

CAPITOLO 2

Ottimizzazione delle funzioni di più variabili

È superfluo soffermarsi sull'importanza che la teoria dell'ottimizzazione ha acquisito nelle scienze applicate.

Il termine *ottimizzazione* si riferisce a un'ampia categoria di problemi. In economia è, per esempio, legato ai meccanismi decisionali finalizzati a ottenere il massimo (di utilità o di profitto) da una data quantità di beni o risorse; in meccanica, minimizzare l'energia potenziale di un sistema conservativo conduce a individuarne le posizioni di equilibrio stabile.

In generale si tratta di massimizzare o minimizzare un obiettivo la cui modellizzazione matematica dipende dalla natura del problema.

In questo capitolo l'obiettivo da ottimizzare sarà sempre una funzione reale di n variabili reali. Più precisamente affronteremo la questione della ricerca dei punti di massimo e/o di minimo di una funzione $f : \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 2$. Il caso $n = 1$ è già stato esaminato nel Capitolo 6, Volume 1.

La Sezione 1 è dedicata all'esame dei vari aspetti dell'ottimizzazione in generale e a un primo tipo di problema che consiste nella ricerca degli estremi interni al dominio X . Parleremo in questo caso di estremi *liberi*.

La ricerca di estremi di f ristretta a ∂X o a un sottoinsieme (non aperto) U di X rientra nei problemi di ottimizzazione *vincolata*.

In casi frequenti f è ristretta a un sottoinsieme di X che può essere descritto da un sistema di equazioni del tipo

$$g_j(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad \text{con} \quad m < n.$$

Parleremo allora di *ottimizzazione vincolata con vincoli di uguaglianza*, argomento della seconda sezione.

I due aspetti illustrati sopra possono essere considerati simultaneamente usando la teoria della *programmazione matematica*.

Un tipico problema di programmazione consiste nell'ottimizzare una funzione su un insieme definito da un sistema di disequazioni del tipo

$$\varphi_j(x_1, \dots, x_n) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m,$$

(vincoli di disuguaglianza). Nella Sezione 3 è presentata una breve introduzione ai principali risultati in questo importante settore della matematica moderna.

1. GENERALITÀ SULL'OTTIMIZZAZIONE. ESTREMI LIBERI

1.1 Esempi preliminari

Nell'introduzione abbiamo parlato di estremi liberi o vincolati. Prima di chiarire la distinzione attraverso definizioni precise, esaminiamo alcuni esempi.

Esempio 1.1 Tre punti \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_3 , disposti ai vertici di un triangolo acutangolo, devono essere collegati con un quarto punto, mediante un cavo, in modo da utilizzare meno materiale possibile. Dove deve essere collocato il punto \mathbf{p} ?

Introdotta un sistema di riferimento ortogonale nel piano dei tre punti, siano (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) le loro coordinate e (x, y) quelle di \mathbf{p} . (Fig. 2.1).

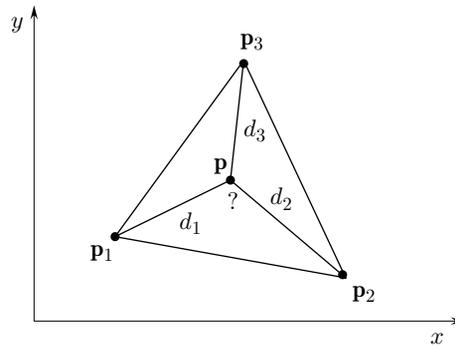


Figura 2.1. Dove deve essere collocato \mathbf{p} in modo da minimizzare $d_1 + d_2 + d_3$?

Posto $d_j(x, y) = |\mathbf{p} - \mathbf{p}_j| = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}$, ($j = 1, 2, 3$), si tratta di minimizzare la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^3 d_j(x, y),$$

somma delle distanze di \mathbf{p} dai tre punti dati.

In altri termini occorre determinare (x_0, y_0) in modo che $f(x_0, y_0) = \min f(x, y)$, al variare di (x, y) nell'aperto \mathbb{R}^2 .

È questo un problema di ricerca di *estremi liberi*, nel quale x e y variano in un aperto e sono pertanto libere di muoversi, almeno localmente, in ogni direzione.

Esempio 1.2 *Un problema isoperimetrico.* Fra tutti i parallelepipedi aventi superficie totale assegnata, $2A$, determinare quello di volume massimo.

Se si indicano con x, y, z le lunghezze degli spigoli del parallelepipedo, che possiamo supporre non degenerare, il problema è equivalente a massimizzare la funzione

$V(x, y, z) = xyz$ sull'ottante positivo di \mathbb{R}^3 definito da

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$$

sotto la condizione $xy + yz + zx = A$.

Si tratta di un problema di massimizzazione con vincoli di uguaglianza.

Esempio 1.3 *Problema della dieta.* Si supponga di avere a disposizione n tipi di cibo, A_1, \dots, A_n , ciascuno dei quali contenga m sostanze nutritive N_1, \dots, N_m .

Siano, per unità di peso:

a_{ij} = contenuto calorico della sostanza nutritiva N_j nell'alimento A_i ;

c_i = costo dell'alimento A_i ;

b_j = fabbisogno nell'organismo della sostanza N_j (per esempio, giornaliero)

per $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.

Il problema della dieta consiste nello scegliere la quantità x_i di cibo A_i , $i = 1, \dots, n$, in modo da minimizzare il costo totale sotto la condizione che la dieta sia sufficiente al fabbisogno di ogni sostanza.

Si tratta di minimizzare la funzione

$$C(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

dove le variabili x_1, \dots, x_n sono *non negative* e soggette alle m ulteriori condizioni seguenti:

$$\sum_{i=1}^n x_i a_{ij} \geq b_j \quad (j = 1, \dots, m).$$

È un tipico problema di programmazione, ovvero di *ottimizzazione in presenza di vincoli di disuguaglianza*.

