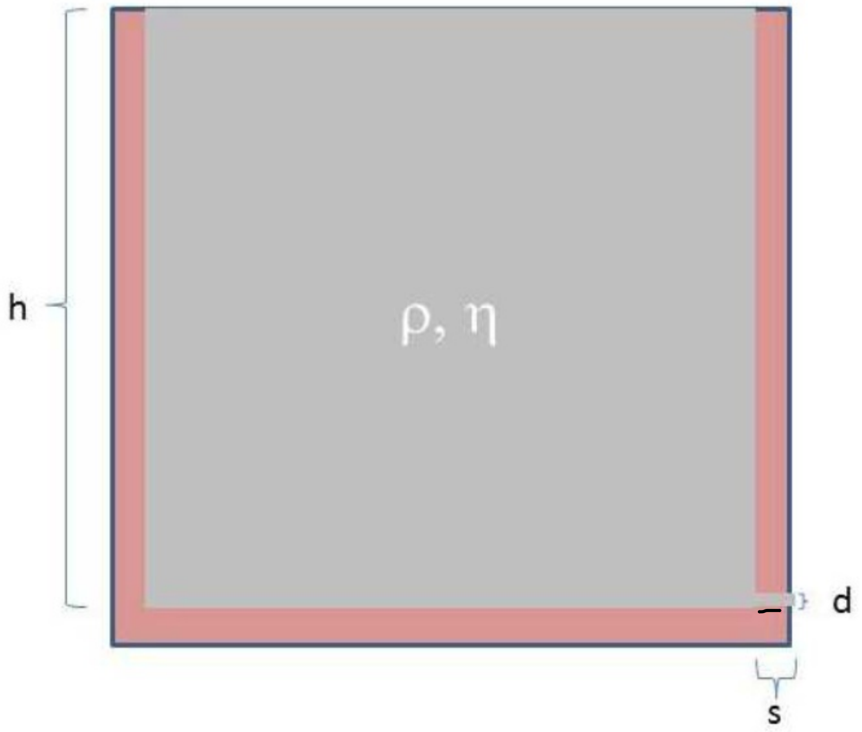
ESERCITAZIONE 23/04/2021

FLUIDODINAMICA, IL RITORNO

LIQUIDI VISCOSI

4) Un grosso serbatoio è pieno, fino ad una altezza $h = 2.50$ m, di gasolio (densità $\rho = 860$ kg/m^3, viscosità $\eta = 0.180$ Pa s). Lo spessore delle pareti del serbatoio è $s = 5.00$ cm. Se viene praticato un foro di diametro $d = 0.75$ cm alla base del serbatoio, come illustrato in figura, quale sarà la portata del flusso iniziale di uscita del gasolio?



$$Q = \frac{\pi}{8} \frac{r^4}{\eta} \frac{\Delta p}{s}$$

$h = 2{,}5 \ m$

$\rho = 860 \ kg/m^3$

$\eta = 0{,}180 \ Pa \ s$

$s = 5 \ cm = 0{,}05 \ m$

$d = 2r = 7{,}5 \times 10^{-3} \ m$

$r = 3{,}75 \times 10^{-3} \ m$

$$P = P_0 + \rho g h \qquad \text{(STEVINO)}$$

$$\Delta P = \rho g h$$

$$Q = \frac{\pi}{8} \frac{r^4}{\eta} \frac{1}{s} \rho g h = \frac{\pi}{8} \frac{(0{,}375 \times 10^{-2})^4 \ m^4}{0{,}18 \ Pa \cdot s}$$

$$\cdot \ 0{,}86 \ 10^3 \ kg/m^3 \ 9{,}81 \ \frac{m}{s^2} \ 2{,}5 \ \frac{1}{5 \cdot 10^{-2} \ m}$$

$$= \frac{\pi}{8} \frac{1{,}978 \ 10^{-10}}{0{,}18} \ \frac{0{,}86 \ 9{,}81 \ 2{,}5}{5} \ 10^3 \ \frac{m^2}{s}$$

$$= 0{,}182 \times 10^{-3} \ \frac{m^3}{s} = 0{,}182 \ \frac{l}{s} \qquad 1 \ l = 1 \ dm^3$$

