Lezione del 23 Aprile 2021

Presenti in Aula (per autodichiarazione)

- SM 6000713

$$\int_a^b f(x)\,dx$$ integrale definito della funzione f nell'intervallo $[a,b]$

Quando esiste, $\int_a^b f(x)\,dx$ è il numero reale che rappresenta l'estremo superiore delle approssimazioni per difetto dell'area (con segno) del sottografico di f e l'estremo inferiore delle approssimazioni per eccesso dell'area (con segno) del sottografico di f.

Una funzione per cui esiste

$\int_a^b f(x)\,dx$ si dice INTEGRABILE secondo

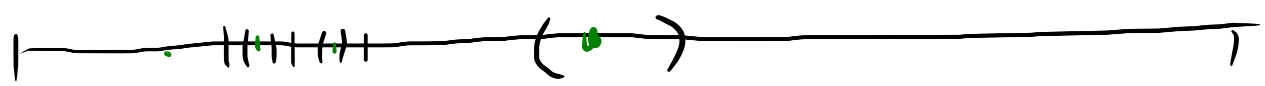
Riemann (o Riemann-integrabile) in $[a,b]$

Esempio di una funzione reale di variabile reale NON integrabile secondo Riemann

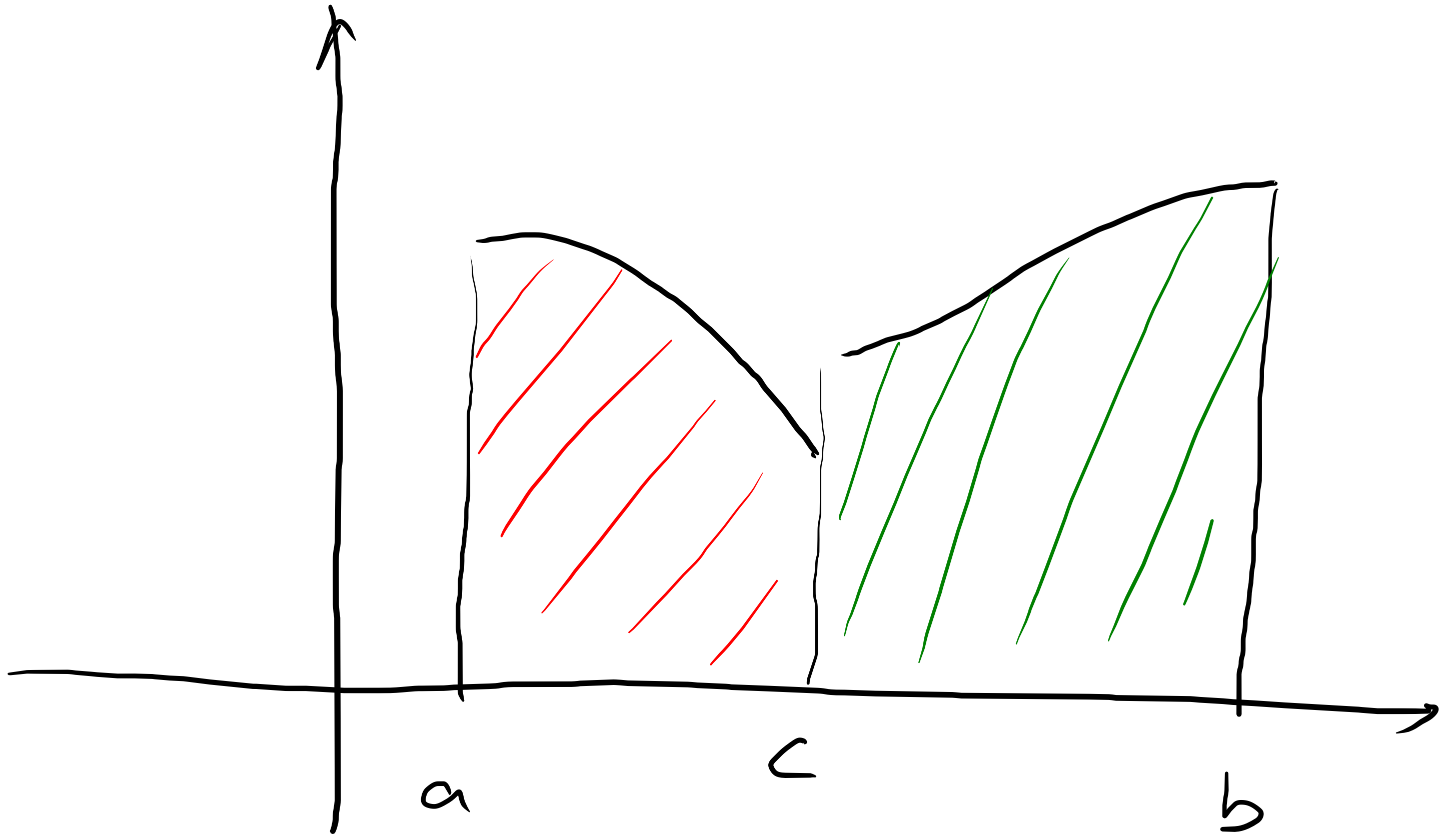
(Funzione di Dirichlet)

