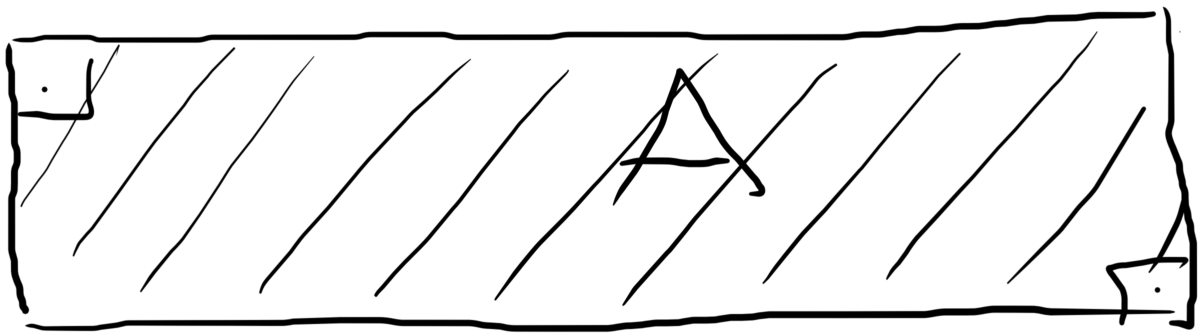
Lezione del 20 Aprile 2021

Presenti in aula (su autodichiarazione)

SM 6000712

Misura di aree di figure piane

rettangolo



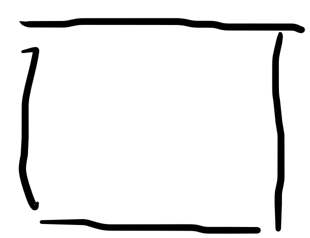
h - altezza

b - base

$$\boxed{A = b \cdot h}$$

quadrato

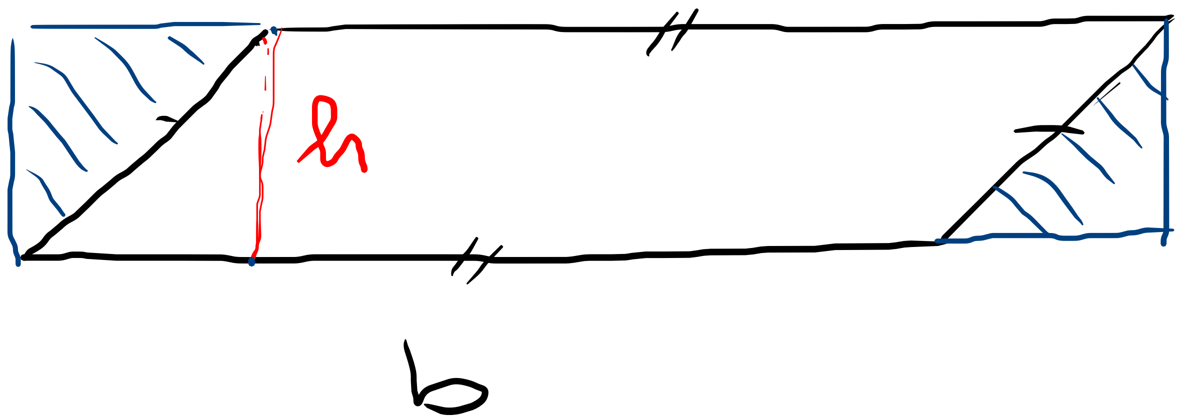
$b = h$



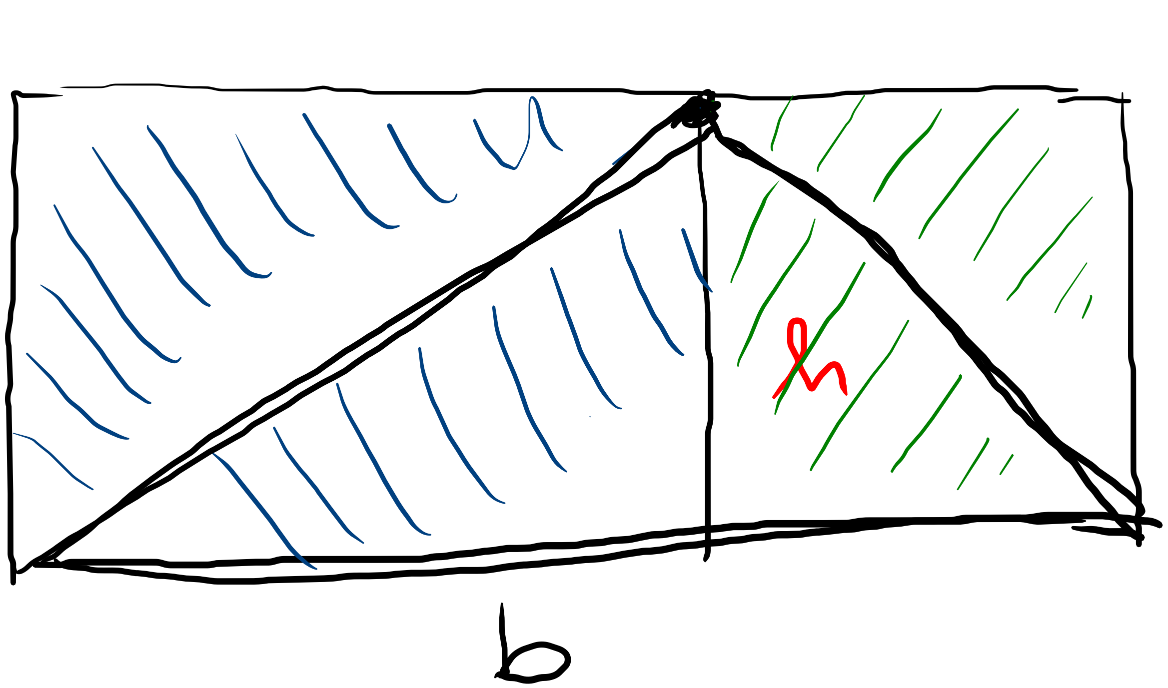
h

b

parallelogramma

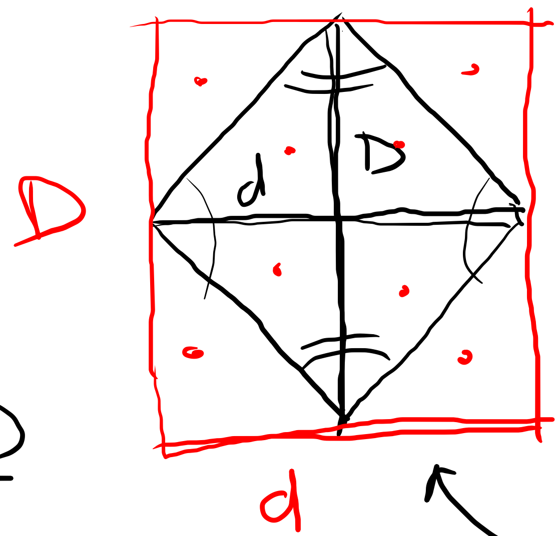


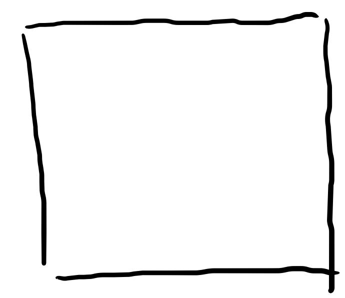
$$A = b \cdot h$$



$$A_{\triangle} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{d \cdot D}{2}$$





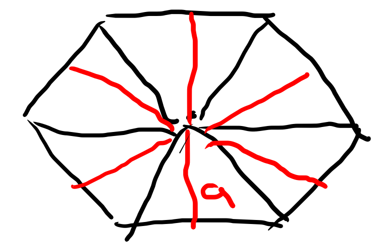
rombo

quadrato

sono entrambi parallelogrammi

ma solo il quadrato è un quadrilatero (poligono a 4 lati) regolare (lati di lunghezza uguale e angoli fra i lati uguali)

n	
3	Triangolo regolare $\Longleftrightarrow$ equilatero
4	Quadrilatero regolare $\Longleftrightarrow$ quadrato
5	Pentagono regolare
6	Esagono regolare
7	
.	
1	