CAVERNE A CATERVE

4) Per verificare il sospetto che un campione di roccia abbia una cavità al suo interno, un geologo pesa il campione prima nell'aria e poi nell'acqua, trovando che il peso nell'aria è $k = 1.36$ volte il peso apparente nell'acqua. La roccia di cui è composto il campione ha una densità $\rho_r = 5.2\ \text{g/cm}^3$. Quanto vale il rapporto tra il volume della cavità ed il volume totale del campione?

PESO ARIA = $k \cdot$ PESO H_2O $\qquad k = 1.36$

$\rho_r = 5{,}2\ g/cm^3 = 5200\ kg/m^3$

$$r = \frac{\text{VOLUME CAVITÀ}}{\text{VOLUME CAMPIONE}} = \frac{V_a}{V_c}$$

$$\vec{P}_A = m\vec{g} \qquad\qquad P_A = mg$$

$$\longrightarrow$$

$$\vec{P}_W = m\vec{g} + \vec{S}_A \qquad\qquad P_W = mg - S_A$$

$$\frac{|\vec{P}_A|}{|\vec{P}_W|} = k = \frac{mg}{mg - S_A} \rightarrow mgk - S_A k = mg \qquad (1)$$

$m = \rho_r V_r$

$S_A = \rho V_c g \qquad\qquad V_c = V_r + V_a$

1) $mg = kmg - S_A k$

$$mg(1-k) = -S_A k \longrightarrow S = -mg\frac{(1-k)}{k} = \frac{mg(k-1)}{k} = \underline{\rho_r V_r g\left(\frac{k-1}{k}\right)}$$

$$\frac{S}{g} = \rho V_c \cancel{g} = \rho_r V_r \cancel{g}\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

$$\rho V_c = \rho_r (V_c - V_a)\left(\frac{k-1}{k}\right)$$ → DIVIDO AMBO I LATI PER $\rho_r V_c$

$$\frac{\rho}{\rho_r} = \left(1 - \frac{V_a}{V_c}\right)\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

$$\frac{\rho}{\rho_r}\frac{k}{k-1} = 1 - \frac{V_a}{V_c} \Rightarrow \frac{V_a}{V_c} = 1 - \frac{\rho}{\rho_r}\frac{k}{k-1} = 1 - \frac{1}{5.2}\frac{1.36}{1.36-1}$$

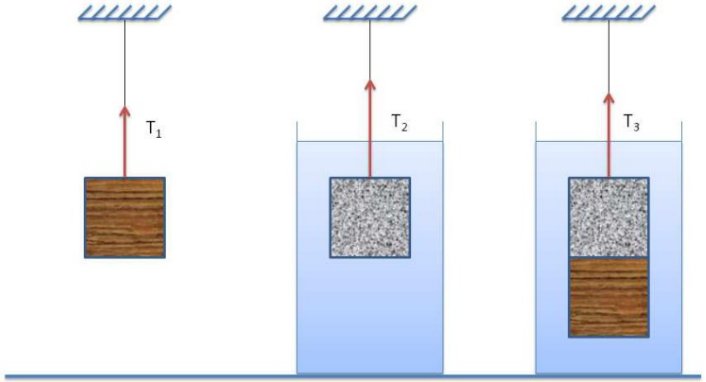
$$= 1 - 0{,}726 = 0.284$$

~~UOMO~~ BLOCCO IN MARE!

4) Un blocco di legno è tenuto sospeso, in aria, da una fune mediante una tensione $T_1 = 90$ N, mentre un blocco di granito, immerso in acqua, è tenuto sospeso da un'altra fune mediante una tensione $T_2 = 130$ N. Avendo legato i due blocchi tra di loro, ed avendoli immersi in acqua, si nota che il blocco così composto è tenuto sospeso da una terza fune mediante una tensione $T_3 = 100$ N. Si calcoli la densità del legno.