In questo caso, essendo affini sia la funzione obiettivo sia i vincoli, il problema è di programmazione lineare.

1.2 Generalità sull'ottimizzazione

Formuliamo ora con precisione i concetti di estremo illustrati negli esempi precedenti.

Sia $f : \mathbb{R}^n \supseteq X \rightarrow \mathbb{R}$. Ricordiamo le definizioni di *estremo locale* (o *relativo*) e *globale* (o *assoluto*).

DEFINIZIONE 1.1 Un punto $\mathbf{x}^0 \in X$ si dice di massimo (minimo) locale per f se esiste un intorno $B_r(\mathbf{x}^0)$ tale che

$$(1.1) \quad f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0) \quad (f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^0))$$

per ogni $\mathbf{x} \in X \cap B_r(\mathbf{x}^0)$. Si dice di massimo (minimo) globale per f se (1.1) vale per ogni $\mathbf{x} \in X$.

Se, per $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$, nella (1.1) la disuguaglianza vale in senso stretto ($<$ anziché \leq o $>$ anziché \geq) il punto \mathbf{x}^0 è di massimo, (minimo) locale o globale, *forte*. Corrispondentemente il valore $f(\mathbf{x}^0)$ si dirà massimo (o minimo) locale o globale, eventualmente forte.

Se X è un aperto, gli eventuali estremi di f si dicono *liberi*. Più in generale la ricerca di estremi liberi consiste nell'individuare punti di estremo che siano *interni* al dominio X .

Supponiamo ora di essere interessati ai valori che f assume non in tutto X , bensì in un sottoinsieme $U \subset X$; in altri termini alla restrizione di f in U , $f|_U$. Per esempio, se X è chiuso, potrebbe essere $U = \partial X$.

Le definizioni precedenti si estendono subito a $f|_U$ pur di sostituire X con U .

Per esempio: \mathbf{x}^0 si dice punto di massimo locale per $f|_U$ se esiste $B_r(\mathbf{x}^0)$ tale che

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0) \quad \forall \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}^0) \cap U.$$

Si dice di massimo globale se

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0) \quad \forall \mathbf{x} \in U.$$

È ovvio che un estremo, di qualunque natura, per f è automaticamente un estremo della stessa natura per $f|_U$ mentre non è vero il viceversa.

Ci occuperemo dei casi in cui U è l'intersezione di X con un insieme definito da un sistema di uguaglianze del tipo

$$g_j(\mathbf{x}) = 0 \quad j = 1, \dots, m, \quad \text{con } m < n,$$

oppure da un sistema di disuguaglianze del tipo

$$h_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \dots, k.$$

Si parlerà allora di ricerca di *estremi condizionati* o *vincolati con vincoli di uguaglianza o di disuguaglianza*.

Esaminiamo ora brevemente quali questioni occorre in generale affrontare in un problema di ottimizzazione.

1) Esistenza

Le questioni di esistenza si presentano prevalentemente nella ricerca degli estremi globali. Negli Esempi 1.1-1.3 si cercano appunto minimo e massimo globali.

Per garantire l'esistenza di estremi globali può essere utile il teorema di Weierstrass: *se X è compatto ed f è continua in X allora f ha massimo e minimo (globali) in X .*

2) Unicità

Anche le questioni di unicità si presentano prevalentemente nell'ottimizzazione globale.

Supponiamo che $f(\mathbf{x}^0)$ sia il minimo globale¹ di f in X . Può essere utile sapere se il punto di minimo è *unico* o, in altre parole, che non vi siano altri punti \mathbf{x} tali che $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0)$.

¹Chiaramente il minimo globale ($= \min f(X)$) è *unico*.

Un ruolo importante a questo proposito è rivestito da eventuali proprietà di *convessità* del dominio X e/o della funzione stessa. Il seguente esempio è significativo, anche se geometricamente intuitivo.

Esempio 1.4 Sia X un *compatto convesso* in \mathbb{R}^2 e \mathbf{p} un punto *non* appartenente a X (Fig. 2.2).

Per $\mathbf{x} \in X$ definiamo

$$f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x} - \mathbf{p}|.$$

Cerchiamo il minimo di f in X , che equivale a determinare un punto di X (se esiste) a distanza minima da \mathbf{p} .

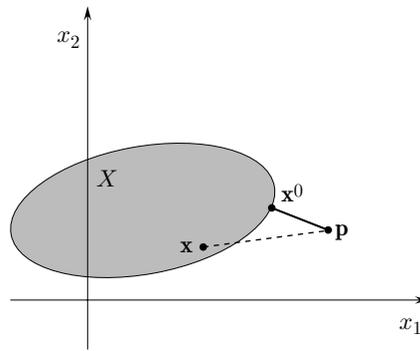


Figura 2.2. Ricerca del punto $\mathbf{x}^0 \in X$ di distanza minima da \mathbf{p} .

Osserviamo anzitutto che f è continua in X . Infatti, usando la proprietà 4. della norma (pag. 112, Vol. 1), si ricava, per ogni coppia di punti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$:

$$(1.2) \quad |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| = ||\mathbf{x} - \mathbf{p}| - |\mathbf{y} - \mathbf{p}|| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

La (1.2) mostra che $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \varepsilon$ implica $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon$, da cui segue la continuità di f .

La funzione f è inoltre convessa; infatti, usando la disuguaglianza triangolare, per ogni coppia di punti $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ e ogni $\alpha \in (0, 1)$, si ha:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} f(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) &= |\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} - \mathbf{p}| = |\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + (1-\alpha)(\mathbf{y} - \mathbf{p})| \leq \\ &\leq \alpha|\mathbf{x} - \mathbf{p}| + (1-\alpha)|\mathbf{y} - \mathbf{p}| \end{aligned}$$

con uguaglianza solo nel caso in cui $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ e $\mathbf{y} - \mathbf{p}$ siano linearmente dipendenti.