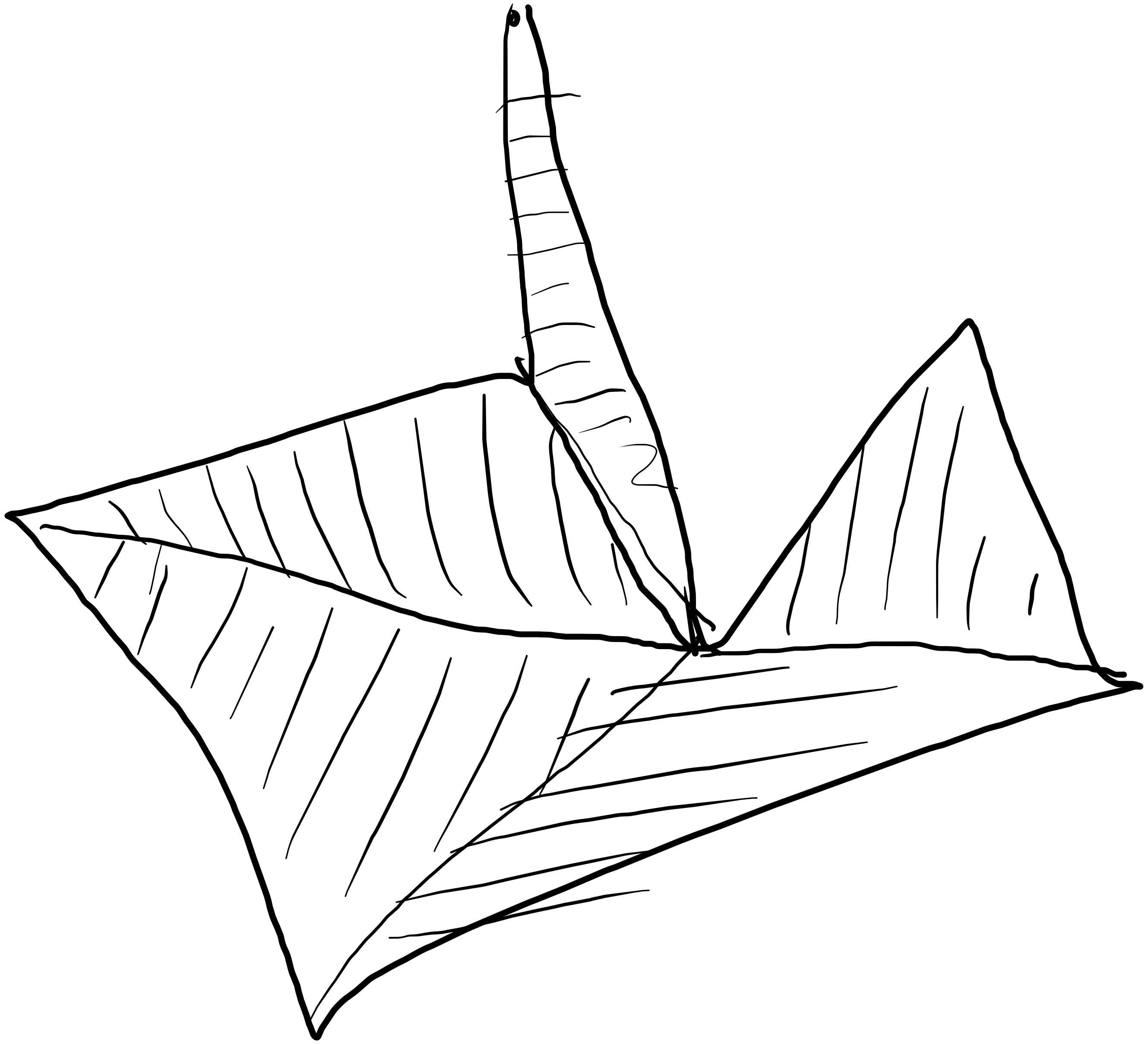


$p = n \cdot l$

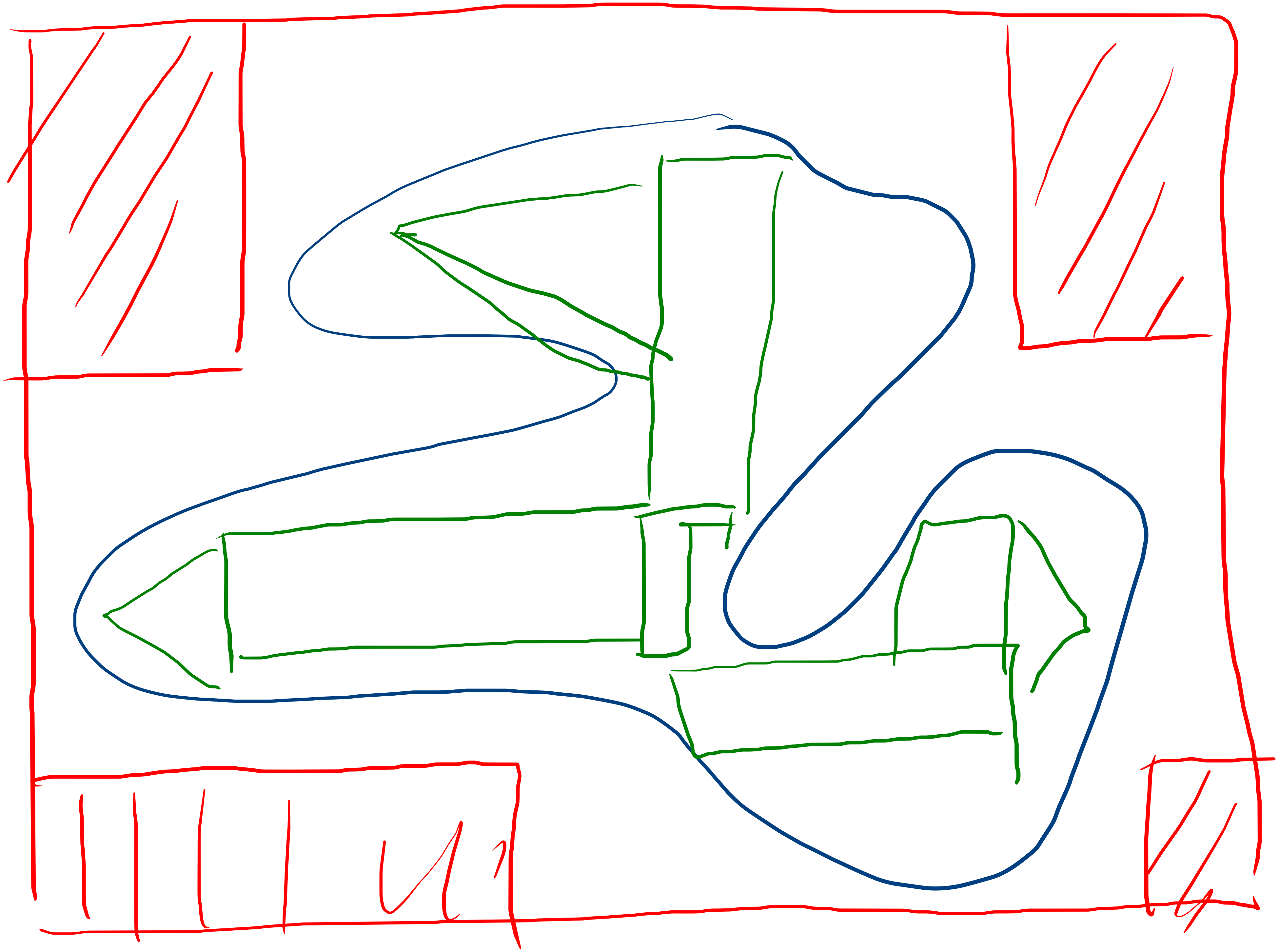
perimetro

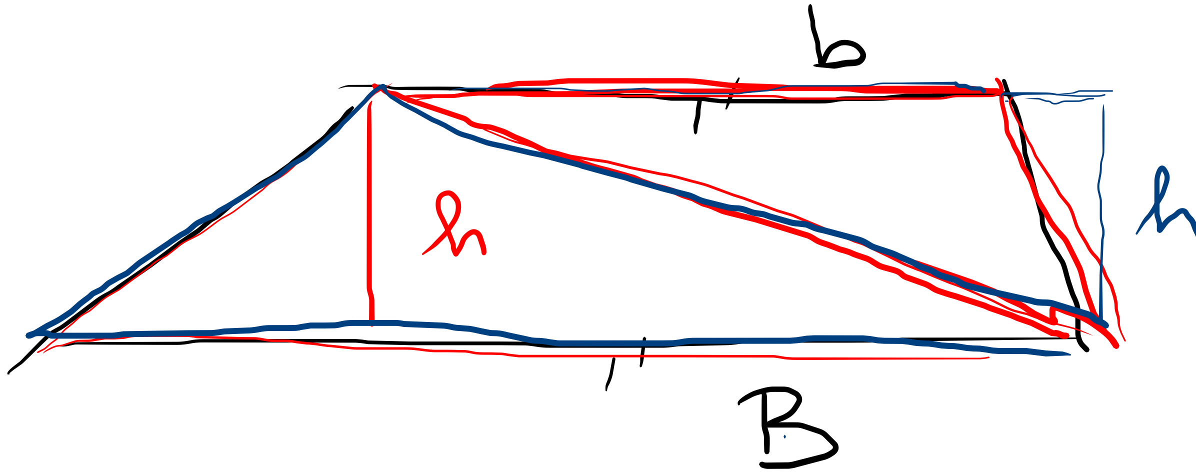
$$A_{\substack{\text{Poligono}\\ \text{regolare n lati}}} = \frac{l \cdot a}{2} \cdot n = \frac{p \cdot a}{2}$$

$n \geq 5$

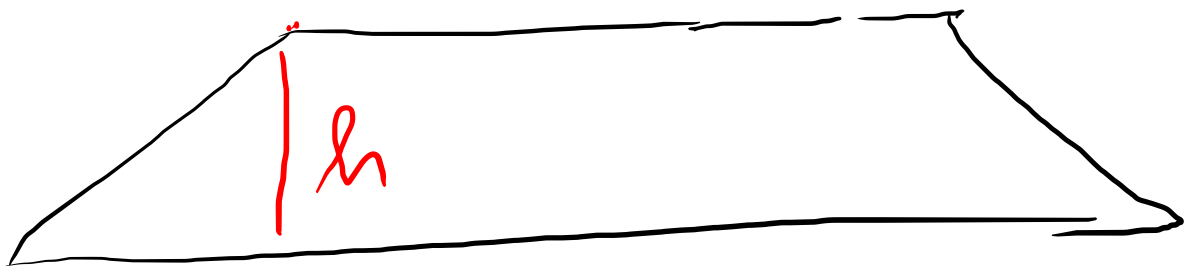


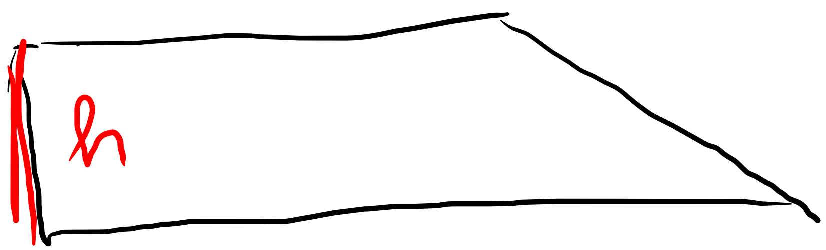
Cosa succede se il bordo delle figure piane di cui si vuole studiare l'estensione NON è poligonale?