1 LEGNO

2 GRANITO



$T_1 = 90$ N

$T_2 = 130$ N

$T_3 = 100$ N

$$\begin{cases} \text{I} & T_1 = m g \\ \text{II} & m_2 g = T_2 + S_A \\ \text{III} & (m_1 + m_2) g = T_3 + S_1 + S_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 = \rho_1 V_1 \\ m_2 = \rho_2 V_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 = \rho V_1 g \\ S_2 = \rho V_2 g \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{I} & \rho_1 V_1 g = T_1 \\ \text{II} & \rho_2 V_2 g = T_2 + \rho V_2 g \\ \text{III} & (\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2) g = T_3 + \underbrace{\rho (V_1 + V_2) g} \end{cases}$$

$$g(\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2) = T_1 + T_2 + \rho V_2 g$$

$$(\mathrm{I} + \mathrm{II})$$

$$\mathrm{III} - (\mathrm{I} + \mathrm{II})$$

$$0 = T_3 + \rho V_1 g + \rho \cancel{V_2} g - T_2 - T_1 - \rho \cancel{V_2} g$$

$$V_1 g = \frac{T_1 + T_2 - T_3}{\rho}$$

$$\downarrow$$

$$\rho_1 V_1 g = T_1 \Rightarrow \rho_1 \left(\frac{T_1 + T_2 - T_3}{\rho} \right) = T_1$$

$$\rho_1 = T_1 \left(\frac{\rho}{T_1 + T_2 - T_3} \right) = 0{,}75 \times 10^3 \ \frac{kg}{m^3}$$

MONGOLFIERE E PALLONI

QUANTI METRI CUBI DI ELIO SONO NECESSARI A SOLLEVARE UN PALLONE AEROSTATICO CON UN CARICO DI 400 kg FINO AD $h = 8000$ m?
ASSUMIAMO CHE $\rho_{He} = 0.179$ kg/m^3, CHE IL PALLONE NON SI DEFORMI (VOLUME = c) e CHE

$$\rho_{AIR} = \rho_0 e^{-z/8000} \quad \text{CON } [z] = m \text{ e } \rho_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{AIR} = 1{,}2\, e^{-8000\,m/8000\,m} = 1{,}2\, e^{-1} \simeq 0.441 \frac{kg}{m^3}$$

PAY = PAYLOAD
= CARICO (400 kg)

$$\Sigma \vec{F}\Big|_{8000\,m} = 0$$

$$g M_{He} + M_{PAY}\, g - S_A = 0$$

$$V_{\substack{PALLONE\\+PAY}}\, \rho_{He}\, \cancel{g} + M_{\substack{PALLONE\\+PAY}}\, \cancel{g} - \rho_{AIR}\, V_{\substack{PALLONE\\+PAY}}\, \cancel{g} = 0$$

$$V_{PP}\, \rho_{He} + M_{PP} - \rho_{AIR} V_{PP} = 0$$

$$V_{PP} (\rho_{He} - \rho_{AIR}) = - M_{PP}$$

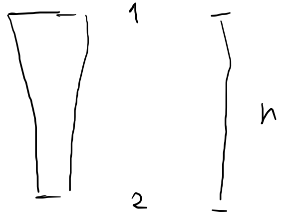
$$V_{PP} (\rho_{AIR} - \rho_{He}) = M_{PP} \Rightarrow V_{PP} = \frac{M_{PP}}{\rho_{AIR} - \rho_{He}} = \frac{400\ kg}{(0.441 - 0.179)\frac{kg}{m^3}}$$

$$= 1.52 \times 10^3\ m^3$$

ACQUA DAL RUBINETTO

L' ACQUA CHE ESCE DAL RUBINETTO È APPROSSIMABIE AD UN FLUIDO PERFETTO. ALL' USCITA, IL DIAMETRO DEL "TUBO" D'ACQUA È DI 0,96 cm.
IL FLUSSO D' ACQUA RIEMPIE UN BICCHIERE DI $V = 125\ cm^3$ IN 16.3 S

QUAL È IL DIAMETRO DEL TUBO 13 cm AL DI SOTTO DELL' USCITA DELL ACQUA?



