \bar{S} = \varepsilon_0 (\bar{E} \times \bar{B})$ PER UNITÀ DI VOLUME.

POSSIAMO QUINDI DEFINIRE UN MOMENTO ANGOLARE PER UNITÀ DI VOLUME $\bar{l}_{EM} = \bar{r} \times \bar{p}_{EM}$

$\Rightarrow \bar{L}_{EM} = \int_{\tau} \bar{l}_{EM} \, d\tau$. VALE LA PENA NOTARE CHE $\bar{l}_{EM} = \varepsilon_0 [\bar{r} \times (\bar{E} \times \bar{B})]$

OSSERVAZIONE: ANCHE CAMPI STATICI POSSONO AVERE $\bar{l}_{EM} \neq 0$ SE $(\bar{E} \times \bar{B}) \neq 0$.

• CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

L'OSSERVAZIONE FATTA PRIMA CI PORTA A DEFINIRE LA DENSITÀ DEL $\bar{l}_{EM} = \bar{r} \times \bar{g}$ CON $\bar{g} = \varepsilon_0 \bar{E} \times \bar{B}$ E QUINDI A DIMOSTRARE LA SUA CONSERVAZIONE. PER FARE QUESTO PARTIAMO DAL MOMENTO TORCENTE MECCANICO (MECHANICAL TORQUE IN INGLESE) $\bar{N}_{MEC}$

$$\boxed{\bar{N}_{MEC} = \frac{d\bar{L}_{MEC}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\tau} (\bar{r} \times \bar{f}_{MEC}) \, d\tau} \Rightarrow$$

$$= \int [\bar{r} \times (\rho \bar{E} + \bar{J} \times \bar{B})] \, d\tau$$

LA PRESENZA DELLA DENSITÀ DELLA FORZA MEC $\bar{f}_{MEC}$ RICHIAMA LA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO LINEARE

$$\partial_t \bar{g} - \bar{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T} = -\bar{f}_{MEC}$$

(RICORDIAMO CHE QUESTA RELAZIONE DERIVA DA $\partial_t (\bar{p}_{MEC} + \bar{p}_{EM}) = \bar{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T}$

$\partial_t \bar{p}_{MEC} = \bar{f}_{MEC}$; $\partial_t \bar{p}_{EM} = \partial_t \varepsilon_0 (\bar{E} \times \bar{B}) = \partial_t \bar{g}$)

PARTENDO DA QUESTA RELAZIONE POSSIAMO MOLTIPLICARE VETTORIALMENTE ENTRAMBI I MEMBRI PER IL VETTOR $\bar{r}$ CHE È

INDIPENDENTE DAL TEMPO E OTTENIAMO

$$\boxed{\partial_t(\bar{r}\times\bar{g}) - \bar{r}\times\bar{\nabla}\circ\overleftrightarrow{T} = -\bar{r}\times\bar{f}_{MEC}}$$

DOVE $-(\bar{r}\times\bar{\nabla}\circ\overleftrightarrow{T})_i = \varepsilon_{ijk}\, r_j\, \partial_m T_{mk}$

TUTTAVIA DATO CHE $\partial_m(T_{mk} r_j) = r_j \partial_m T_{mk} + T_{mk}\delta_{mj} =$
$= r_j \partial_m T_{mk} + T_{jk} \Rightarrow -(\bar{r}\times\bar{\nabla}\circ\overleftrightarrow{T})_i \Rightarrow$
$= -\varepsilon_{ijk}[\partial_m(T_{mk} r_j) - T_{jk}]$ MA PER LA SIMMETRIA
DI $\overleftrightarrow{T}$ $(T_{ij} = T_{jk}) \Rightarrow \varepsilon_{ijk} T_{jk} = 0 \Rightarrow$

$$-(\bar{r}\times\bar{\nabla}\circ\overleftrightarrow{T})_i = \partial_m \varepsilon_{ikj} T_{mk} r_j = \{\bar{\nabla}\circ(\overleftrightarrow{T}\times\bar{r})\}_i$$

$$\Rightarrow -\bar{r}\times\bar{\nabla}\circ\overleftrightarrow{T} = \bar{\nabla}\circ(\overleftrightarrow{T}\times\bar{r})$$ DIM. FACOLTAT.

DA QUESTA RELAZIONE CONSIDERANDO CHE
SI OTTIENE $\boxed{\partial_t(\bar{r}\times\bar{g}) + \bar{\nabla}\circ(\overleftrightarrow{T}\times\bar{r}) = -\bar{r}\times\bar{f}_{MEC}}$

• LEZIONE #9

ORA DEFINIAMO $\overleftrightarrow{M} = \overleftrightarrow{T}\times\bar{r}$ DOVE $\bar{M}$ DIMENS.
È $\left[(\text{MOMENTO ANGOLARE})/_{VOL}\right]\times$ VELOCITÀ
E QUINDI PUÒ ESSERE INTERPRETATO COME
UNA CORRENTE DI DENSITÀ DEL MOMENTO
ANGOLARE (IN MODO CONSISTENTE CON $\overleftrightarrow{T}$
MOMENTO LINEARE).

$$\bar{N}_{MEC} = \frac{d\int_\tau \ell_{MEC}\, d\tau}{dt} = -\int_{\tau}\left[\partial_t(\bar{r}\times\bar{g}) + \bar{\nabla}\circ\overleftrightarrow{M}\right]d\tau =$$

$$= -\frac{d\int_\tau(\bar{r}\times\bar{g})\,d\tau}{dt} - \int_\tau \bar{\nabla}\circ\overleftrightarrow{M}\, d\tau$$

$$= -\frac{d\int_\tau \ell_{EM}\, d\tau}{dt} - \int_\tau \bar{\nabla}\circ\bar{M}\, d\tau \Rightarrow$$

$$\partial_t(\ell_{MEC} + \ell_{EM}) = -\bar{\nabla}\circ\overleftrightarrow{M}$$