SISTEMI DINAMICI

21 aprile 2021

Sistemi dinamici lineari

$\dot{x} = f(x) \longrightarrow \dot{x} = Ax$

$(\div)|i|$

Dinamico $\longrightarrow$ problema algebrico

determinare le proprietà di A.

L'esponenziale di una matrice.

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$T : E \to E$

$$e^T = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}}_{\text{deve convergere}}$$

$\|T\|$

$\hookrightarrow |T|^2$ "valori singolari"

$\|T\| = \alpha \geq 0$

$$\sum_k \left\| \frac{T^k}{k!} \right\| \leq \underline{\sum_k \frac{\alpha^k}{k!}}$$

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \implies e^T$$

Alcune proprietà

1) $$\exp(PTP^{-1}) = P(\exp T)P^{-1}$$

usiamo $(PTP^{-1})^k = PT^kP^{-1}$

$(PTP^{-1})(PTP^{-1}) \cdots (\quad)$

$$P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{T^k}{k!}\right)P^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(PTP^{-1})^k}{k!}$$

la proprietà segue da $n \to \infty$

2) Assumiamo che $AB = BA$

$$[A, B] = 0 = AB - BA$$

allora $e^{A+B} = e^A e^B$

Infatti: visto che $AB = BA$ possiamo usare il teorema binomiale

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ AB=BA}}{=} A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Quindi:

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k}$$

$$= \sum_{0 \le k \le n < \infty} \frac{1}{k! \underbrace{(n-k)}_{\ell}!} A^k B^{\overbrace{n-k}^{\ell}}$$

$$\ell = n-k$$

$$k < n \to n-k = \ell > 0$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{\ell!} A^k B^{\ell}$$

$$= e^A e^B$$

↳ se $[A,B]=0$ $\quad e^{A+B} = e^A e^B$

3) questo implica $\to$ $e^{-A} = (e^{A})^{-1}$

$$\left(e^{A-A} = e^{A} e^{-A} \right)$$

4) $Tv = \lambda v \Rightarrow e^{T} v = e^{\lambda} v$

λ autovalore reale

$$e^{T} v = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{T^k}{k!} v \right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} v \right) = e^{\lambda} v$$

$$\left[T^k v = \underbrace{T \cdots T}\, v = \lambda^k v \right]$$

5) in modo simile $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$

$$e^{\Lambda} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n})$$

$$\left[\Lambda^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k \cdots \lambda_n^k) \right]$$

Commento Non lo useremo, ma

se $[A, B] = AB - BA \neq 0$, $\exists$ formula di Baker - Campbell - Hausdorff

$$e^{A} \cdot e^{B} = e^{C}$$

dove

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]]$$
$$- \frac{1}{12}[B, [A, B]] + \dots$$

$\lrcorner$

<u>Teorema</u> Sia $A \in Mat(n \times n; \mathbb{R})$, allora il problema ai dati iniziali

$$\begin{cases} \dot{x} = A x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ha l'unica soluzione $x(t) = e^{tA} x_0$

<u>Dim</u>

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h}$$

2) $\searrow$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{tA} e^{hA} - e^{tA}}{h}$$

$$= e^{tA} \lim_{h \to 0} \left(\frac{e^{hA} - I}{h} \right) =$$

$$= e^{tA} \cdot A$$

quindi $\frac{d}{dt} \left(\underbrace{e^{tA} x_0}_{x} \right) = A \underbrace{e^{tA} x_0}_{x}$

$$= A x$$

$x = e^{tA} x_0$ è soluzione

Supponiamo $y(t)$ soluzione

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-tA} y(t) \right) = -A e^{-tA} y(t) +$$

$$+ e^{-tA} A y(t) =$$

per ipotesi $\frac{d}{dt} y = A y$

$$= \left(-A e^{-tA} + e^{-tA} A \right) y(t) = 0$$

$$e^{-tA} A = A e^{-tA}$$

quindi $e^{-tA} y(t) = \text{costante} =: y_0$

$\hookrightarrow$ $y(t) = e^{tA} y_0$

Imponiamo condizioni iniziali

$$y(t=0) = x_0 = \left(e^{tA} y_0\right)\Big|_{t=0} = y_0$$

$$\to \quad y(t) = e^{tA} x_0 = x(t)$$

$\blacksquare$

$$\begin{cases} \dot{x}_j = y_j \\ \dot{y}_j = -\omega_j^2 x_j \end{cases} \quad j=1,2 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_i = \omega_i y_i \\ \dot{y}_i = -\omega_i x_i \end{cases} \quad i=1,2$$

$$\uparrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -\omega_1^2 & 0 & & 0 \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & -\omega_2^2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & \omega_1 & & 0 \\ -\omega_1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & \omega_2 \\ 0 & & -\omega_2 & 0 \end{array}\right)$$

$$T^{-1} A T$$

$$\uparrow$$

$T = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$

autovettori

autovalori di questa matrice

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_i^2 & -\lambda \end{pmatrix} \to \lambda^2 = -\omega_i^2$$

$$\lambda_i = \pm i \omega_i$$

$$\alpha \pm i\beta \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Seconda parte