Dal teorema di Weierstrass si deduce che il minimo di f esiste, cioè esiste $\mathbf{x}^0 \in X$ tale che $|\mathbf{x}^0 - \mathbf{p}| = \min_{\mathbf{x} \in X} |\mathbf{x} - \mathbf{p}|$.

Il punto di minimo \mathbf{x}^0 non può essere interno a X ; se infatti lo fosse, muovendosi di poco da \mathbf{x}^0 verso \mathbf{p} lungo il segmento $[\mathbf{x}^0, \mathbf{p}]$, si rimarrebbe in X e la distanza da \mathbf{p} decrescerebbe.

Dunque $\mathbf{x}^0 \in \partial X$. Facciamo ora vedere che il punto di minimo è *unico*. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che esista un altro punto di minimo $\mathbf{x}^1 \in \partial X$.

Poniamo $|\mathbf{x}^0 - \mathbf{p}| = \mu$; essendo anche $|\mathbf{x}^1 - \mathbf{p}| = \mu$ i punti \mathbf{x}^0 , \mathbf{x}^1 e \mathbf{p} non possono essere allineati e perciò i vettori $\mathbf{x}^0 - \mathbf{p}$ e $\mathbf{x}^1 - \mathbf{p}$ sono *linearmente indipendenti*. Ciò

implica che se si pone $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ e $\mathbf{y} = \mathbf{x}^1$ nella (1.3), la disuguaglianza vale in senso stretto; in conclusione si avrebbe:

$$f(\alpha\mathbf{x}^0 + (1 - \alpha)\mathbf{x}^1) < \alpha\mu + (1 - \alpha)\mu = \mu$$

contro l'ipotesi che μ sia il minimo di f .

Il punto \mathbf{x}^0 si chiama *proiezione* di \mathbf{p} su X .

È interessante osservare che se X non è chiuso il minimo di f può non esistere mentre se X non è convesso potrebbero esservi più punti di minimo (Esercizio 1).

3) Caratterizzazione dei punti di estremo

La caratterizzazione dei punti di estremo avviene, come già nel caso unidimensionale, attraverso condizioni analitiche necessarie e/o sufficienti che tali punti devono soddisfare.

Lo strumento principale è il calcolo differenziale, sviluppato nel Volume 1, Capitolo 6. È così possibile, nella ricerca di estremi liberi, estendere al caso n -dimensionale teoremi come quello di Fermat o come il Teorema 3.5, pagina 293, sul riconoscimento della natura dei punti stazionari mediante la formula di Taylor.

Per quanto riguarda gli estremi vincolati svilupperemo il *metodo dei moltiplicatori di Lagrange* per il caso dei vincoli di uguaglianza e di *Kuhn-Tucker* per quelli di disuguaglianza

4) Algoritmi di calcolo

Qui si entra propriamente nel campo dell'Analisi Numerica.

Quando le variabili in gioco sono molte, la caratterizzazione di cui al punto 3 diventa quasi sempre inefficace dal punto di vista del calcolo effettivo. Si presenta dunque la necessità di costruire algoritmi efficienti che permettano di determinare con la voluta precisione i punti che interessano.

1.3 Estremi liberi. Condizioni necessarie

Nella ricerca degli estremi liberi possiamo supporre che X sia aperto.

Sia dunque $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, con X aperto di \mathbb{R}^n e \mathbf{x}^0 un estremo locale per f . Una condizione che \mathbf{x}^0 deve soddisfare si trova facilmente considerando il comportamento di f lungo le direzioni uscenti da \mathbf{x}^0 . Fissato \mathbf{v} , versore in \mathbb{R}^n , poniamo $g(t) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v})$.

La funzione g , reale di variabile reale, è definita in un intorno di $t = 0$, essendo \mathbf{x}^0 punto interno, e ha in $t = 0$ un punto di estremo. Se supponiamo che $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}^0)$ esista, ricordando la definizione di derivata direzionale e il teorema di Fermat, si conclude che $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}^0) = g'(0) = 0$.

Dunque:

■ **TEOREMA 1.1** *Se \mathbf{x}^0 è punto di estremo locale per f e $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}^0)$ esiste, allora $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}^0) = 0$.*

Immediato corollario è il seguente:

COROLLARIO 1.2 *Se f è differenziabile in \mathbf{x}^0 , punto di estremo locale per f , allora ogni derivata direzionale in \mathbf{x}^0 è nulla; in particolare $\nabla f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$.*

Ricordiamo che se f è differenziabile, un punto in cui il gradiente, o equivalentemente il differenziale, si annulla si dice *stazionario* o *critico*. Il corollario esprime il fatto che un punto di estremo locale *deve* essere *critico*.

Già sappiamo dallo studio delle funzioni reali di una variabile reale che la condizione espressa nel Teorema 1.1 o nel Corollario 1.2, non è in generale sufficiente per decidere se un punto \mathbf{x}^0 sia di estremo né tantomeno di quale tipo di estremo si tratti.

Si potrebbe pensare che se un punto \mathbf{x}^0 è critico per f ed è un punto di massimo (minimo) lungo *ogni* direzione uscente da \mathbf{x}^0 , ovvero punto di massimo (minimo) per $g(t) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{v})$ per ogni versore \mathbf{v} , allora è punto di massimo (minimo) locale per f . Il seguente esempio mostra che ciò è falso.

Esempio 1.5 Sia $f(x, y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4 = (y - x^2)(y - 2x^2)$.

La funzione ha un punto critico in $(0, 0)$ dove si annulla; infatti

$$\begin{aligned} f_x &= -6xy + 8x^3, & f_x(0, 0) &= 0 \\ f_y &= 2y - 3x^2, & f_y(0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Lungo ogni retta uscente da $(0, 0)$ f ha un minimo nell'origine.

Infatti, lungo l'asse y si ha $f(0, y) = y^2$ che è minima in $y = 0$.