$[0,1]$ $\quad a=0 \quad b=1$

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x\in\mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 1 & \text{se } x\in\mathbb{R}_{\setminus\mathbb{Q}}\cap[0,1] \end{cases}$$



Questa funzione NON è continua (ci sono infiniti punti di discontinuità di tipo salto finito) e non è monotona



secondo Riemann

Condizioni sufficienti per l'integrabilità di f in $[a,b]$

(i) f sia continua in $[a,b] \setminus \{p_1, .., p_r\}$ e le discontinuità di f (in numero finito) sono di tipo salto finito.

(ii) f sia monotona (crescente o decrescente)

Proprietà dell'integrale definito

1) $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

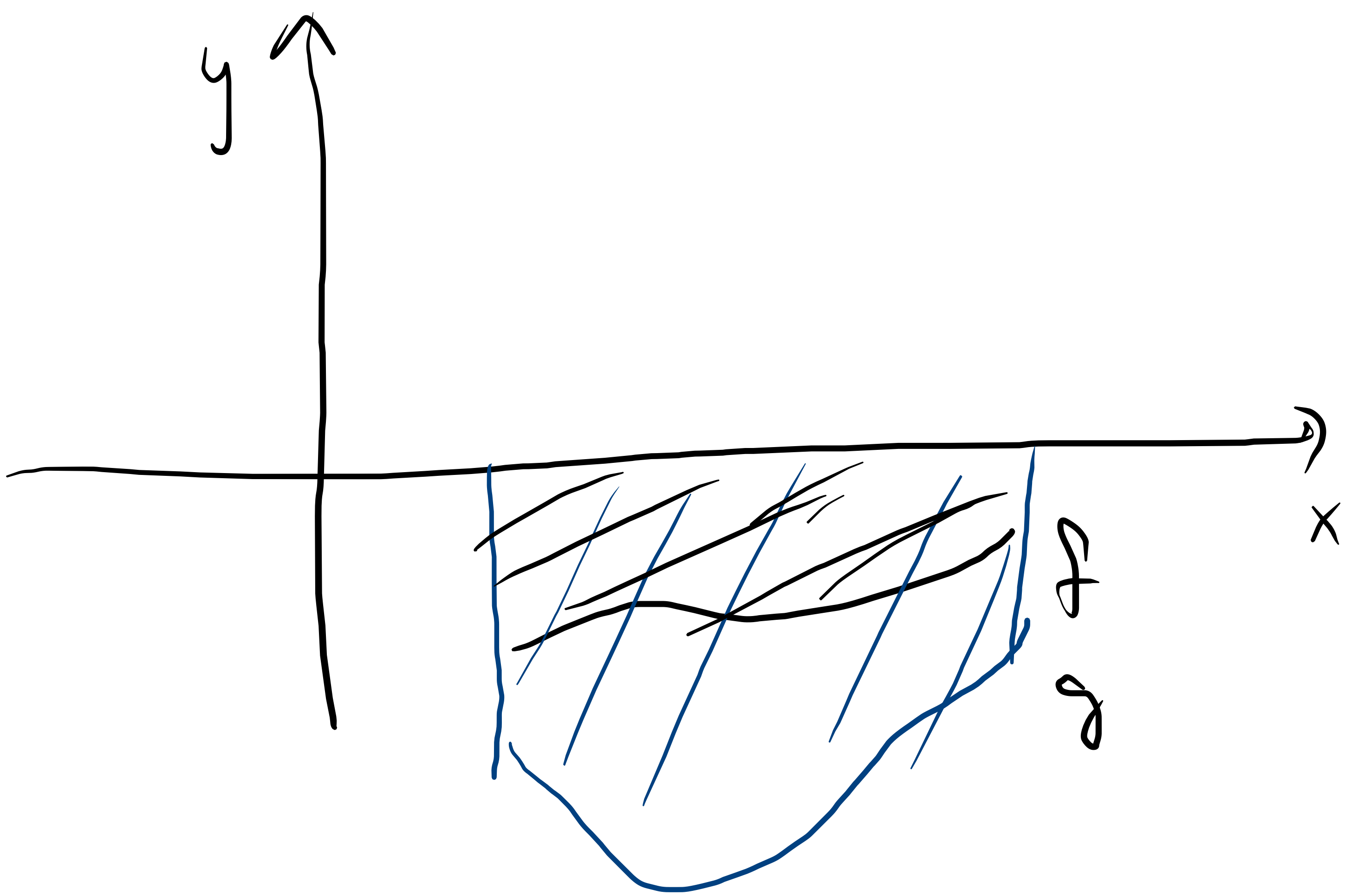
2) $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$a \le c \le b$

3) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4) Se $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a,b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

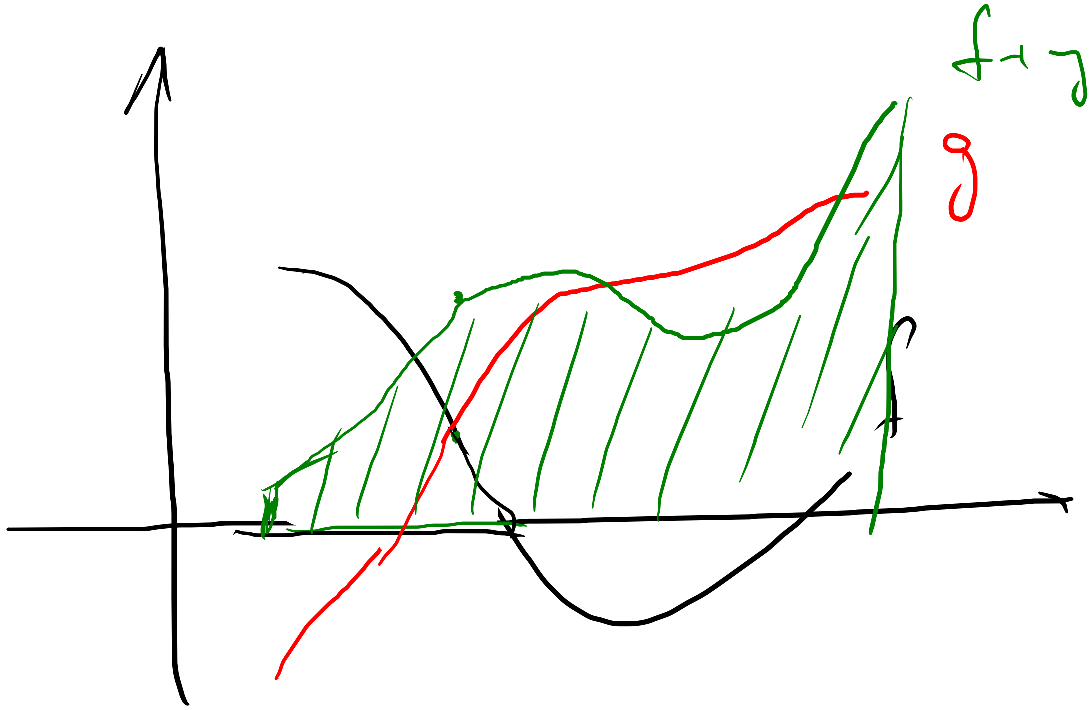


Linerarità dell'integrale

5) Se f e g sono Riemann integrabili in $[a,b]$, allora lo sono anche $f+g$ e in generale $kf+hg$ con $k, h \in \mathbb{R}$

e risulta

$$\int_a^b \left[h f(x) + k g(x)\right] dx = h \cdot \int_a^b f(x)\,dx + k \int_a^b g(x)\,dx$$