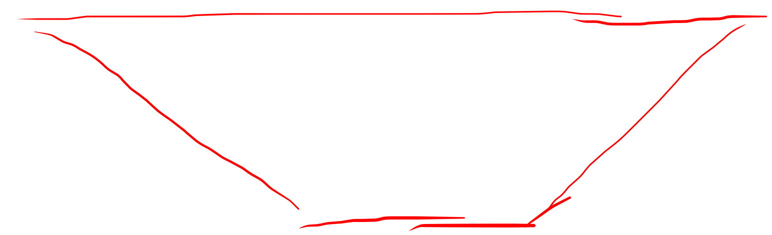




Trapezium

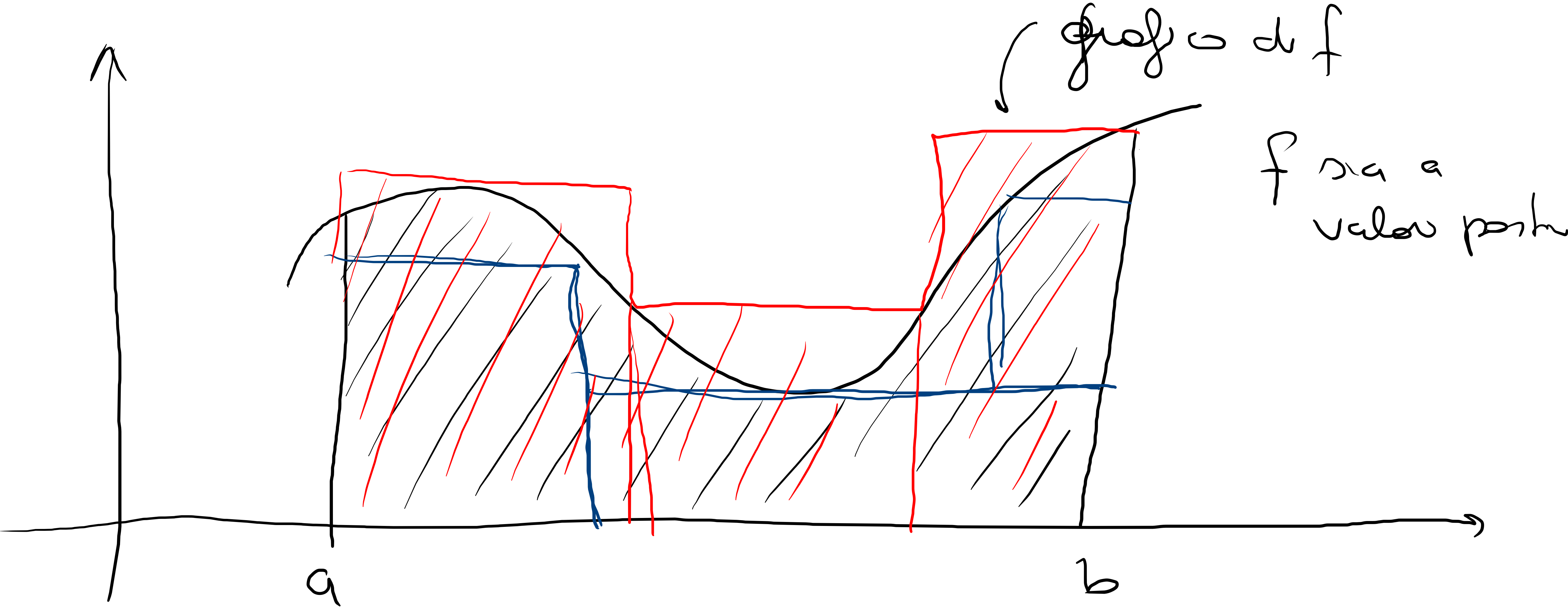




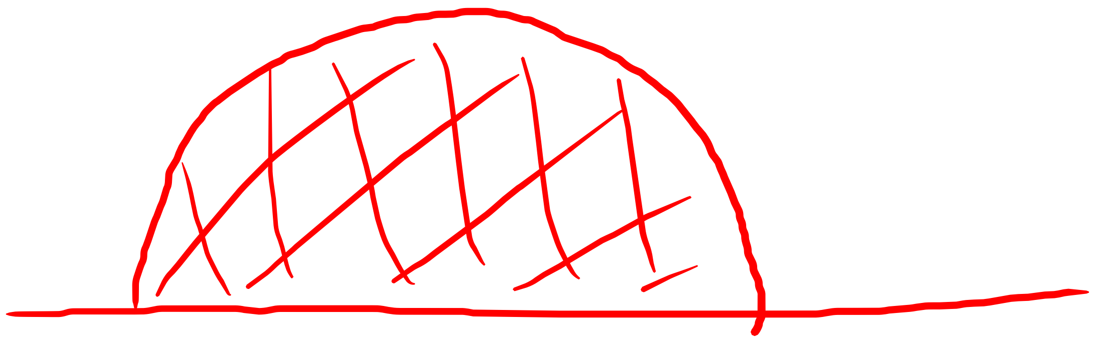


$$A_{\text{⏢}} = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2}$$

$$= \frac{(B+b)\,h}{2}$$



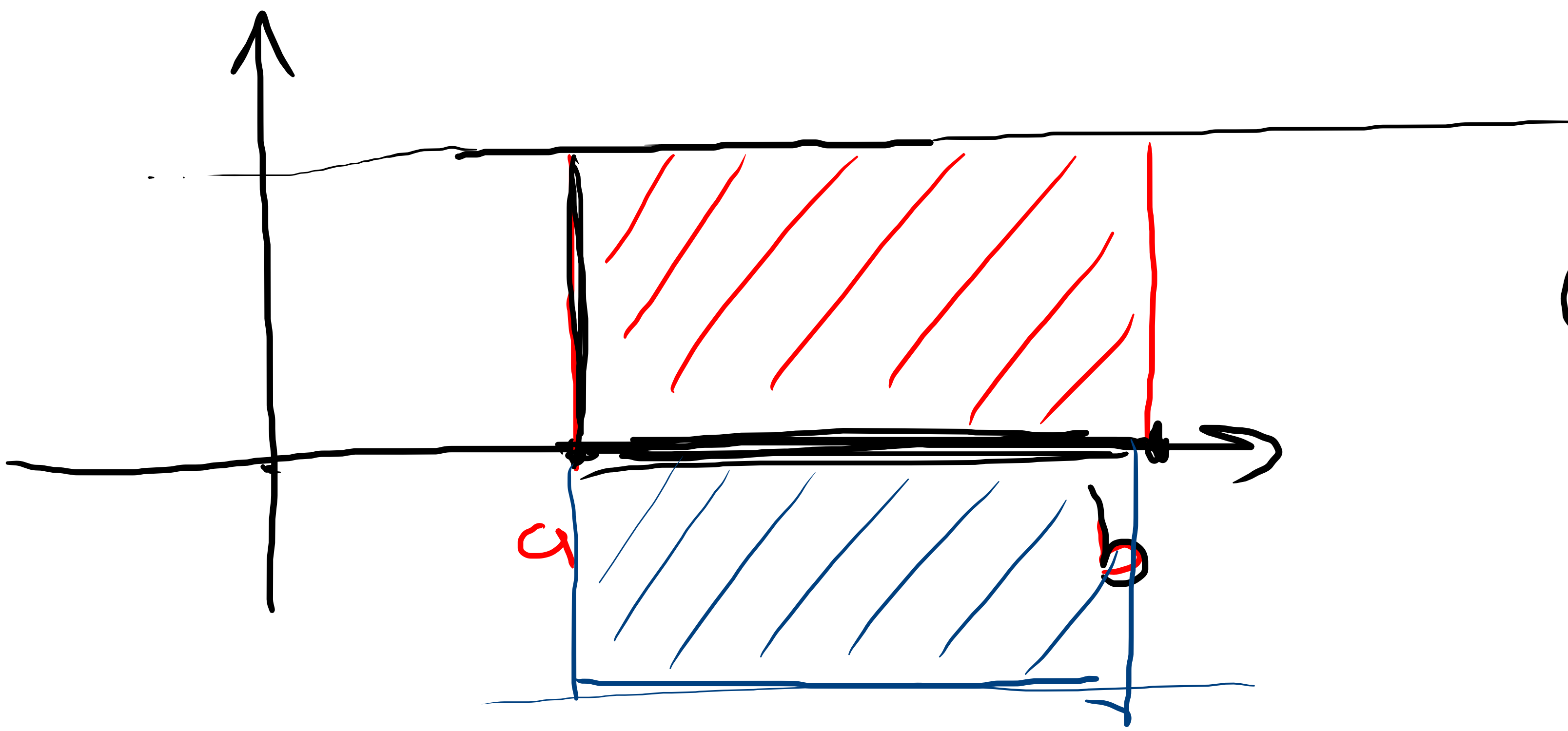
f sia a valori positi



Così semplici

f funzione reale di variabile reale

COSTANTE k (>0)