Lungo le rette $y = mx$ si ha $f(x, mx) = m^2x^2 - 3mx^3 + 2x^4$ che, come si verifica subito, ha un minimo in $x = 0$ per ogni m .

D'altra parte $(0, 0)$ *non* è punto di minimo locale per f , in quanto la funzione cambia segno in *ogni* intorno circolare dell'origine o, in altri termini, in ogni intorno di $(0, 0)$, esistono punti in cui f è positiva, altri in cui è negativa.

La discussione precedente è visualizzata in Figura 2.3.

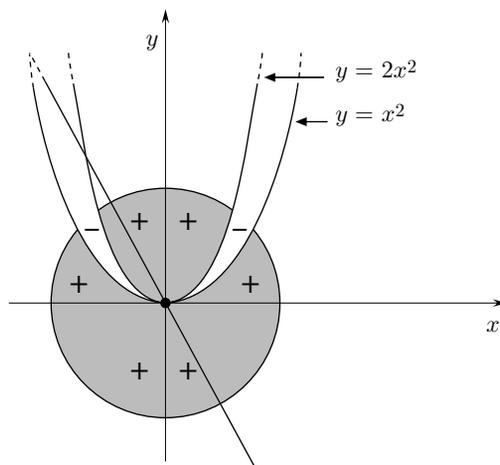


Figura 2.3. Nell'intorno circolare dell'origine i segni + o - indicano le zone di positività o negatività di f . Si noti come lungo ogni retta $y = mx$, f sia definitivamente positiva per $x \rightarrow 0$, mentre $f(0, 0) = 0$.

I punti critici come l'origine nell'Esempio 1.5 si chiamano punti di *sella* o di *colle*. Più precisamente un punto critico \mathbf{x}^0 si dice di *sella* o di *colle* se in *ogni* intorno di \mathbf{x}^0 esistono punti in cui f è maggiore di $f(\mathbf{x}^0)$ e punti in cui è minore di $f(\mathbf{x}^0)$.

Va osservato che a volte, per esempio nei testi di programmazione, il termine *sella* si riferisce a punti critici nei quali f è minima lungo alcune direzioni e massima lungo altre. In questo senso l'origine nell'Esempio 1.5 *non* è punto di sella. Un tipico punto di sella è l'origine per la funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$, il cui grafico (diagramma n. 44, Vol. 1) mostra anche quanto sia appropriata la terminologia.

Nella ricerca degli estremi liberi di f , il Teorema 1.1 opera dunque un primo filtro: gli estremi liberi in cui esiste il gradiente si trovano tra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Una volta determinati gli eventuali punti critici occorrono altre indagini per deciderne la natura.

Vale la pena di mettere subito in evidenza che per funzioni *convesse o concave* possono essere tratte conclusioni immediate:

PROPOSIZIONE 1.3 *Se \mathbf{x}^0 è un punto critico per una funzione f , convessa (concava) e differenziabile, allora \mathbf{x}^0 è punto di minimo (massimo) globale. Inoltre se f è strettamente convessa (concava) il punto di minimo (massimo) è unico e forte.*

Dimostrazione. Se f è convessa e differenziabile in \mathbf{x}^0 , per ogni $\mathbf{x} \in X$, si ha (Teor. 1.11, pag. 333, Vol. 1):

$$(1.4) \quad f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^0) + df(\mathbf{x}^0);$$

essendo \mathbf{x}^0 critico, $df(\mathbf{x}^0) = 0$ e perciò $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^0)$ per ogni $\mathbf{x} \in X$, da cui segue che \mathbf{x}^0 è punto di minimo globale. Se f è strettamente convessa, la (1.4) vale in senso stretto per ogni $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$, per cui \mathbf{x}^0 è di minimo globale forte e \mathbf{x}^0 è unico. \square

I pochi elementi sviluppati finora permettono già di risolvere il problema dell'Esempio 1.1.

Esempio 1.6 (Continuazione dell'Esempio 1.1).

Ricordiamo che la funzione da minimizzare è $f(x, y) = \sum_{j=1}^3 d_j(x, y)$ dove $d_j(x, y) = |\mathbf{p} - \mathbf{p}_j|$, distanza del punto \mathbf{p} dal punto \mathbf{p}_j . Nell'Esempio 1.4 abbiamo visto che la funzione distanza è convessa e perciò f , come somma di funzioni convesse, è pure convessa. Osserviamo poi che il minimo, se esiste, non può essere assunto nei vertici del triangolo, in particolare nel vertice comune ai due lati più corti. Infatti, sia, per esempio, \mathbf{p}_1 tale vertice e sia \mathbf{q} il piede della perpendicolare condotta dal vertice \mathbf{p}_2 al lato opposto. Allora è facile verificare che:

$$\begin{aligned} |\mathbf{q} - \mathbf{p}_2| + |\mathbf{q} - \mathbf{p}_1| + |\mathbf{q} - \mathbf{p}_3| &= |\mathbf{q} - \mathbf{p}_2| + |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3| < \\ &< |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2| + |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3| \end{aligned}$$

e quindi \mathbf{p}_1 non può essere punto di minimo globale.

I vertici del triangolo sono gli unici punti dove f non è differenziabile; per quanto appena osservato possiamo limitarci a considerare gli altri.