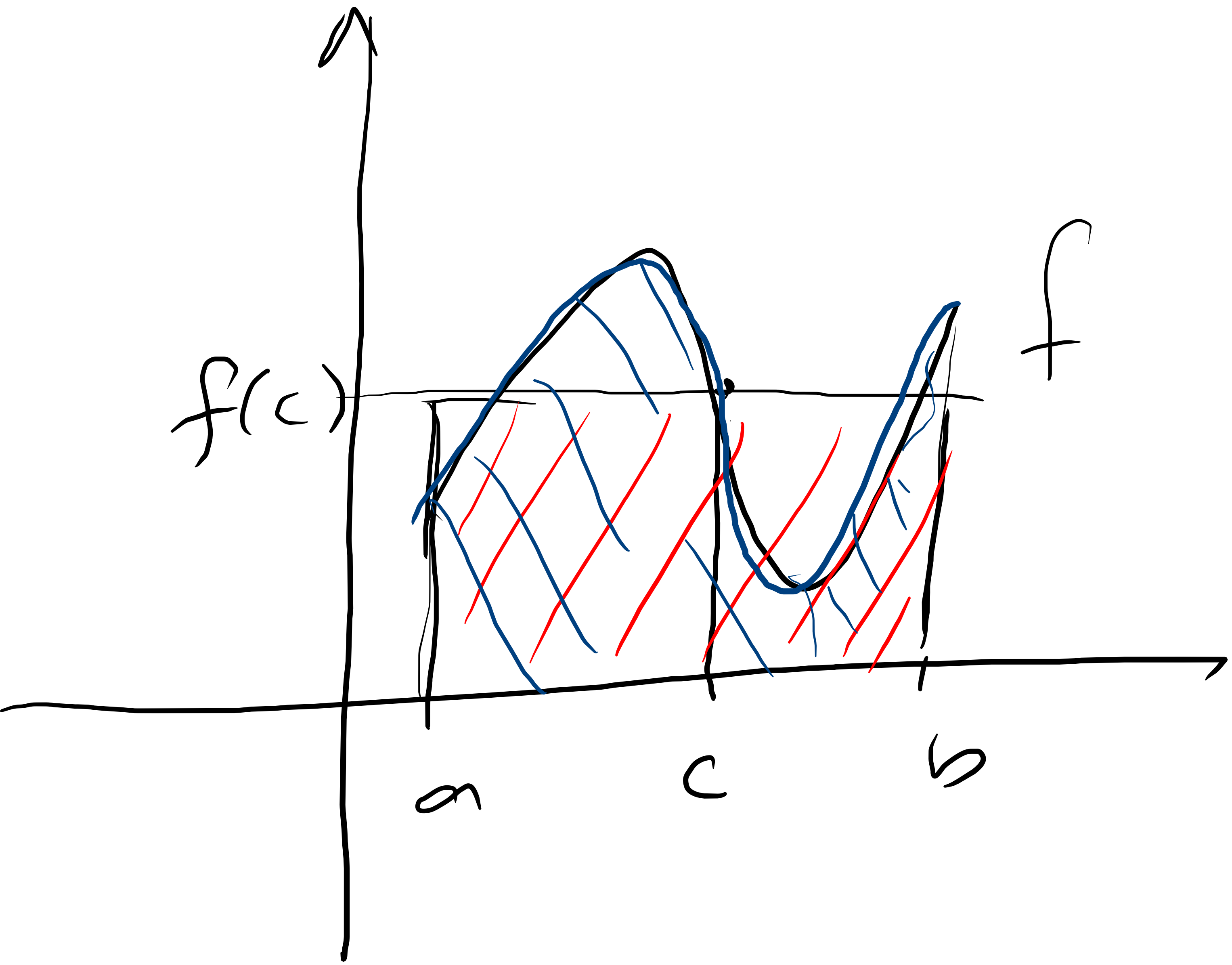


$$(f+g)(x) = \underline{f(x)+g(x)}$$

Teorema della Media Integrale

Sia f continua in $[a,b]$. Allora $\exists\, c \in [a,b]$ tale che

$$\boxed{f(c)\,(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx}$$



f(c)
f
a
c
b

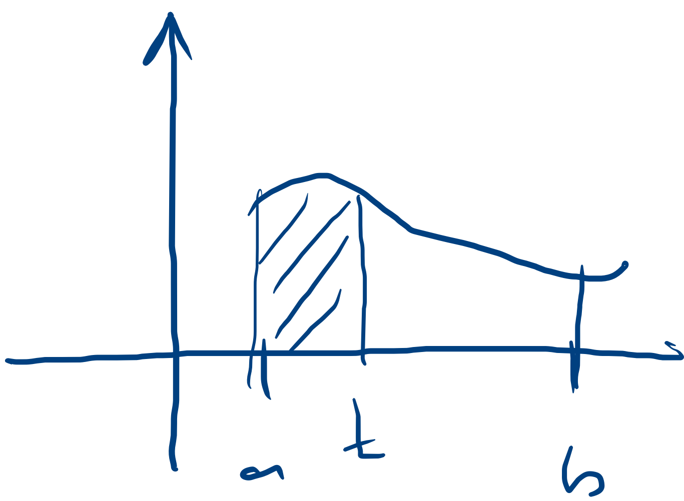
Consideriamo la funzione

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

Se f è continua in $[a,b]$, allora

F è ben definita in $[a,b]$

$$t \overset{F}{\longmapsto} \int_a^t f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$



Oss $F(a)=0$

Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale (Riemann - Torricelli Barrow)

F è una primitiva di f.

Dim

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

Anzitutto scriviamo il rapporto incrementale di F in t_0

$$\frac{F(t_0+h) - F(t_0)}{h} = \frac{\int_a^{t_0+h} f(x)\,dx - \int_a^{t_0} f(x)\,dx}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{\int_a^{t_0} f(x)\,dx} + \int_{t_0}^{t_0+h} f(x)\,dx - \cancel{\int_a^{t_0} f(x)\,dx}}{h}$$

$$\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h} =$$

$$= \frac{\int_{t_0}^{t_0+h} f(x)\,dx}{h}$$

$h>0$

f è continua in $[t_0, t_0+h]$ $\longrightarrow$ Applica il Teorema della Media Integrale di f in questo intervallo

$[t_0+h, t_0]$
$h<0$

$$\int_{\underset{\displaystyle a}{\parallel}\; t_0}^{t_0+h \;\parallel\; b} f(x)\,dx = \underline{f(\underbrace{x_0(h)})}\cdot(\underbrace{\cancel{t_0}+h}-\cancel{t_0})$$

$$b \quad - a$$

$$x_0(h) \in \begin{cases} \underline{[t_0, t_0+h]} & h>0 \\ [t_0+h, t_0] & h<0 \end{cases}$$

se $h>0$ $\quad t_0 \leq x_0(h) \leq t_0+h$

$\Longrightarrow$ se $h \to 0$ $\quad x_0(h) \to t_0$

se $h<0$ $\quad t_0+h \leq x_0(h) \leq t_0$ $\quad$ cioè $\lim\limits_{h\to 0} x_0(h) = t_0$