$(d_1 = 2r = 0{,}96\ cm = 9{,}6 \times 10^{-3}\ m)$

$r = 4{,}8 \times 10^{-3}\ m$

$V = 125\ cm^3 = 1{,}25 \times 10^{-5}\ m^3$
$t = 16{,}3\ s$
$h = 13\ cm = 0.13$

- EQUAZIONE DI CONTINUITÀ $\rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow Q_1 = Q_2$

- $Q = \frac{V}{t}$

- 1) $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \cancel{p} + \rho g h$
  2) $\frac{1}{2}\rho v_2^2 + \cancel{p} + \cancel{\rho g h}$

$\frac{1}{2}\cancel{\rho} v_1^2 + \cancel{\rho} g h = \frac{1}{2}\cancel{\rho} v_2^2$

$v_2^2 = v_1^2 + 2gh$

$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh}$

$v_1 = \frac{Q}{S_1} = \frac{Q}{\pi R_1^2} = \frac{Q}{\pi r^2}$

$$v_2 = \sqrt{\left(\frac{Q}{\pi r^2}\right)^2 + 2gh} = 1,597 \ m/s$$

$$v_2 S_2 = v_1 S_1 \rightarrow S_2 = \frac{S_1 v_1}{v_2} = \frac{\cancel{S_1} Q}{\cancel{S_1} v_2} = \frac{Q}{v_2} = \left(\frac{V}{t}\right)\frac{1}{v_2} = 4,8 \times 10^{-7} \ m^2$$

$$S_2 = \pi r_2^2 \rightarrow r_2 = \sqrt{\frac{S_2}{\pi}} = 0,00123 \ m$$

$$d = 2 r_2 = 0,247 \ cm$$

RICORDO CHE $Q = \frac{V}{t} = \frac{1.25 \times 10^{-5} \ m^3}{16.3 \ s}$

CALCOLI ESPLICITI:

$$v_2 = \sqrt{\left(\frac{Q}{\pi r^2}\right)^2 + 2gh} = \sqrt{\left(\frac{1,25 \times 10^{-5} \ m^3}{\pi \cdot (4,8 \times 10^{-3} m)^2 \ 16,3 \ s}\right)^2 + 2 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} \ 0.13 \ m}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{\pi \ 16.3 \ s}\right)^2 \left(\frac{1,25 \times 10^{-5}}{4,8^2 \times 10^{-6}}\right)^2 + 2,55 \ \frac{m^2}{s^2}}$$

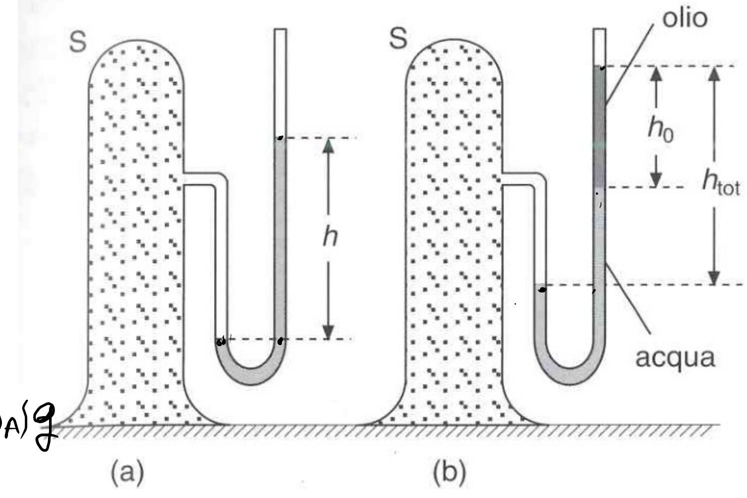
$$\simeq \sqrt{2,55 \ \frac{m^2}{s^2}} = 1,6 \ m/s \qquad (= 1,597 \ m/s)$$