Cerchiamo i punti critici annullando il gradiente di f . Si trova il sistema

$$(1.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x-x_1}{d_1} + \frac{x-x_2}{d_2} + \frac{x-x_3}{d_3} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y-y_1}{d_1} + \frac{y-y_2}{d_2} + \frac{y-y_3}{d_3} = 0. \end{cases}$$

Per risolverlo notiamo che le coppie $(\frac{x-x_1}{d_1}, \frac{y-y_1}{d_1})$, $(\frac{x-x_2}{d_2}, \frac{y-y_2}{d_2})$, $(\frac{x-x_3}{d_3}, \frac{y-y_3}{d_3})$ sono rispettivamente le componenti dei vettori

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}_1}{d_1}, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}_2}{d_2}, \quad \mathbf{w}_3 = \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}_3}{d_3}$$

che hanno modulo *unitario*, poiché $|\mathbf{w}_j| = \frac{|\mathbf{p} - \mathbf{p}_j|}{d_j} = \frac{d_j}{d_j} = 1$. Il sistema (1.5) è allora equivalente all'equazione vettoriale

$$(1.6) \quad \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 = \mathbf{0}.$$

Ora, 3 *versori* in \mathbb{R}^2 possono avere per somma il vettore nullo solo se i punti corrispondenti sono disposti ai vertici di un triangolo equilatero, ovvero se l'angolo che ciascuno di essi forma con ciascuno degli altri è di $2\pi/3$, (Fig. 2.4a).

Esiste un solo punto \mathbf{p} , che risulta interno al triangolo, tale che i segmenti $[\mathbf{p}, \mathbf{p}_j]$ formino tra loro angoli di $2\pi/3$. Dunque esiste un solo punto critico per f . Essendo f convessa, in base alla Proposizione 1.3, esso è (l'unico) punto di minimo.

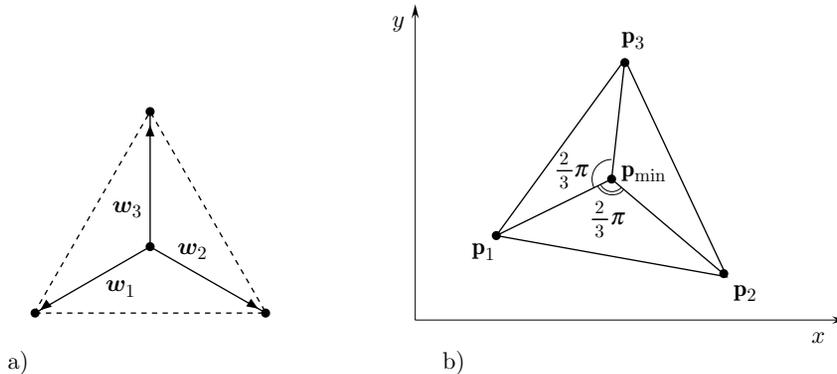


Figura 2.4. a) L'unica disposizione (a meno di rotazioni del piano) di tre versori in \mathbb{R}^2 , affinché la loro somma sia 0. b) La soluzione del problema di minimo nell'Esempio 1.6 per il triangolo di Figura 2.1.

1.4 Forme quadratiche

Un modo per determinare la natura di un punto critico \mathbf{x}^0 è quello di usare la formula di Taylor per analizzare il segno di $f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0)$. Su questa idea era infatti basato il Teorema 3.5, pagina 293, Volume 1. Nel caso unidimensionale, arrestandosi al secondo ordine, si trova, essendo $f'(x_0) = 0$:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2}d^2f(x_0) + o(h^2) = \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + o(h^2) \quad \text{per } h \rightarrow 0.$$

Ora, se $f''(x_0) \neq 0$, il segno di $f(x_0 + h) - f(x_0)$ è, definitivamente per $h \rightarrow 0$, quello di $f''(x_0)$; se $f''(x_0) = 0$ occorre un'analisi più profonda.

Nel caso multidimensionale, procedendo nello stesso modo, si troverebbe

$$(1.7) \quad \begin{aligned} f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0) &= \frac{1}{2} d^2 f(\mathbf{x}^0) + o(|\mathbf{h}|^2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0) h_i h_j + o(|\mathbf{h}|^2). \end{aligned}$$

La determinazione del segno di $f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0)$ conduce ancora all'analisi del differenziale secondo di f in \mathbf{x}^0 ovvero all'analisi della forma quadratica

$$\sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0) h_i h_j.$$

Apriamo dunque una parentesi in cui ci occupiamo delle forme quadratiche. Essendo questo argomento tradizionalmente inserito nei corsi di Algebra ci limitiamo a evidenziare i risultati più strettamente legati all'ottimizzazione.

Ricordiamo che una *forma quadratica* (in breve, f.q.) in \mathbb{R}^n è un *polinomio omogeneo di secondo grado* del tipo

$$(1.8) \quad q(\mathbf{h}) = q(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j$$

dove gli a_{ij} sono numeri reali, coefficienti della f.q. Se tutti gli a_{ij} sono uguali a zero, la (1.8) si chiama f.q. *nulla*.

Si può sempre supporre che nella (1.8) sia $a_{ji} = a_{ij}$; se così non fosse basterebbe sostituire ciascuno dei due coefficienti a_{ij} e a_{ji} con la loro semisomma $\frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$, lasciando in tal modo inalterata la (1.8).

A ogni $q(\mathbf{h})$ risulta così associata una matrice simmetrica $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, con una corrispondenza evidentemente biunivoca.

Esempio 1.7 Le forme quadratiche seguenti corrispondono alle matrici indicate.

$$\begin{aligned} q(h_1, h_2) &= h_1^2 + 2h_2^2 - 6h_1 h_2 & \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \\ q(h_1, h_2, h_3) &= h_1^2 + 2h_2^2 - 6h_1 h_2 & \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ q(h_1, h_2, h_3, h_4) &= -h_1^2 - 3h_2^2 + h_4^2 - 2h_1 h_3 + 10h_2 h_4 & \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A volte è più significativo scrivere una f.q. come prodotto scalare: $q(\mathbf{h}) = \langle \mathbf{A}\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle$, oppure in notazione matriciale: $\mathbf{h}^T \mathbf{A}\mathbf{h}$; scrivendo $\mathbf{A}\mathbf{h}$ si intende che \mathbf{h} sia vettore colonna; \mathbf{h}^T indica il trasposto di \mathbf{h} .