Poichè f è continua in $[a,b]$ e quindi in particolare in $[t_0, t_0+h] \subset [a,b]$

$$[t_0+h, t_0] \subset [a,b]$$

risulta
$$\lim_{h\to 0} f(x_0(h)) = f(t_0)$$
in quanto f è continua in t_0 e
$$\lim_{h\to 0} x_0(h) = t_0$$

Ricapitolando

$$\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h} = \dots = \frac{\int_{t_0}^{t_0+h} f(x)\,dx}{h} =$$

Teorema della Media Integrale

$$= \frac{f(x_0(h))\cdot(\cancel{t_0}+h-\cancel{t_0})}{h} =$$

$$= f(x_0(h))$$

Pertanto

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x_0(h)) = f(t_0)$$

Morale $\forall t_0 \in [a,b]$

esiste finito il limite del rapporto incrementale di F in t_0 e risulta che tale limite vale $f(t_0)$, ossia

F è derivabile in t_0 e $F'(t_0) =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{F(t_0+h) - F(t_0)}{h} = f(t_0)$$

cioè F è primitiva di f $\square$

Conseguenza

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

F è una primitiva di f

$G = F + c$ è anche primitiva di f

$F(a) = 0$

$$\boxed{F(b) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

$$G(a) = \underline{c} = F(a) + c$$
$$\parallel$$
$$0$$

$$G(b) = \int_a^b f(x)\,dx + c,$$
$$\parallel$$
$$F(b)$$

Se f è continua in $[a,b]$

allora

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)}$$

ove G è una generica primitiva di f.

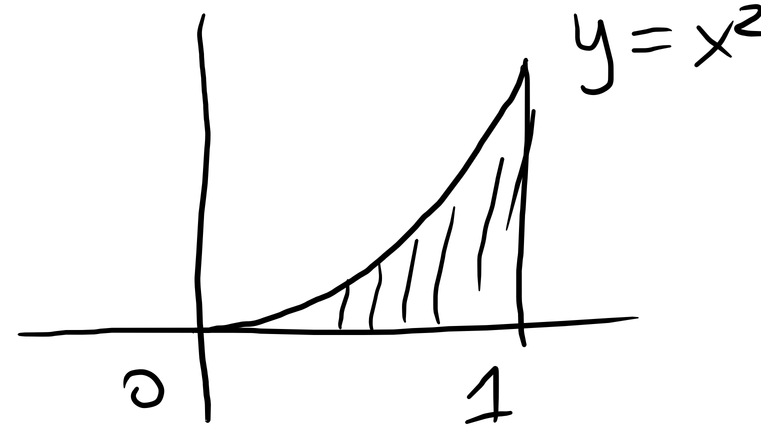
Notation

$$G(b) - G(a) = \Big[G(x) \Big]_a^b$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

Esempi

$$\int_0^1 x^2\,dx = 1/3$$



Usando la Formula appena mostrata

$$\int x^2\,dx = \left\{ \frac{x^3}{3} + C \;,\; C \in \mathbb{R} \right\}$$

$$G(x) = \frac{x^3}{3} + 1$$

$$\int_0^1 x^2 dx = G(1) - G(0) = \frac{1}{3} + \cancel{1} - \frac{0}{3} - \cancel{1} = 1/3$$

$G(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ è una primitiva di $f(x) = x^2$

Es

$$\int_{-2}^{1} \underline{(2x^2 - 3x + 1)}\, dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x \right]_{-2}^{1}$$