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(t=0) = x_0 \end{cases} \longrightarrow \quad x(t) = e^{tA} x_0$$

abbiamo ancora imparare a calcolare e^{tA}. Supponiamo A abbia (k reali λ_i e $2m$ complessi coniugati $\alpha_i \pm i\beta_i$) autovalori

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & D_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D_m \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{t\lambda_k} & & & \\ & & & e^{tD_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e^{tD_m} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$e^{PtAP^{-1}} = P e^{tA} P^{-1}$$

$$e^{TA} = P \begin{pmatrix} e^{T\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{TD_1} \\ & & & \ddots \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$e^{T\lambda}$$

λ numero

e^{TD} ?

Scriviamo $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \, id_{2\times 2} + \beta \sigma$

$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

dove $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

In particolare $[id, \sigma] = 0 = id\,\sigma - \sigma\, id$

$$e^A = \sum_n^\infty \frac{A^n}{n!} \longrightarrow id^k, \quad \sigma^k$$

$$\sigma \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -id$$

$$\sigma \cdot \sigma \cdot \sigma = \sigma \cdot (-id) = -\sigma$$

$$\sigma^4 = \sigma \cdot \sigma \cdot \sigma \cdot \sigma = \sigma \cdot (-\sigma) = -(-id) = +id$$

$$e^{T\sigma} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\sigma)^n}{n!} =$$

$$= id \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j}}{(2j)!} + \sigma \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j t^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$\overset{\tau}{\cos t} \qquad\qquad \sin\tau$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\tau & \sin\tau \\ -\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}$$

$$e^{\tau D} = e^{\tau\alpha\, id}\; e^{\tau\beta\sigma} = e^{\tau\alpha} \begin{pmatrix} \cos\beta\tau & \sin\beta\tau \\ -\sin\beta\tau & \cos\beta\tau \end{pmatrix}$$

Decomposizione semi semplice - idempotente

$T : \underset{\mathbb{R}^n}{E} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^n}{F}$. Autovettore è

$$v \in \ker(T - \lambda \mathbb{1})$$

$$(T - \lambda\mathbb{1})v = 0$$

Supponiamo che λ_k autovalore con molteplicità algebrica n_k.

Autospazio generalizzato

$$E_k = \ker\left((T - \lambda_k\mathbb{1})^{n_k}\right)$$

Autospazio generalizzato è invariante sotto l'azione di T

$$v \in E_j \Rightarrow Tv \in E_j$$

Infatti

$$(T-\lambda_k \mathbb{1})^{m_k} T v = 0$$

$$= (T-\lambda_k \mathbb{1})^{m_k} T v - \underbrace{(T-\lambda_k \mathbb{1})^{m_k} v}_{v \in E_j} \cdot \lambda_k$$

$$= (T-\lambda_k \mathbb{1})^{m_k} (T v - \lambda_k v)$$

$$= (T-\lambda_k \mathbb{1})^{m_k} (T-\lambda_k \mathbb{1}) \cdot v$$

$$= (T-\lambda_k \mathbb{1}) \underbrace{(T-\lambda_k \mathbb{1})^{m_k} v}_{} = 0$$

$v \in E_j \quad v \in \ker (T-\lambda_k \mathbb{1})^{m_k}$

$T v \in E_j$

<u>Teorema</u> (Decomposizione primaria)

$T: E \to E$, autovalori $\lambda_1 - \lambda_r$

allora $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$ dove

$\dim E_i =$ molteplicità algebrica di λ_i

<u>Dim</u> [Hirsch-Smale]

Conseguenza: autovettori generalizzati formano base di E_j

$P = [v_1 \dots v_n]$ è non singolare

e possiamo definire

$$S = P \Lambda P^{-1}$$

dove $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$

λ con molteplicità

una matrice di questo tipo (diagonalizzabile da una trasformazione di similitudine) si dice semi-semplice

$A \rightarrow \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_k)$, $\underline{S = P \Lambda P^{-1}}$

<u>Teo</u> Dato A, $S = P \Lambda P^{-1}$.

Definiamo $N = A - S$. Si dimostra che $[N, S] = 0$, e N è tale che

$N^k = 0$ (dove k è al più il max delle molteplicità dei λ)

<u>Teo</u> Esiste un'unica decomposizione

$A = S + N$ S semisemplice, $N^k = 0$

Per cui

$$e^{tA} = e^{tS} e^{tN} =$$

$$= P e^{t\Lambda} P^{-1} \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{(tN)^i}{i!} \right)$$

Stabilität