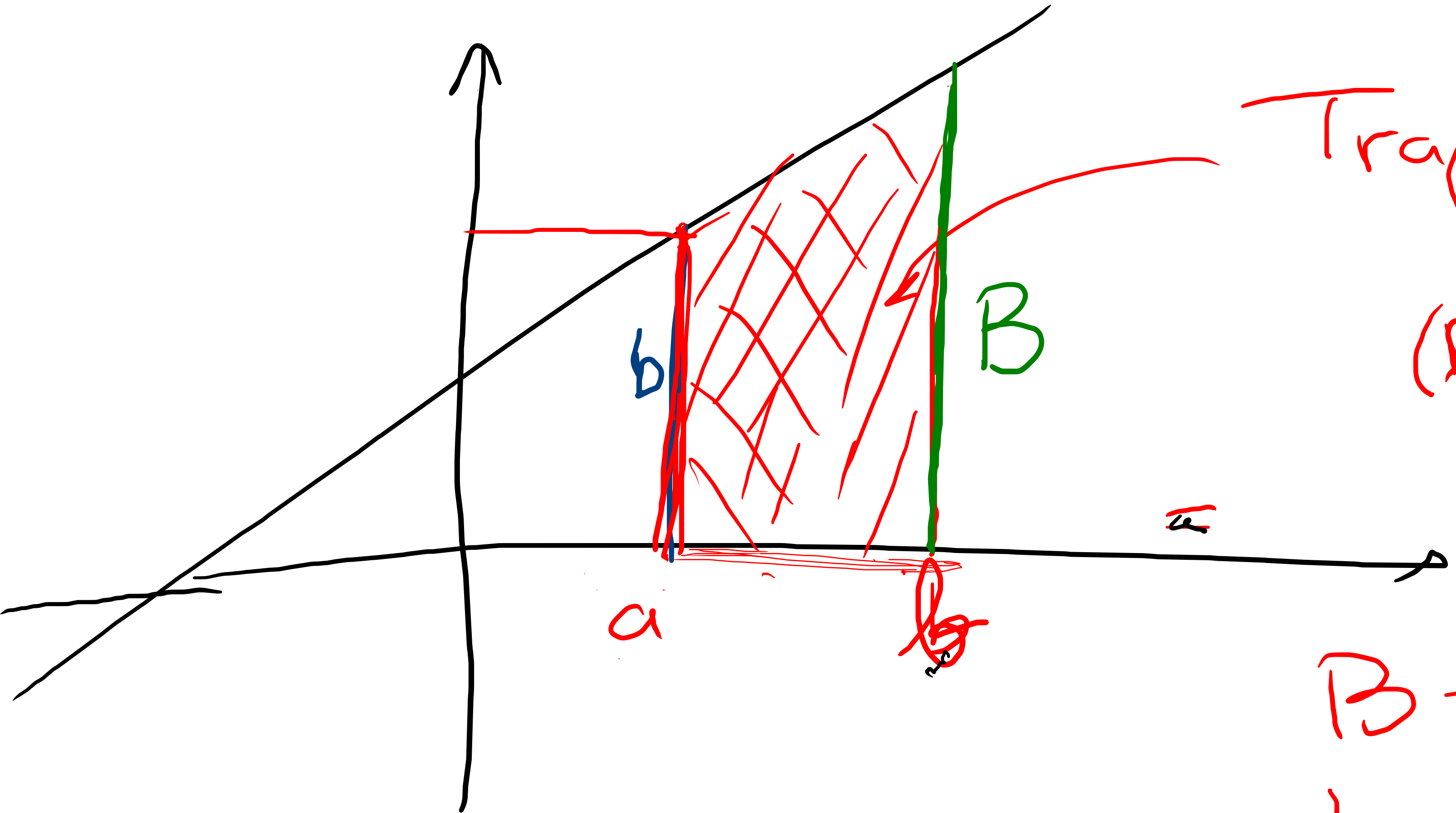


$k = y$

$(b-a) \cdot k = A$

$$y = f(x) = mx + q$$

$$m \neq 0$$



Trapezio rettangolo

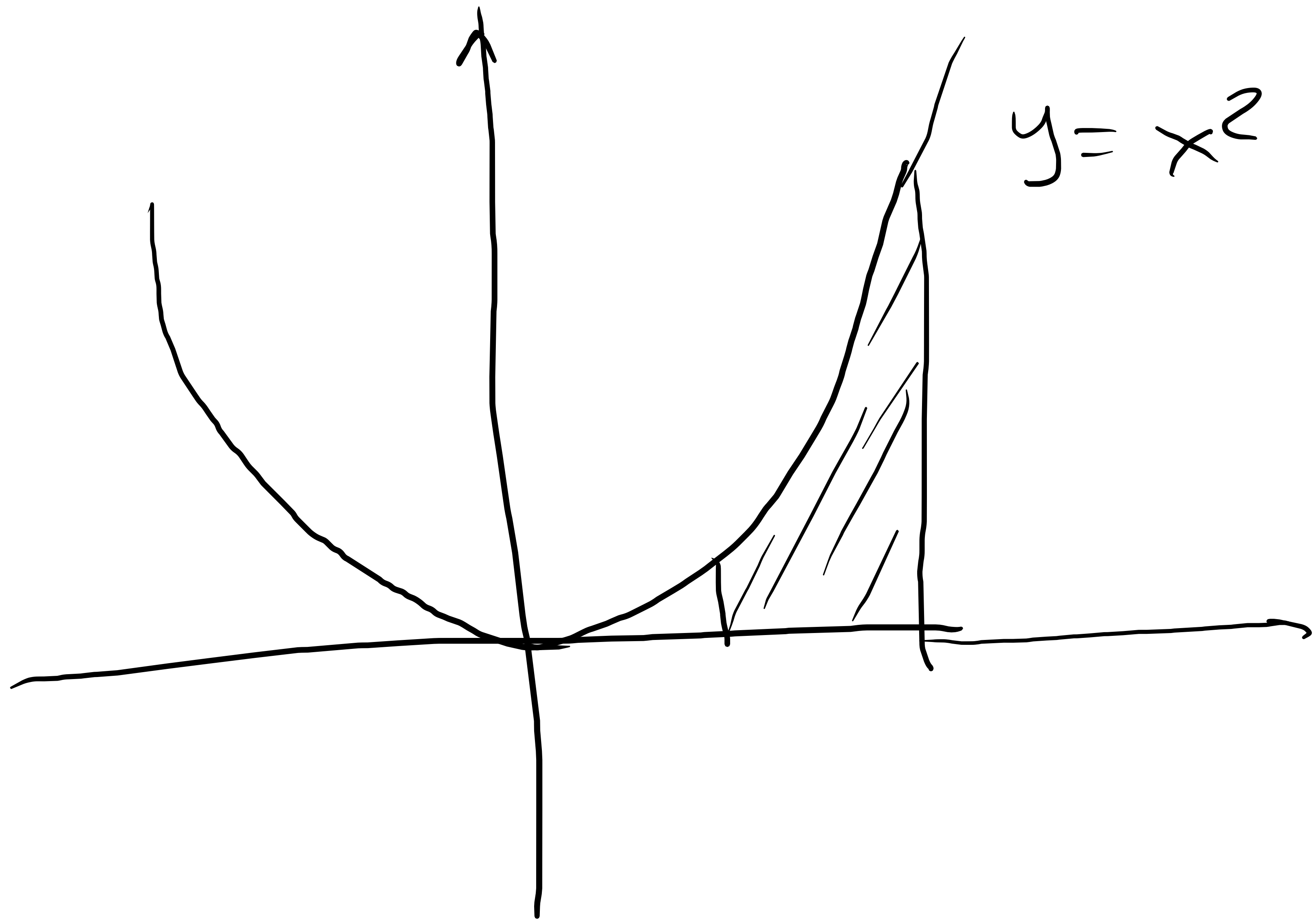
$$\frac{(b-a)\cdot(B+b)}{2} = A$$

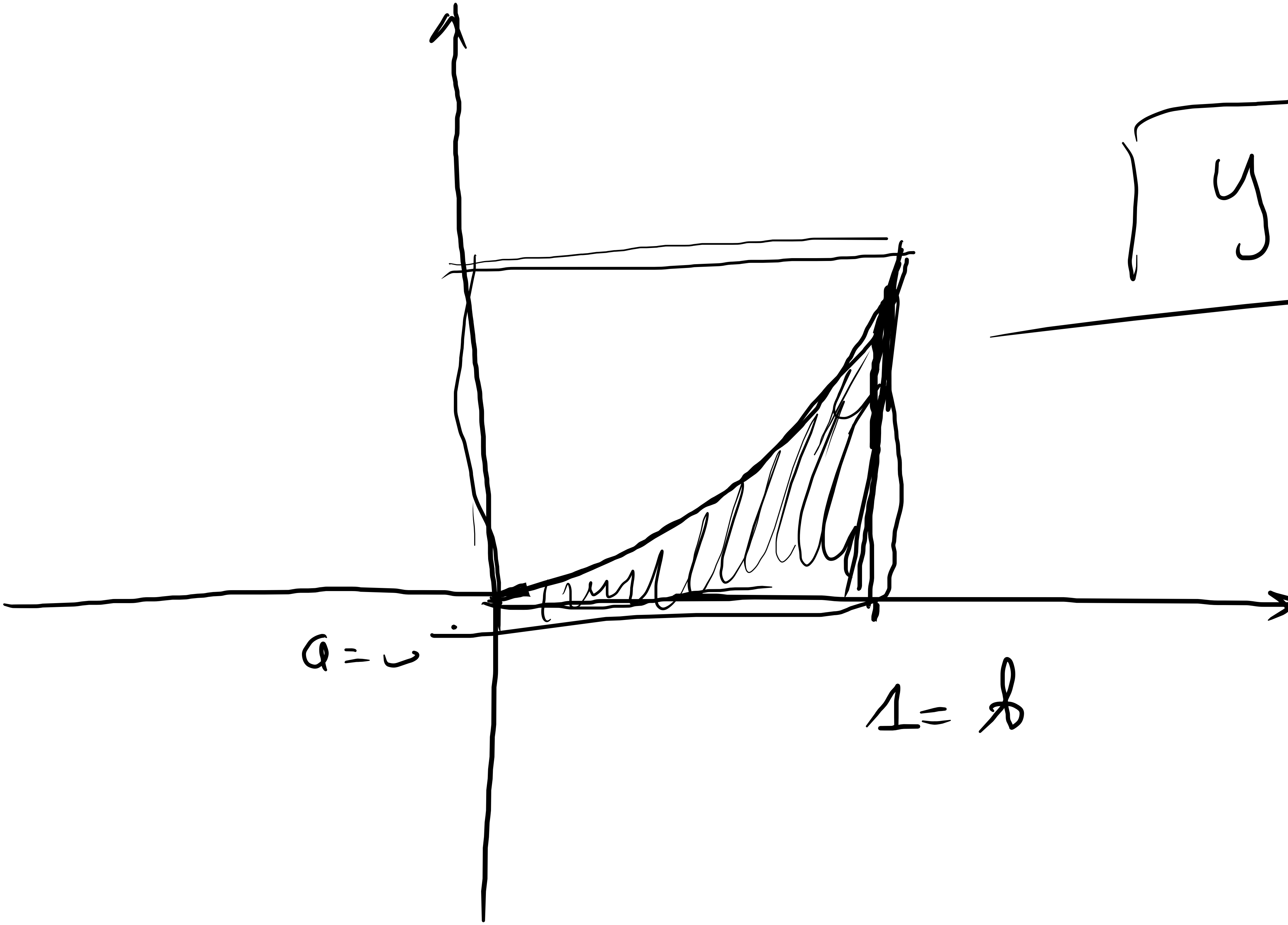
$$= \frac{(b-a)\cdot(mb+ma+2q)}{2}$$

$$B = f(b) = mb + q$$

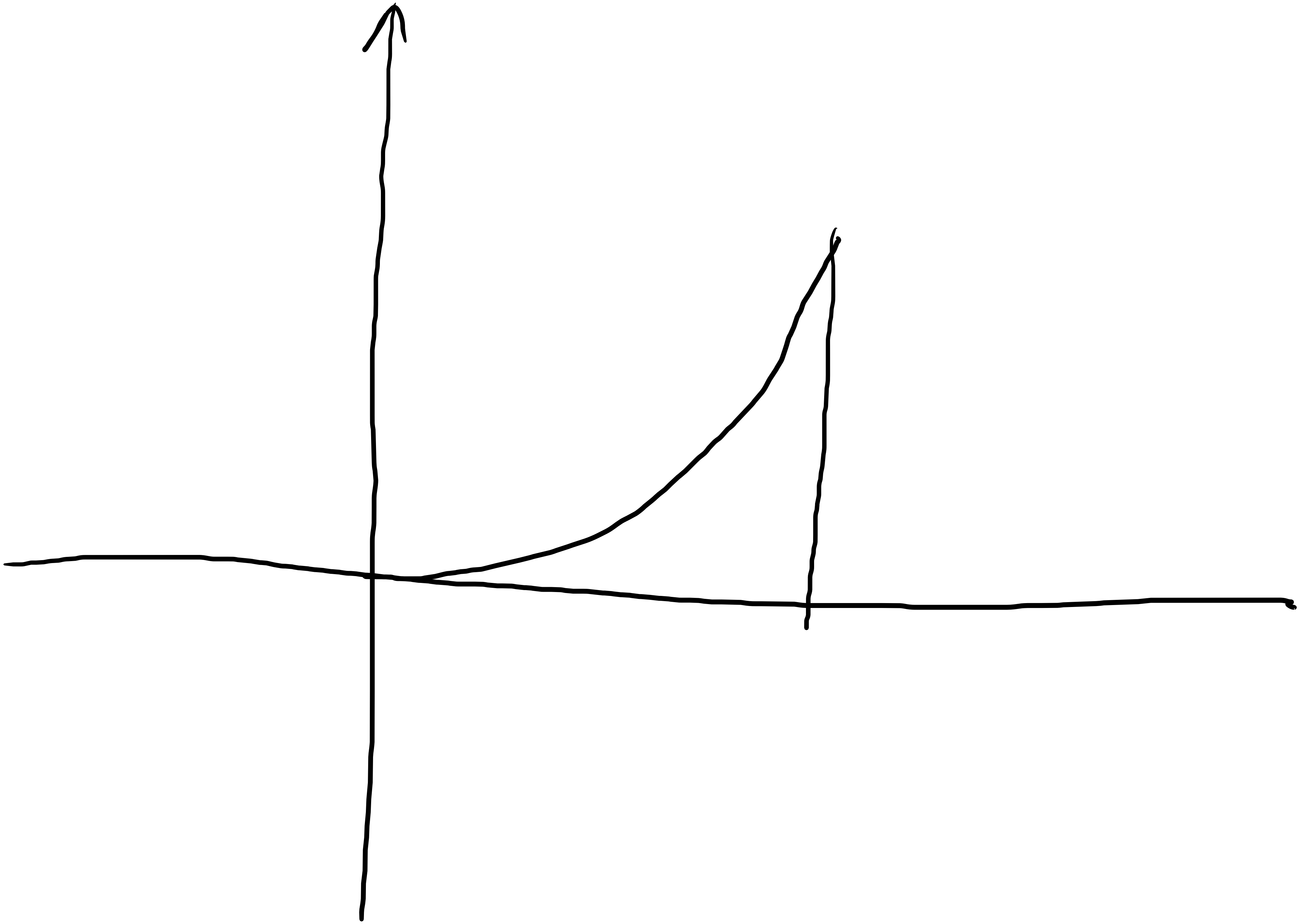
$$b = f(a) = ma + q$$

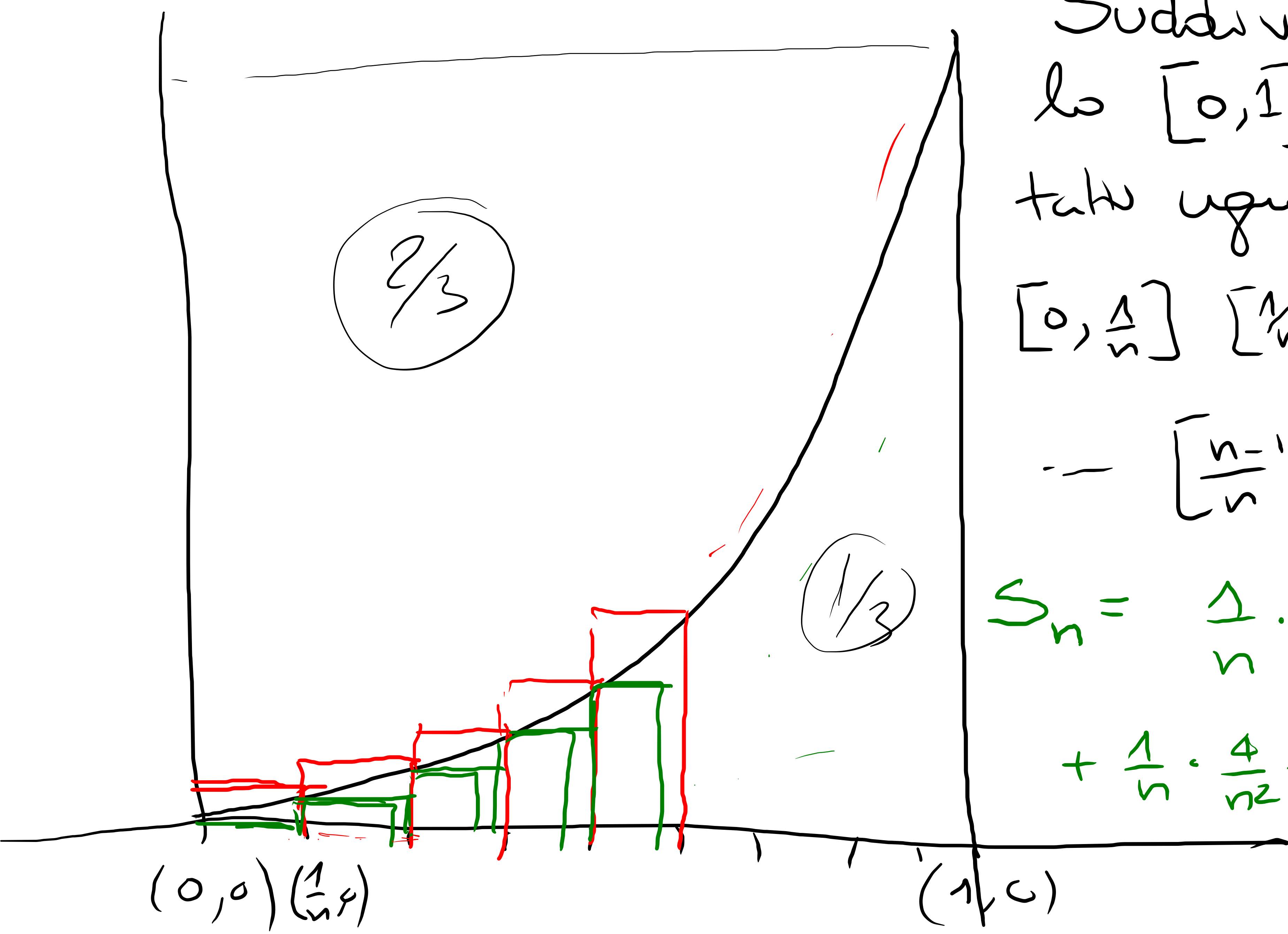
$y = x^2$





$$\boxed{y = x^2}$$





Suddividiamo l'intervallo $[0,1]$ in n-sottointervalli tutti uguali $n \in \mathbb{N}$

$$\left[0, \frac{1}{n}\right] \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right] \text{---}$$

$$\text{---} \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1\right]$$

$$S_n = \frac{1}{n} \cdot 0 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{n} \cdot \frac{4}{n^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} \cdot \frac{(n-1)^2}{n^2}$$

$$S_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

$$S_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{0}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

$$S_n = \frac{1}{n^3}\left(0 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2\right)$$

$$S_n = \frac{1}{n^3}\left(\underline{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}\right)$$

Ricordo che

$$\underbrace{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}_{} = \frac{1}{6}\cdot n(n+1)(2n+1)$$

per induzione

$\boxed{n=1}$

$$1^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{6}\cdot 1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1) = \frac{1}{6}\cdot 2\cdot 3 = 1 \checkmark$$

Supponiamo vera la formula per n e mostriamo che allora è vera per n+1

$$\underbrace{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}_{\frac{1}{6}n(n+1)\cdot(2n+1)}+(n+1)^2=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{6}\cdot n(n+1)\cdot(2n+1)}+(n+1)^2=$$

$$=(n+1)\cdot\left[\frac{1}{6}n(2n+1)+(n+1)\right]=$$

$$=(n+1)\cdot\left[\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right]=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6)$$

Mo $\quad 2n^2 + \underline{7n} + 6 = (n+2)(2n+3)$

Qund

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)\underbrace{(n+2)}_{[(n+1)+1]}\underbrace{(2(n+1)+1)}_{\underline{\underline{2n+3}}}$$