continua

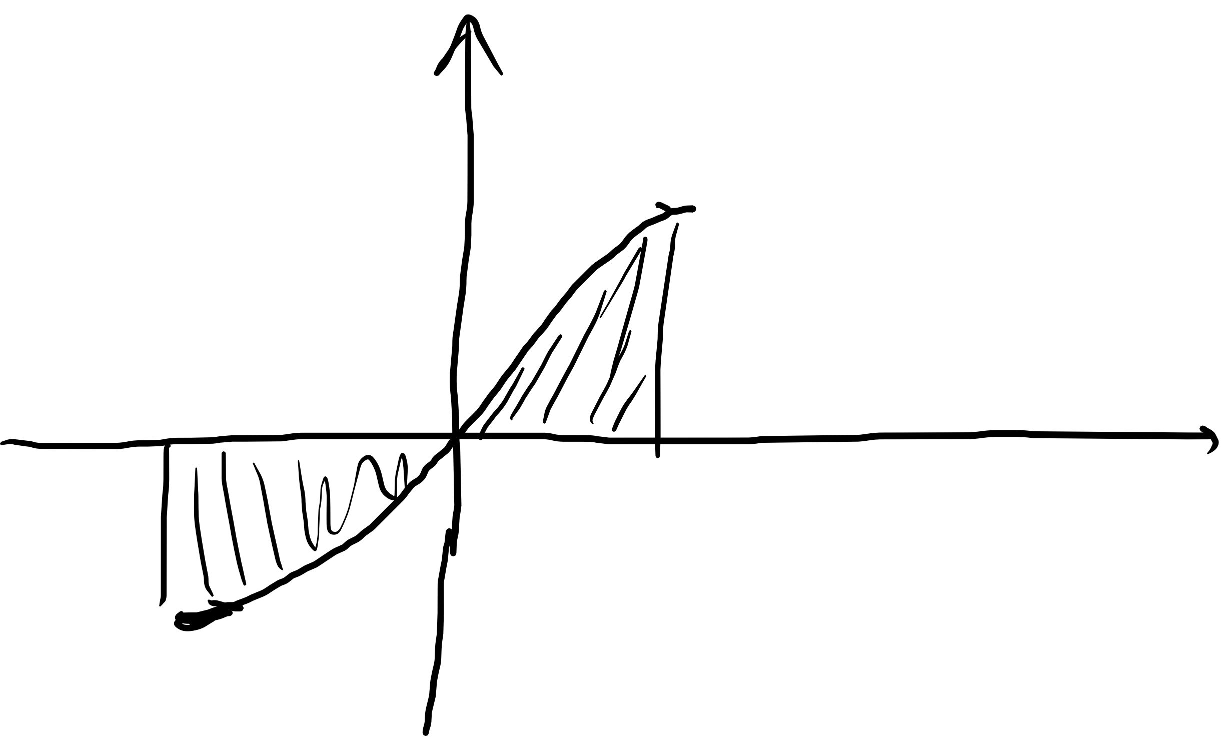
$$= \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1 - \frac{2}{3}(-2)^3 + \frac{3}{2}(-2)^2 + 2$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1 + \frac{16}{3} + 6 + 2 = \frac{27}{2} \checkmark$$

$$\int (2x^2 - 3x + 1)\, dx = \left\{ \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + C \quad C \in \mathbb{R} \right\}$$

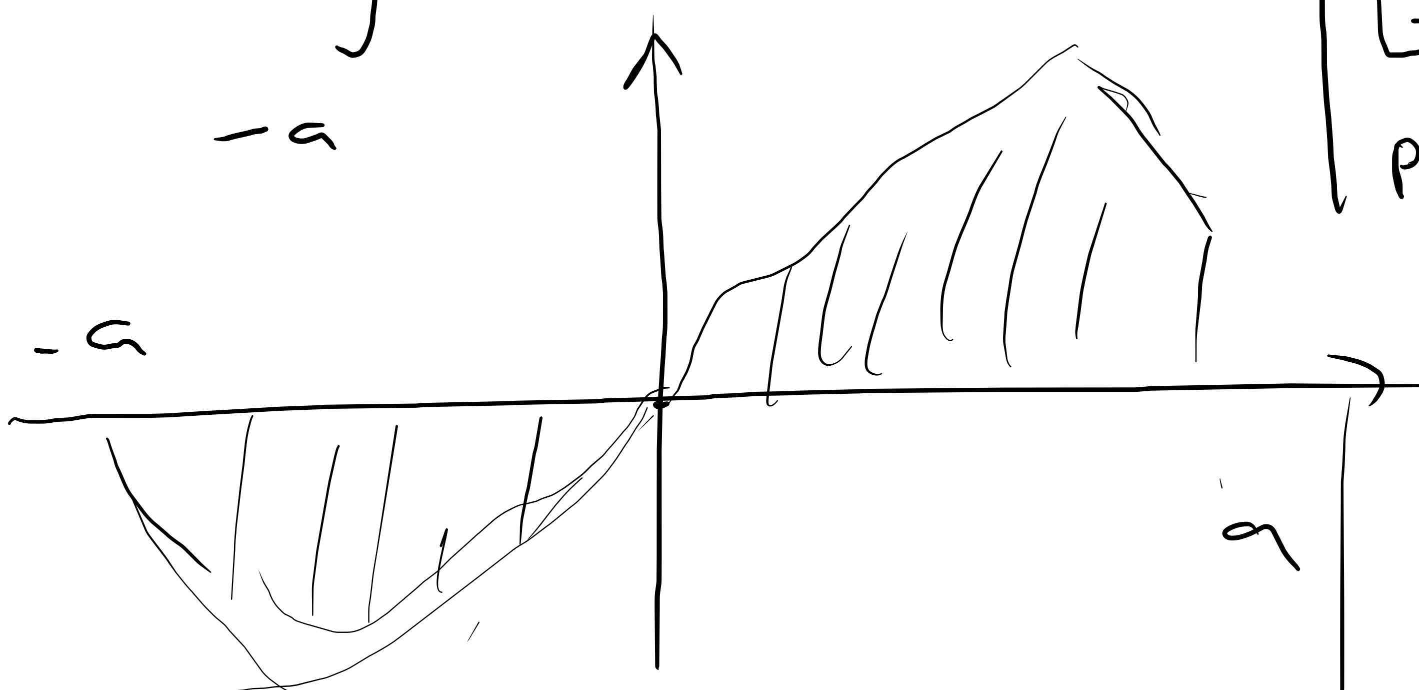
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx = \Big[-\cos x \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= 0 + \underbrace{\cos\left(-\pi/2\right)}_{0} = 0$$