MANOMETRI AD ARIA LIBERA, ED ALTRI MISTERIOSI STRUMENTI

UN SERBATOIO S CONTIENE UN GAS COLLEGATO CON UN MANOMETRO AD ARIA LIBERA, COME MOSTRATO IN FIGURA. IL MANOMETRO È RIEMPITO DI ACQUA e $h = 0.4$ m

_ DETERMINARE Δp TRA L'INTERNO DEL SERBATO E L'ESTERNO

VIENE POI VERSATO DELL'OLIO CON $\rho_o = 0.9$ g/cm^3. SAPENDO CHE $h_o = 0,25$ m, CALCOLARE IL DISLIVELLO COMPLESSIVO TRA I 2 RAMI DEL MANOMETRO



$P = P_0 + \rho g h$

$\rightarrow \Delta p = \rho g h = 3924$ Pa

$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2$

$\Delta p_1 = \rho_o h_o g$

$\Delta p_2 = \rho_A h_A g$

$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2 = (\rho_o h_o + \rho_A h_A) g$

$\Delta p = \rho_o h g + \rho_A h_A g$

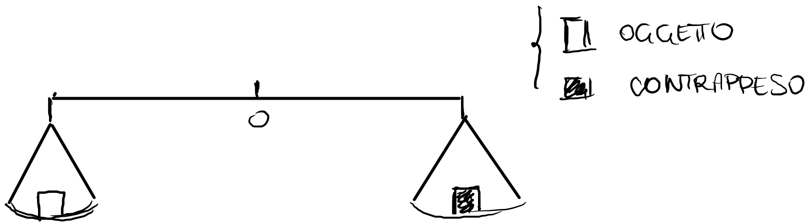
$$\frac{\Delta p - \rho_o h g}{\rho_A g} = h_a = \frac{(3924 - 2207{,}25)\ \text{Pa}}{1000\ \frac{kg}{m^3}\ 9{,}81\ m/s^2} = 17{,}5\ \text{cm}$$

$h = h_o + h_A = 25\ \text{cm} + 17{,}5\ \text{cm} = 42{,}5\ \text{cm}$

BILANCIA A BRACCI UGUALI, IL RITORNO

IL "VERO" PESO DI UN OGGETTO PUÒ ESSERE MISURATO NEL VUOTO, MENTRE IN PRESENZA DI ARIA LA SPINTA DI ARCHIMEDE INFLUENZA IL RISULTATO. UN OGGETTO CON MASSA V VIENE PESATO IN ARIA CON UNA BILANCIA A BRACCI UGUALI USANDO CONTRAPPESI CON DENSITÀ ρ.
SE ρ_{AIR} È LA DENSITÀ DELL'ARIA ED È NECESSARIO UN PESO IN MODULO F_g' DEI CONTRAPPESI PER AVERE EQUILIBRIO, MOSTRARE CHE IL VERO PESO F_g È DATO DA

$$F_g = F_g' + \left(V - \frac{F_g'}{\rho g}\right)\rho_{AIR}\, g$$



I DUE BRACCI DELLA BILANCIA SONO UGUALI. COMINCIAMO COL RICHIEDERE LA CONDIZIONE DI STATICITÀ:

- $\sum \vec{F} = 0$
- $\sum \vec{M}_F = 0$ $\longrightarrow$ CI SERVE EFFETTIVAMENTE SOLO QUESTA

CALCOLO I MOMENTI RISPETTO AD O, FULCRO DELLA BILANCIA. CHIAMO S ED S' RISPETTIVAMENTE LA SPINTA DI ARCHIMEDE SUL CORPO E SUL CONTRAPPESO. AVRÒ ALLORA

$(P - S)\,l = (P' - S')\,l'$ CON P PESO DELL'OGGETTO E P' DEL CAMPIONE

(NON HO MESSO IL SENO PERCHÉ LE FORZE E I BRACCI SONO PERPENDICOLARI TRA LORO)

I BRACCI DELLA BILANCIA SONO UGUALI PER CUI $l = l'$

POSSO RISCRIVERE LA SPINTA DI ARCHIMEDE COME

$B = V\rho_A g$ $\qquad B' = V'\rho_A g$ CON V e V' VOLUMI DELL' OGGETTO e DEL CONTRAPPESO