✓

$$S_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1)(2n+1)$$

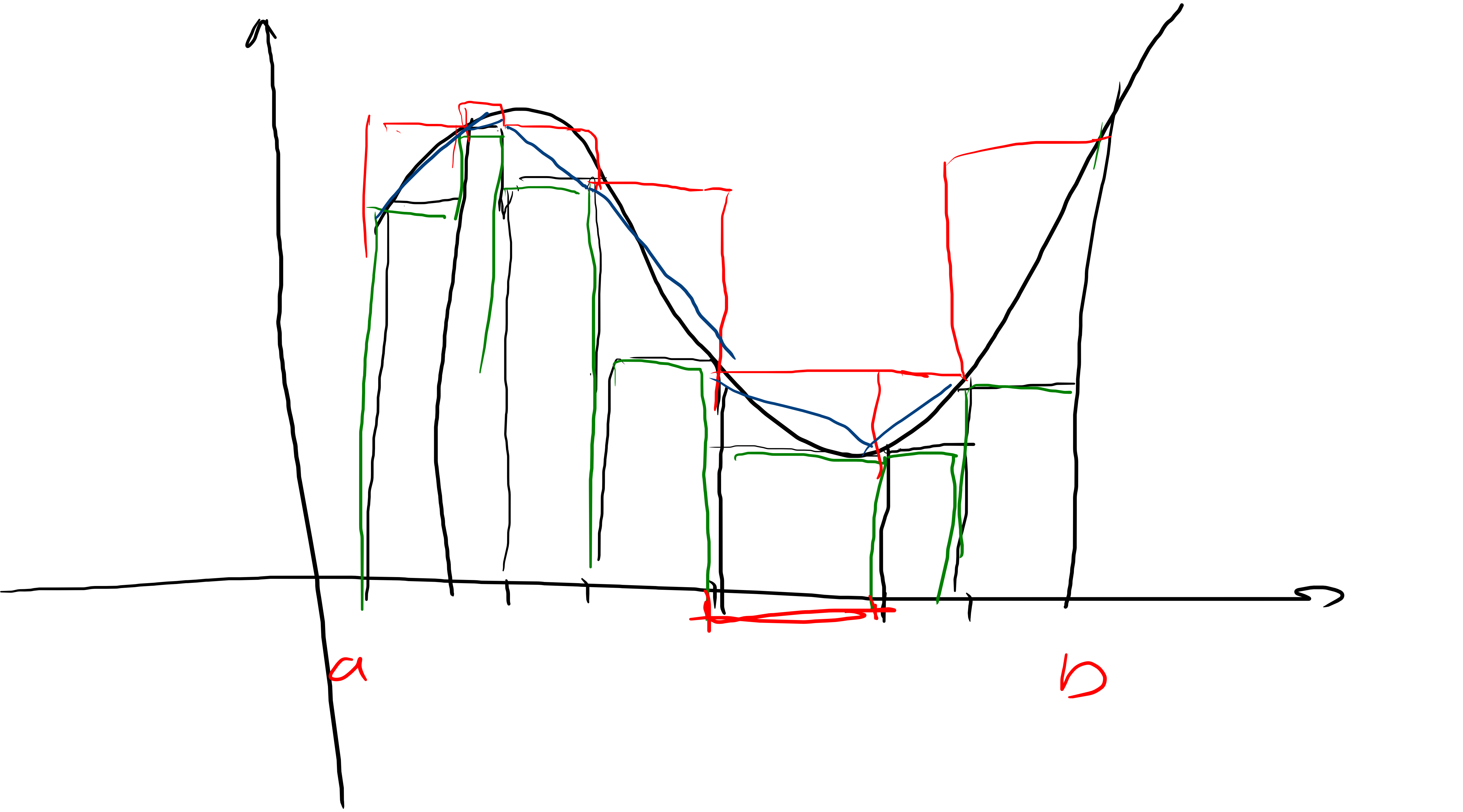
$$S_n = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} (n-1) n (2(n-1)+1)$$

$$= \frac{1}{n^3} \frac{1}{6} (n-1) n (2n-1)$$

$$s_n \leq A \leq S_n$$

$$s_n = \frac{1}{6n^3}(n-1)\cdot n(2n-1) = \frac{2n^3-2n^2+n-n^2}{6n^3} = \frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3}$$

$$S_n = \frac{1}{6n^3}\cdot n(n+1)(2n+1) = \frac{2n^3+2n^2+n+n^2}{6n^3} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$



a
b

Def Diremo che una funzione reale di variabile reale è INTEGRABILE secondo Riemann in $[a,b] \subset \mathrm{Dom} f$ se al tendere a zero dell'ampiezza massima dei sottointervalli in cui si suddivide $[a,b]$, risultano convergenti ALLO STESSO VALORE le approssimanti per difetto ed eccesso dell'area del sottografico di f (in $[a,b]$).

Teorema

Ogni funzione CONTINUA in [a,b] è integrabile secondo Riemann in [a,b].

Notazione Se f è integrabile secondo Riemann in [a,b], indichiamo con questo simbolo il valore limite COMUNE delle approssimazioni per eccesso e per difetto della misura dell'estensione dell'area del sottografico di f.

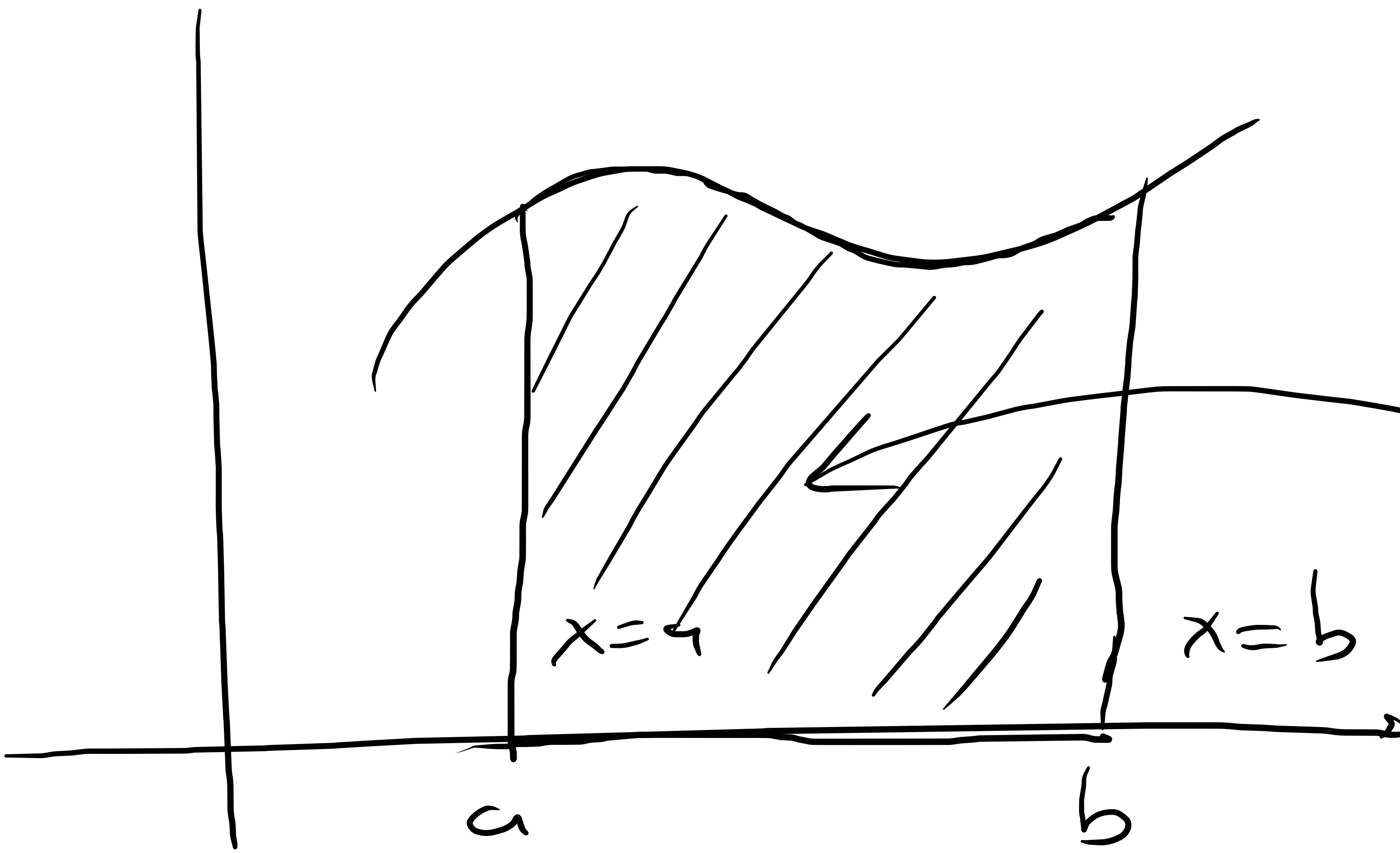
$$\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