In generale se f è una funzione continua e dispari, allora

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$



Infatti se f è continua e dispari in $[-a,a]$, ogni F primitiva di f è **pari** in $[-a,a]$, ossia

$$F(-a) = F(a)$$

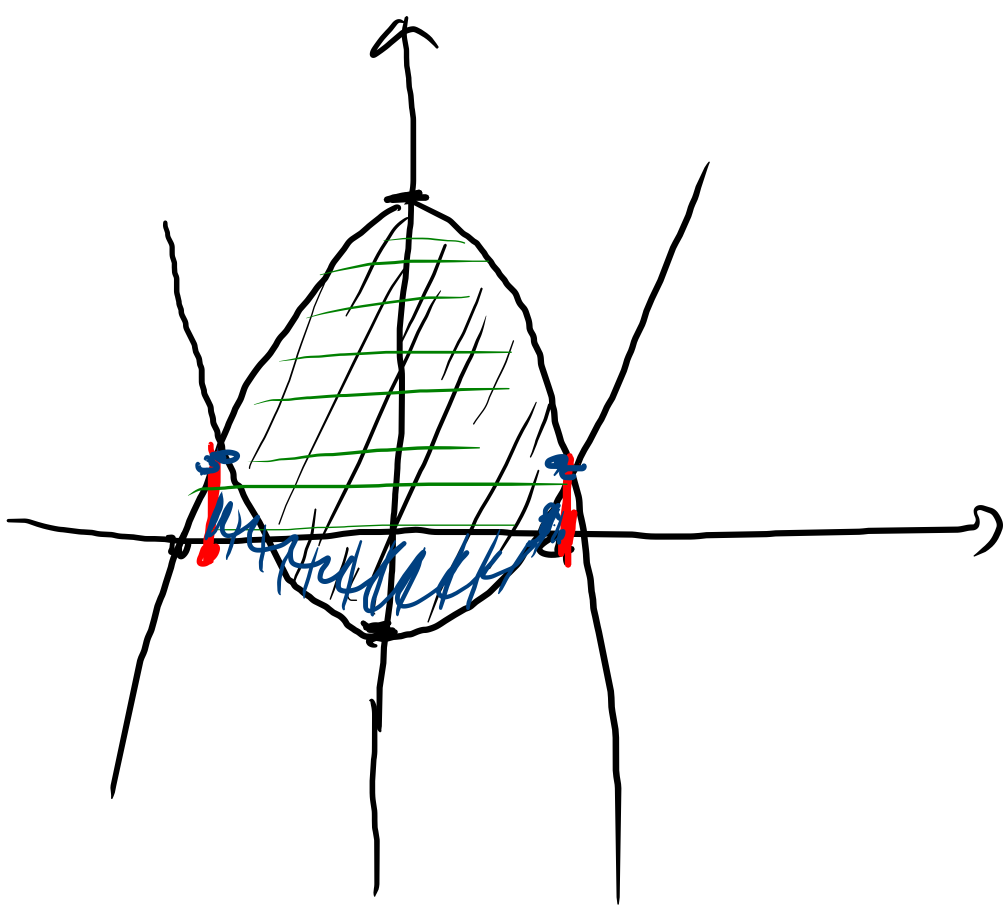
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = F(a) - (F(-a)) = 0 \checkmark$$