Siamo interessati al segno che una f.q. assume al variare di \mathbf{h} . Una prima osservazione è che, essendo omogenea di secondo grado, $q(\mathbf{h})$ assume segno costante su ogni retta passante per l'origine, origine esclusa. Infatti $q(t\mathbf{h}) = t^2q(\mathbf{h})$.

I seguenti semplici esempi in \mathbb{R}^2 illustrano tutte le possibilità di comportamento:

- $h_1^2 + h_2^2$ è positiva per ogni $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$;
- $-h_1^2 + h_2^2$ è positiva per $(h_1, h_2) = (0, 1)$ e negativa per $(h_1, h_2) = (1, 0)$;
- $-h_1^2 - h_2^2$ è negativa per ogni $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$;
- h_1^2 è sempre positiva tranne che nei vettori del tipo $(0, h_2)$;
- $-h_1^2$ è sempre negativa tranne che nei vettori del tipo $(0, h_2)$.

Tali esempi suggeriscono la seguente classificazione che si applica sia alla f.q., sia alla matrice simmetrica ad essa associata.

DEFINIZIONE 1.2 Una forma quadratica (o la matrice simmetrica corrispondente), $q(\mathbf{h})$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, si dice:

- definita positiva (negativa) se $\forall \mathbf{h} \neq \mathbf{0}$, $q(\mathbf{h}) > 0$ ($q(\mathbf{h}) < 0$);
- semi-definita positiva (negativa) se $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, $q(\mathbf{h}) \geq 0$ ($q(\mathbf{h}) \leq 0$) ed esiste $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ tale che $q(\mathbf{h}) = 0$;
- indefinita (o non definita) se esistono \mathbf{h}^1 e \mathbf{h}^2 tali che $q(\mathbf{h}^1) < 0$ e $q(\mathbf{h}^2) > 0$.

Sottolineiamo che le condizioni i), ii), iii) sono *mutuamente esclusive*.

È sempre bene specificare lo spazio vettoriale in cui si opera quando si vuole classificare una f.q. Infatti la f.q. in a) è definita positiva in \mathbb{R}^2 ma è *semidefinita* in \mathbb{R}^n con $n \geq 3$. Per le altre, considerate come forme quadratiche in \mathbb{R}^2 , si ha: b) indefinita, c) definita negativa, d) semidefinita positiva, e) semidefinita negativa.

Occorrono ora dei criteri per classificare una f.q. senza ricorrere alla definizione. Lasciamoci guidare dal caso bidimensionale. Sia dunque

$$(1.9) \quad q(h_1, h_2) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2$$

con a, b, c non tutti nulli. Se $a = c = 0$, q è certamente indefinita. Se $a \neq 0$ (nel caso $a = 0, c \neq 0$ si procede analogamente), q si può scrivere nel modo seguente:

$$q(h_1, h_2) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 = a \left(h_1 + \frac{b}{a}h_2 \right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}h_2^2 \quad (a \neq 0).$$

Osserviamo che la matrice associata a q è $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ e che i coefficienti dei quadrati sono a e $\frac{|\mathbf{A}|}{a}$, dove $|\mathbf{A}|$ è il determinante di \mathbf{A} . Si deduce allora il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 1.4 La (1.9) è:

- definita positiva (negativa) se e solo se $|\mathbf{A}| > 0$ e $a > 0$ ($a < 0$);
- indefinita se e solo se $|\mathbf{A}| < 0$;
- semidefinita positiva (negativa) e se solo se: $|\mathbf{A}| = 0$ e $a > 0$ ($a < 0$), oppure se: $|\mathbf{A}| = 0$ e $c > 0$ ($c < 0$).

Il punto importante nella Proposizione 1.4 è che il test fa intervenire non solo la matrice \mathbf{A} , bensì anche una matrice 1×1 , per esempio quella in alto a sinistra: $\mathbf{A}_1 = (a_{11})$. La naturale generalizzazione fa intervenire tutte le n sottomatrici \mathbf{A}_k composte mediante le prime k righe e k colonne di \mathbf{A} , chiamate a volte *sottomatrici principali di nord-ovest*:

$$\mathbf{A}_1 = (a_{11}), \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \dots, \mathbf{A}_n = \mathbf{A}.$$

I determinanti di queste matrici si chiamano *minori principali di nord-ovest*.

Vale il seguente teorema, che ci limitiamo a enunciare:

■ **TEOREMA 1.5** Sia $q(\mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}h_ih_j$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. Allora

- i) q è definita positiva se e solo se $|\mathbf{A}_k| > 0$ per ogni $k = 1, \dots, n$;
- ii) q è definita negativa se e solo se $(-1)^k |\mathbf{A}_k| > 0$ per ogni $k = 1, \dots, n$;

(ovvero se e solo se $a_{11} < 0$, $|\mathbf{A}_2| > 0$, $|\mathbf{A}_3| < 0$, ...).

Sarebbe erroneo pensare che le matrici \mathbf{A}_k siano speciali. Il Teorema 1.5 vale anche con le sottomatrici principali di sud-est, costruite partendo in basso a destra con l'elemento a_{nn} , aggiungendo ogni volta una riga e una colonna fino ad arrivare ad \mathbf{A} . Oppure si potrebbe usare una qualunque catena di *sottomatrici principali*², partendo da un elemento a_{jj} della diagonale e aggiungendo ogni volta una riga e una colonna.

Esempio 1.8 Sia

$$q_1(h_1, h_2, h_3) = 5h_1^2 - 8h_1h_3 + 3h_2^2 + 4h_3^2.$$

La matrice corrispondente è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Essendo: $a_{11} = 5 > 0$, $|\mathbf{A}_2| = \det \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 15 > 0$, $|\mathbf{A}_3| = |\mathbf{A}| = 12 > 0$, la f.q. è definita positiva.