INTEGRALE DEFINITO di f in $[a,b]$

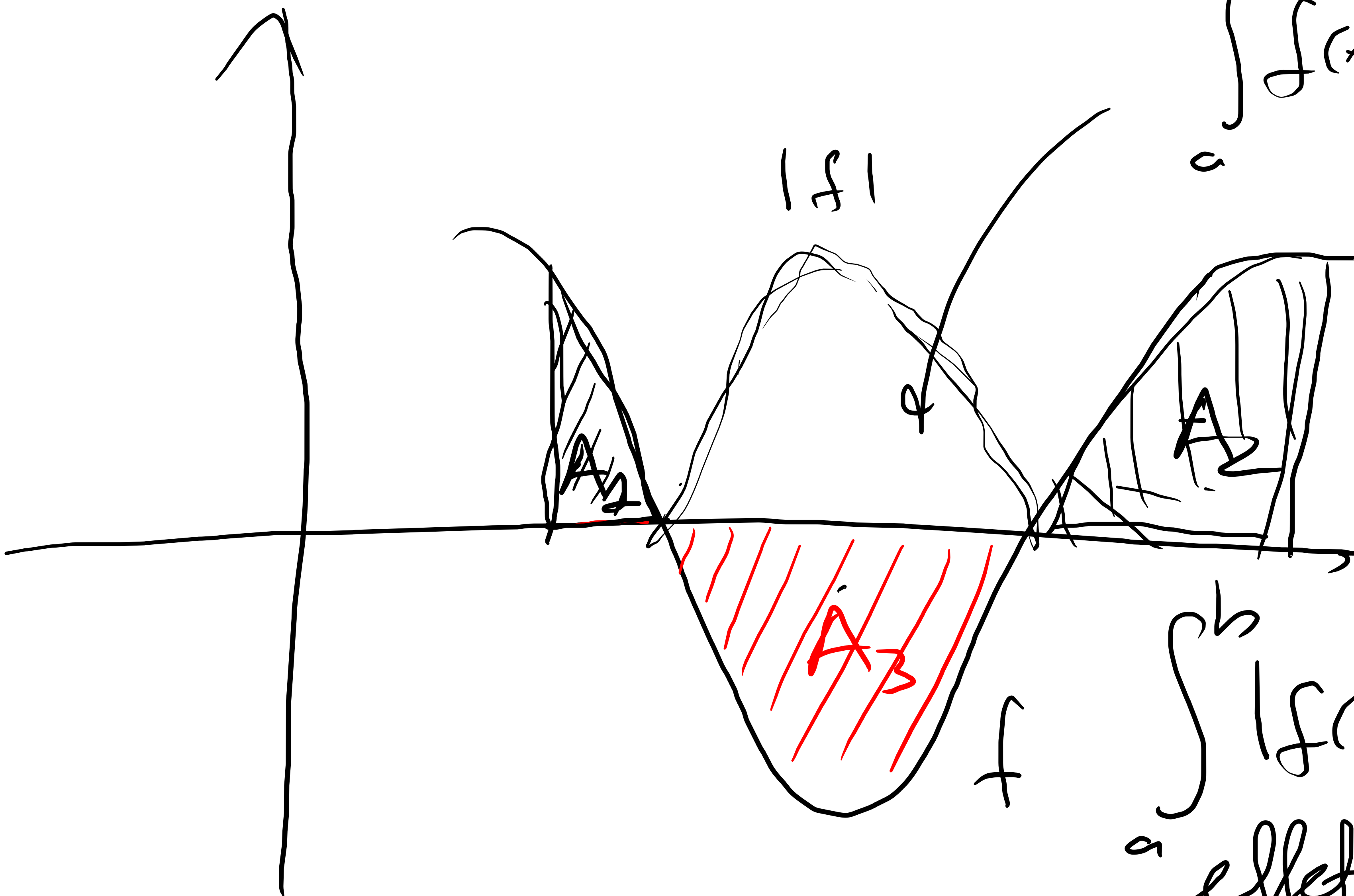
Se f è a valori positivi, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx$$ MISURA EFFETTIVAMENTE

l'estensione dell'area della porzione di piano delimitata dal grafico di f, dall'asse x e dalle rette di eq. $x=a$ e $x=b$

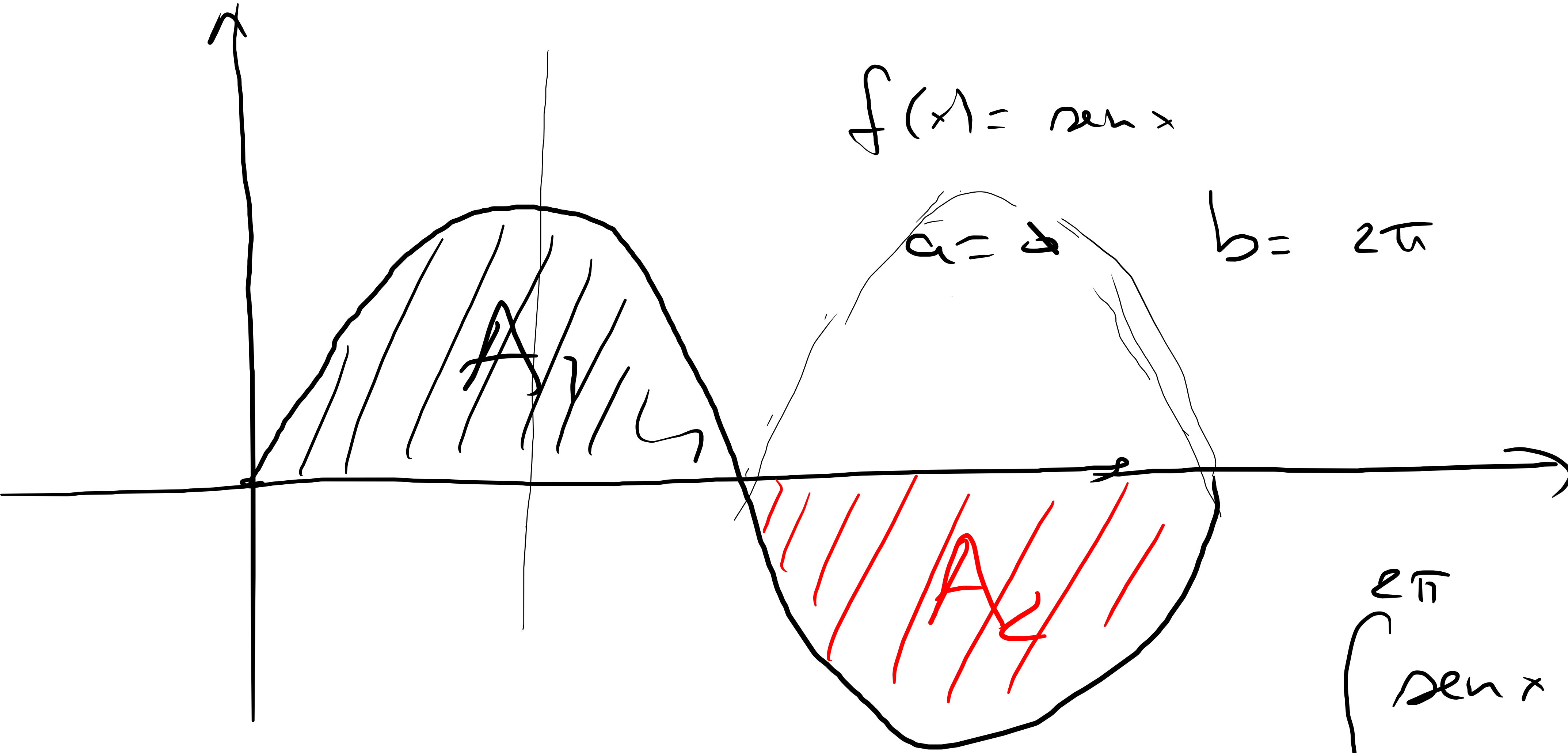


$$\int_a^b f(x)\,dx$$



$\int_a^b f(x)\,dx$ NON MISURA l'AREA del sottografico ma $\underline{A_1 + A_2 - A_3}$

$\int_a^b |f(x)|\,dx$ misura effettivamente l'estensione dell'area del sottografico di f



$f(x) = \operatorname{sen} x$

$a = 0 \qquad b = 2\pi$

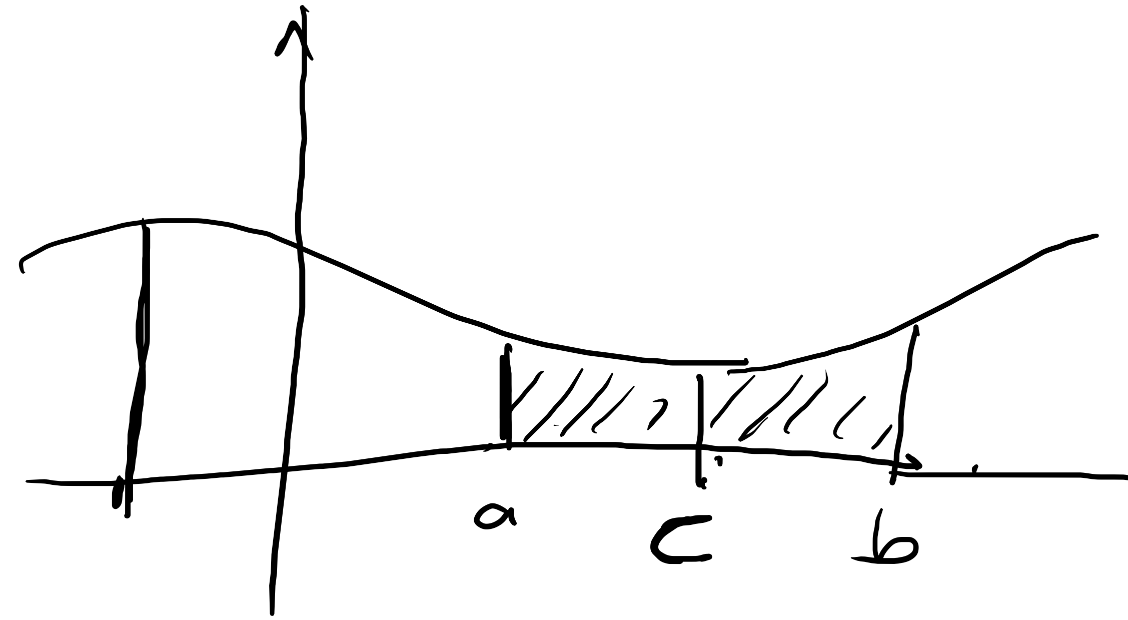
$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx = 0$$

$$= A_1 - A_2 = 0$$

$$A_1 = A_2$$

Oss

① $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$



② $a < c < b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

proprietà di additività sull'integrale !!