Esercizio

Calcolare l'area della regione di piano compresa fra le parabole di equazioni

$$y = 8 - 2x^2$$

$$y = -1 + 2x^2$$



Anzitutto cerchiamo i punti di intersezione delle 2 parabole

$$\begin{cases} y = 8 - 2x^2 \\ y = -1 + 2x^2 \end{cases}$$

$$2y = 7 = 8 - 1 - 2x^2 + 2x^2$$

$$y = 7/2 \Rightarrow \quad x_1 = 3/2 \quad x_2 = -3/2$$

$$\frac{7}{2} = -1 + 2x^2$$

$$\frac{7}{2} + 1 = 2x^2$$

$$\frac{9}{2} = 2x^2$$

$$\boxed{\frac{9}{4} = x^2}$$

Il nostro problema si riduce al calcolo

$$\int_{-3/2}^{3/2} (8 - 2x^2)\, dx - \int_{-3/2}^{3/2} (-1 + 2x^2)\, dx$$

Proprietà di linearità dell'integrale definito

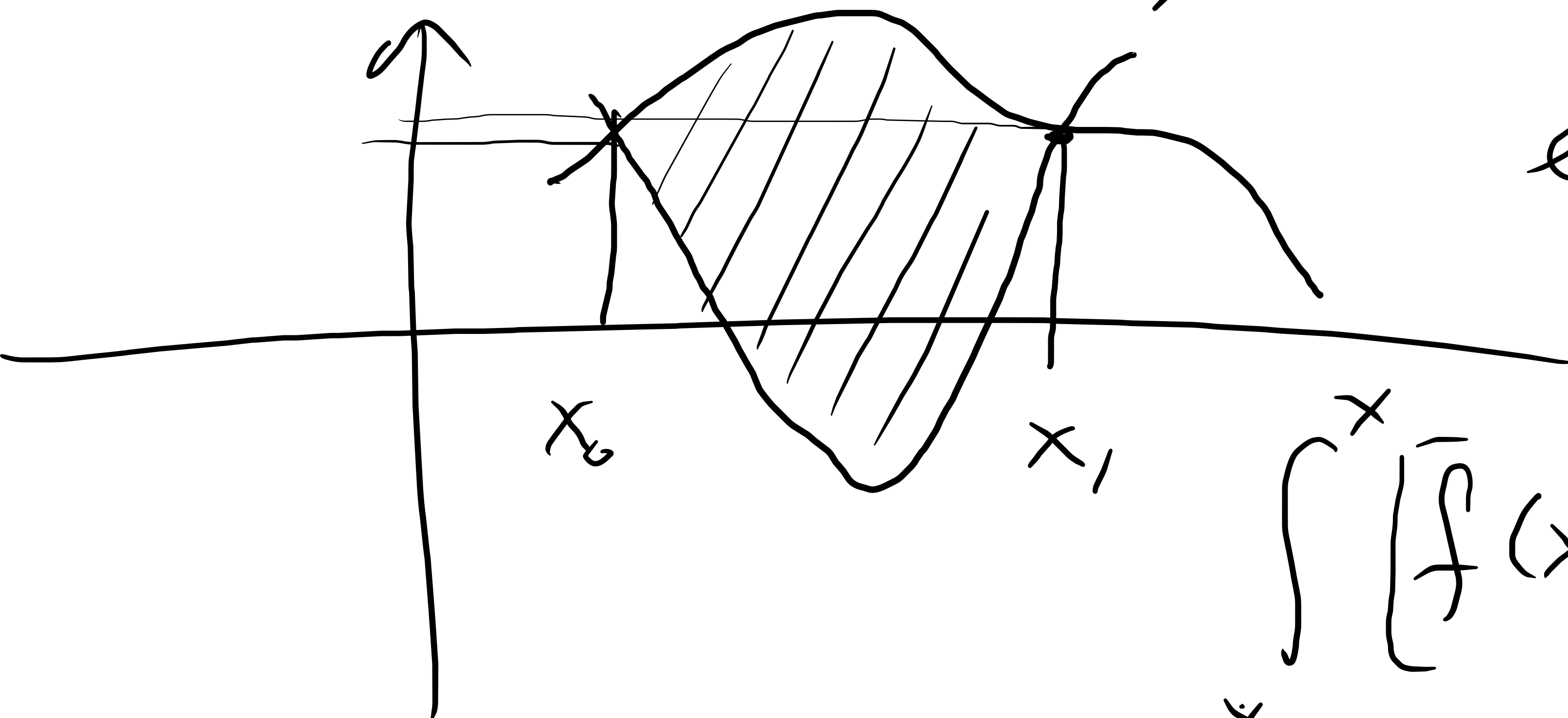
$$= \int_{-3/2}^{3/2} (8 - 2x^2 + 1 - 2x^2)\, dx = \int_{-3/2}^{3/2} (9 - 4x^2)\, dx =$$

$$\int_{-3/2}^{3/2} (9-4x^2)\,dx = \left[9x - \frac{4}{3}x^3\right]_{-3/2}^{3/2} =$$

$$= 9\cdot\frac{3}{2} - \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\overset{9}{\cancel{27}}}{\underset{2}{\cancel{8}}} - 9\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\left(-\frac{\overset{9}{\cancel{27}}}{\underset{2}{\cancel{8}}}\right) =$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{9}{2} + \frac{27}{2} - \frac{9}{2} = 27 - 9 = 18 \quad ✓$$

In generale l'area della regione delimitata dai grafici di f ed g (che si incontrano in $(x_0, f(x_0)=g(x_0))$ e $(x_1, f(x_1)=g(x_1))$ è data da



$$\int_{x_0}^{x} \left[f(x) - g(x) \right] dx$$