Per ottenere un test simile al Teorema 1.5 per le f.q. semidefinite occorre considerare *tutte* le sottomatrici principali di \mathbf{A} e non solo una particolare sequenza tipo la $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$, come del resto si vede già in dimensione 2: le matrici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

²Una sottomatrice di \mathbf{A} si dice *principale* se è simmetrica rispetto alla diagonale principale di \mathbf{A} . Un *minore principale* è il determinante di una sottomatrice principale.

corrispondono rispettivamente a una f.q. semidefinita positiva e a una semidefinita negativa.

La sola considerazione di $a_{11} = 0$, $|\mathbf{A}| = 0$ e di $b_{11} = 0$, $|\mathbf{B}| = 0$ non permette di distinguere il segno. Vale il seguente risultato:

■ **TEOREMA 1.6** Sia $q(\mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}h_ih_j$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. Allora:

- i) q è semidefinita positiva se e solo se ogni sottomatrice principale ha determinante non negativo;
- ii) q è semidefinita negativa se e solo se ogni sottomatrice principale di ordine k ha determinante non negativo se k è pari e non positivo se k è dispari.

Poiché le condizioni espresse nei Teoremi 1.5 e 1.6 sono necessarie e sufficienti si deduce che in ogni altro caso $q(\mathbf{h})$ risulta indefinita.

Esempio 1.9 Sia $q(h_1, h_2, h_3) = -2h_1^2 + 2h_1h_2 - 2h_1h_3 - 5h_2^2 - 8h_2h_3 - 5h_3^2$. In questo caso è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -4 \\ -1 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Si ha: $a_{11} = -2 < 0$, $|\mathbf{A}_2| = 9 > 0$, $|\mathbf{A}_3| = |\mathbf{A}| = 0$. La f.q. non è definita negativa. Le altre sottomatrici principali sono $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$ con determinante $9 > 0$ e $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$ con determinante $9 > 0$.

Si conclude che q è semidefinita negativa.

Un altro importante test è basato sul segno degli autovalori di \mathbf{A} .

Ricordiamo che un numero complesso λ e un vettore non nullo $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ sono detti, rispettivamente, *autovalore* e *autovettore* (corrispondente a λ) di una matrice quadrata \mathbf{A} di ordine n , se soddisfano la relazione:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

o, equivalentemente,

$$(1.10) \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

La (1.10) ha soluzioni non nulle se e solo se la matrice dei coefficienti è singolare, ovvero se e solo se λ è soluzione dell'equazione, detta *equazione caratteristica*:

$$(1.11) \quad \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n) = 0.$$

Il primo membro della (1.11) è un polinomio di grado n in λ e pertanto, in base al teorema fondamentale dell'Algebra, *esistono esattamente n autovalori di \mathbf{A} , ciascuno contato secondo la propria molteplicità*.

Le matrici \mathbf{A} simmetriche hanno importanti proprietà, che elenchiamo qui di seguito:

- P₁) gli autovalori e gli autovettori di \mathbf{A} sono reali;
 P₂) esistono n autovettori linearmente indipendenti $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$, che costituiscono un sistema ortonormale (cioè $\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle = \delta_{ij}$);
 P₃) la matrice $\mathbf{Q} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n)$, le colonne della quale sono gli autovettori di cui al punto P₂), è ortogonale (cioè $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$) e diagonalizza \mathbf{A} . Più precisamente

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

dove λ_j è l'autovettore corrispondente a \mathbf{w}_j .

Sia ora una f.q. in \mathbb{R}^n , che scriviamo in notazione matriciale:

$$(1.12) \quad q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T \mathbf{A} \mathbf{h}.$$

Operiamo la trasformazione $\mathbf{h} = \mathbf{Q} \mathbf{k}$, biunivoca da \mathbb{R}^n in sé, dove \mathbf{Q} è la matrice ortogonale di cui al punto P₃).

Sostituendo nella (1.12) si trova, ponendo $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$:

$$(1.13) \quad q(\mathbf{h}) = q(\mathbf{Q} \mathbf{k}) = \mathbf{k}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{k} = \mathbf{k}^T \Lambda \mathbf{k} = \sum_{j=1}^n \lambda_j k_j^2.$$

Questo procedimento si chiama *riduzione a forma canonica* di q .

Poiché la trasformazione $\mathbf{h} = \mathbf{Q} \mathbf{k}$ è biunivoca, il segno di $q(\mathbf{h})$ si può leggere su quello della f.q.

$$\tilde{q}(\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^n \lambda_j k_j^2.$$

Esaminando il segno dei λ_j si conclude immediatamente che:

■ **TEOREMA 1.7** Sia $q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T \mathbf{A} \mathbf{h}$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. Allora:

- i) q è definita positiva (negativa) se e solo se tutti gli autovalori sono positivi (negativi);
- ii) q è semidefinita positiva (negativa) se e solo se tutti gli autovalori sono non negativi (non positivi) e almeno uno di essi è zero;
- iii) q è indefinita se e solo se esistono 2 autovalori di segno opposto.

Esempio 1.10 Sia

$$q(h_1, h_2, h_3) = -3h_1^2 + 2h_1h_3 - 3h_2^2 + 2h_2h_3 - h_3^2,$$

che corrisponde alla matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$$\det \begin{pmatrix} -3 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & -3 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = -(\lambda + 3)(\lambda^2 + 4\lambda + 1) = 0$$

per $\lambda = -3$, $\lambda = -2 \pm \sqrt{3}$. Pertanto q è definita negativa.

Una proprietà delle forme quadratiche definite, positive o negative, che risulterà utile in seguito è la seguente.

PROPOSIZIONE 1.8 Se $q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T \mathbf{A} \mathbf{h}$ è definita positiva, allora, $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$:

$$(1.14) \quad q(\mathbf{h}) \geq \lambda_{\min} |\mathbf{h}|^2$$

dove λ_{\min} è il minimo autovalore di \mathbf{A} . Se $q(\mathbf{h})$ è definita negativa, allora, $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$:

$$(1.15) \quad q(\mathbf{h}) \leq \lambda_{\max} |\mathbf{h}|^2$$

dove λ_{\max} è il massimo autovalore di \mathbf{A} .