$[a, b]$ $\qquad b \geq a$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

$a \longrightarrow b$

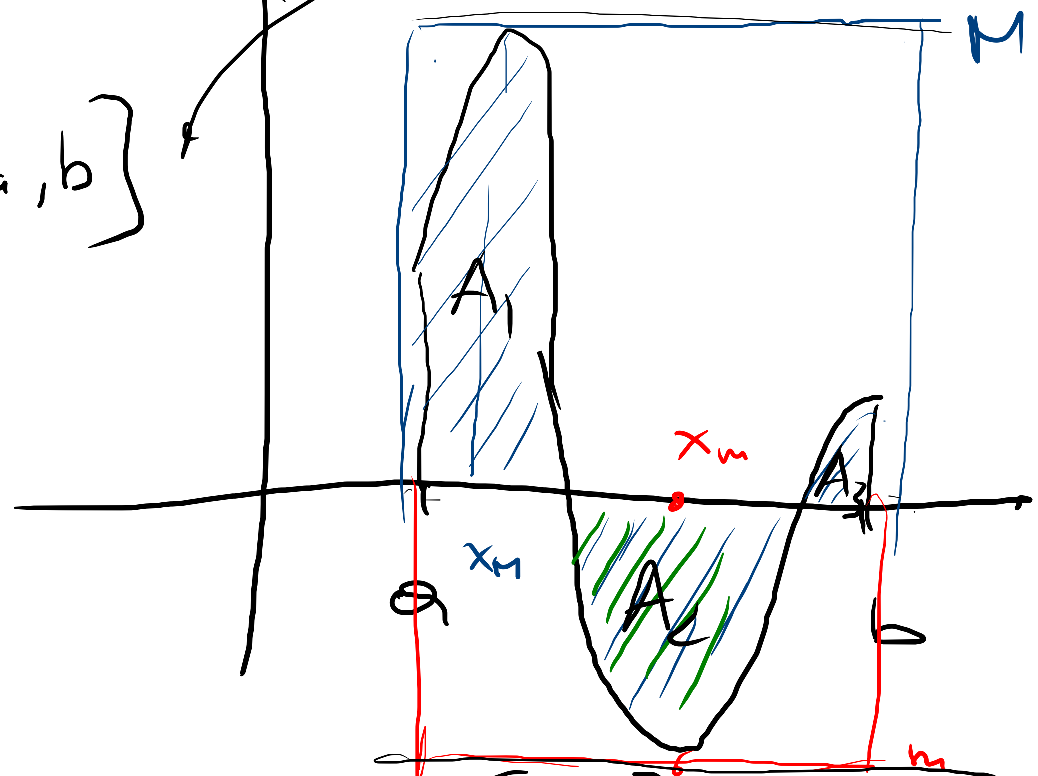
Oss

INTERVALLO CHIUSO e LIMITATO

f continua in $[a,b]$

$\Downarrow$

per il Teorema di Weierstrass f è dotata di minimo e di massimo in $[a,b]$.



$\forall x \in [a,b]$

$$m \le f(x) \le M$$

$$\int_a^b m\,dx = m(b-a)$$

$$\int_a^b M\,dx = M\cdot(b-a)$$

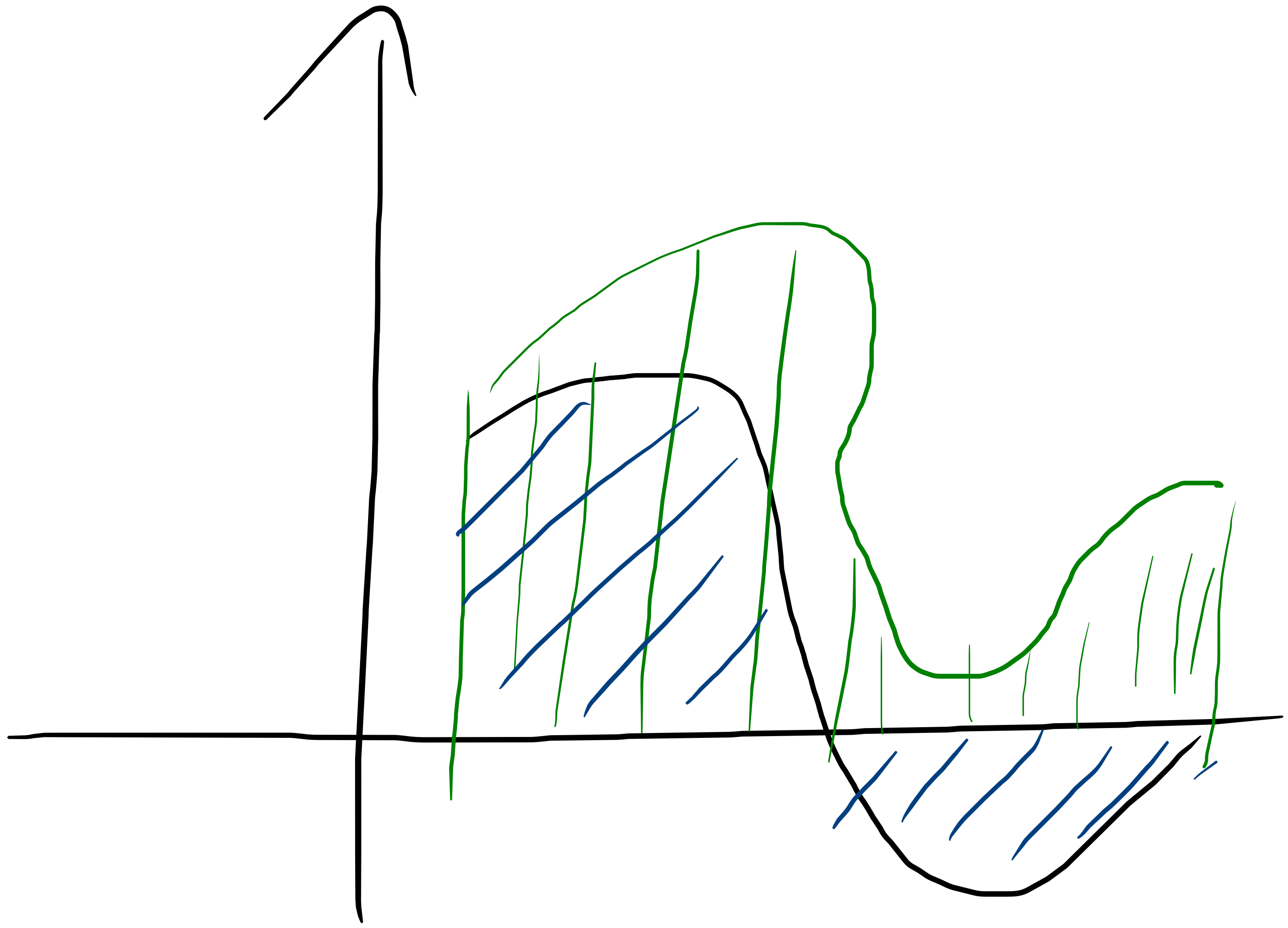
Pertanto

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M \cdot dx$$

Infatti in generale se $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in [a,b]$

e f, g Riemann integrabili

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx}$$



$$m\,(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{} \le \int_a^b M\,dx = M\cdot(b-a)$$

$b-a>0$ $\qquad [a,b]$ $\qquad \boxed{a<b}$

$\Downarrow$ dividendo per $(b-a)$ si ricava

$$\boxed{m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M}$$

Cioè

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$ è un numero

reale compreso fra m e M;

ricordiamo che f è continua in $\underline{[a,b]}$

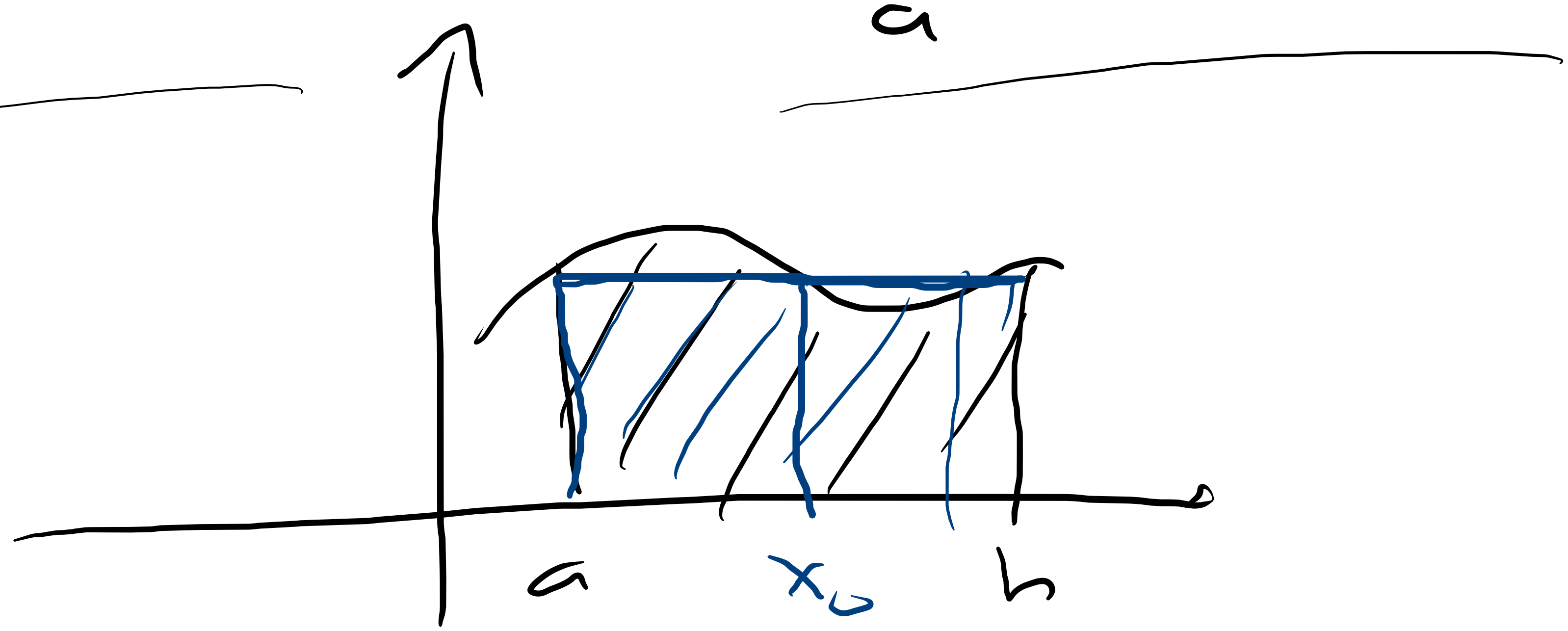
pertanto possiamo applicare il Teorema

dei Valori Intermedi. Ne segue che

esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che

$$\boxed{f(x_0) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}}$$ όπου

$$f(x_0)\cdot(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$



Teorema della Media Integrale

Sia f continua in $[a,b]$

Allora esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che

$$f(x_0)\cdot(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6n^3}\left(2n^3-3n^2+n\right) = 1/3$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6n^3}\left(2n^3+3n^2+n\right) = 1/3$$

Per il Teorema del confronto

$A = 1/3$.