RISCRIVO V' TRAMITE LA DENSITÀ: $V' = \frac{m'}{\rho}$

E MOLTIPLICO PER g:

$$V'g = \frac{m'g}{\rho} = \frac{P'}{\rho} \Rightarrow S' = \rho_A V'g = \frac{P'}{\rho}\rho_A$$

SOSTITUISCO NELL' EQUILIBRIO DEI MOMENTI

$$P - V\rho_A g = P' - P'\frac{\rho_A}{\rho}\left(\frac{g}{g}\right)$$

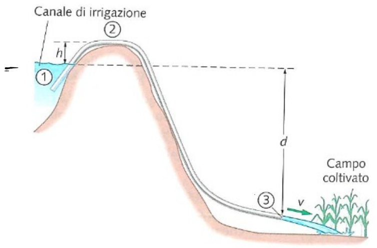
NECESSARIO PER OTTENERE LA SOLUZIONE PROPOSTA.

$$P = P' + \left(V - \frac{P'}{\rho g}\right)\rho_{AIR}\, g$$

CANALI DI IRRIGAZIONE

1) Un sifone artificiale è un dispositivo che permette all'acqua di fluire da un livello ad un altro. Il sifone mostrato in figura è costituito da un tubo a sezione costante che trasporta l'acqua da un canale di irrigazione fino ad un campo coltivato. Per rendere operativo il sifone, il tubo deve essere preventivamente riempito d'acqua, lungo tutta la sua lunghezza (ad esempio mediante una pompa). Dopo che il flusso è partito in questo modo, esso continua spontaneamente.
Nella situazione in figura, l'acqua esce dal sifone con velocità $v = 6.0$ m/s.

0 –



Con riferimento alla figura:
(1), (2) e (3) rappresentano 3 punti di riferimento collocati rispettivamente:
(1) *all'esterno* del tubo, in prossimità della superficie del canale.
(2) in corrispondenza della sezione del tubo nel punto più alto.
(3) in corrispondenza della sezione di uscita del tubo, alla sua estremità inferiore.

Trascurando l'eventuale moto dell'acqua nel canale e la viscosità dell'acqua, ed assumendo un flusso stazionario nel sifone:

a) Calcolare il dislivello in discesa d

i) d = ____________________ ii) d = ____________________

Un eccessivo dislivello in salita h può fermare il flusso dell'acqua nel sifone. In particolare, il flusso si ferma se nel punto (2) la pressione scende al valore critico $p_c = 2.3$ kPa.

b) Determinare il valore massimo di dislivello in salita, h_c, che porterebbe la pressione in (2) al valore critico p_c, bloccando il flusso nel sifone:

i) h_c = ____________________ ii) h_c = ____________________

a) 1) $\cancel{p_0} + \cancel{\rho g h} + \frac{1}{2}\cancel{\rho v^2}$ =

3) $\cancel{p_0} - \rho g d + \frac{1}{2}\rho v^2$

(*) $-\cancel{\rho} g d + \frac{1}{2}\cancel{\rho} v^2 = 0$

$v = \sqrt{2gd}$

$d = \frac{v^2}{2g} = \frac{(6\ m/s)^2}{2 \cdot 9{,}81\ \frac{m}{s^2}} = 1{,}84\ m$

b)
1 P_0
2 $P_c + \rho g h_c + \frac{1}{2}\rho v^2$
3 $P_0 - \rho g d + \frac{1}{2}\rho v^2$

$P_0 = P_c + \rho g h_c + \frac{1}{2}\rho v^2$ * $\frac{1}{2}v^2 = gd$

$P_0 = P_c + \rho g h_c + \rho g d$

$\rho h_c g = P_0 - P_c - \rho g d \rightarrow \boxed{h_c = \frac{P_0 - P}{\rho g} - d}$

$\cancel{1 \rightarrow P_0}$
$\cancel{2 \rightarrow P_c + \rho g h_c}$
$\cancel{3 \rightarrow P_0 - \rho g d}$