Dimostrazione. Dalla (1.13), se q è definita positiva si ha

$$q(\mathbf{h}) \geq \lambda_{\min} \sum_{j=1}^n k_j^2 = \lambda_{\min} |\mathbf{k}|^2.$$

Poiché $\mathbf{k} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{h} = \mathbf{Q}^T \mathbf{h}$ e \mathbf{Q} è ortogonale, si ha $|\mathbf{k}| = |\mathbf{h}|$ da cui la tesi. Analogamente si procede nel caso q definita negativa. \square

Concludiamo con un'osservazione.

Se $q = q(\mathbf{h})$ è una forma quadratica in \mathbb{R}^n allora $q(\mathbf{0}) = 0$ e $\nabla q(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

La natura del punto critico $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ dipende dal segno di q .

Se q è definita positiva (negativa), $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ è punto di *minimo (massimo)* globale forte.

Se q è indefinita, $\mathbf{0}$ è di *colle*.

Se q (non nulla) è semidefinita positiva (negativa), $\mathbf{0}$ è punto di *minimo (massimo)* globale debole.

1.5 Condizioni sufficienti per estremi liberi

Ritorniamo all'ottimizzazione e alla formula (1.7) che indica come il segno di $f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0)$ dipenda da quello della forma quadratica $d^2 f(\mathbf{x}^0)$, nel caso in cui \mathbf{x}^0 sia un punto critico per f .

La matrice corrispondente a $d^2 f(\mathbf{x}^0)$ è l'hessiana di f in \mathbf{x}^0 , cioè

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0) = (f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0))_{i,j=1,\dots,n},$$

che risulta simmetrica se $f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0) = f_{x_j x_i}(\mathbf{x}^0)$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$; ciò accade, per esempio, se f è di classe C^2 .

Usando la teoria delle f.q. si ricava il seguente:

■ **TEOREMA 1.9** *Siano $f \in C^2(X)$ e \mathbf{x}^0 punto critico per f . Se $d^2f(\mathbf{x}^0)$ è:*

- i) *definita positiva (negativa), \mathbf{x}^0 è punto di minimo (massimo) locale forte;*
- ii) *indefinita, \mathbf{x}^0 è punto di colle.*

Dimostrazione. Sia $d^2f(\mathbf{x}^0)$ definita positiva. Dalla (1.14) abbiamo $d^2f(\mathbf{x}^0) \geq \lambda_m |\mathbf{h}|^2$, dove λ_m è il minimo autovalore di $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0)$. Dalla (1.7) otteniamo allora,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0) &= \frac{1}{2}d^2f(\mathbf{x}^0) + o(|\mathbf{h}|^2) \geq \frac{1}{2}\lambda_m|\mathbf{h}|^2 + o(|\mathbf{h}|^2) = \\ &= \frac{1}{2}\lambda_m|\mathbf{h}|^2\{1 + o(1)\} \quad (\text{per } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}). \end{aligned}$$

Poiché $\lambda_m > 0$, $|\mathbf{h}|^2 > 0$ per $|\mathbf{h}| \neq 0$ e $\{1 + o(1)\} > 0$ definitivamente per $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$, si deduce che anche $f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0) > 0$ definitivamente per $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ e perciò \mathbf{x}^0 è di minimo locale forte. La dimostrazione è analoga nel caso $d^2f(\mathbf{x}^0)$ definita negativa: usando la (1.15) si trova

$$f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0) \leq \frac{1}{2}\lambda_M|\mathbf{h}|^2\{1 + o(1)\}$$

dove λ_M (negativo) è il massimo autovalore di $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0)$. Dunque $f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0) < 0$ definitivamente per $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ e perciò \mathbf{x}^0 è punto di massimo locale forte.

Se $d^2f(\mathbf{x}^0)$ è indefinita esistono due vettori incremento \mathbf{h} e \mathbf{k} in corrispondenza ai quali $d^2f(\mathbf{x}^0)$ è rispettivamente positiva e negativa; cioè:

$$\sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0) h_i h_j > 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0) k_i k_j < 0.$$

Valutiamo l'incremento di f lungo la retta $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + t\mathbf{h}$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$; si ha, dalla (1.7):

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0) &= \frac{1}{2}t^2 \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0) h_i h_j + o(t^2) = \\ &= \frac{1}{2}t^2 \left\{ \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0) h_i h_j + o(1) \right\} \quad (\text{per } t \rightarrow 0) \end{aligned}$$

e perciò, essendo definitivamente positivo il termine tra parentesi, si ottiene che, per $|t|$ piccolo, sarà $f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0) > 0$.

Con lo stesso ragionamento si trova che, per $|t|$ piccolo, $f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{k}) - f(\mathbf{x}^0) < 0$.

Dunque, in ogni intorno di \mathbf{x}^0 si trovano punti in cui f è maggiore di $f(\mathbf{x}^0)$ e punti in cui f è minore: \mathbf{x}^0 è punto di colle. □

OSSERVAZIONE 1.1 Se $d^2(f)\mathbf{x}$ è definita, positiva o negativa, per *ogni* $\mathbf{x} \in X$ (e non solo in \mathbf{x}^0), in base al Teorema 1.12, pagina 334, Volume 1, f risulta strettamente convessa o concava, rispettivamente, e perciò, per la Proposizione 1.3, \mathbf{x}^0 risulta (l'unico) punto di estremo *globale* forte, minimo o massimo rispettivamente.

Nel caso in cui $d^2f(\mathbf{x}^0)$ sia semidefinita, in generale la considerazione del solo differenziale secondo non è più sufficiente a stabilire la natura del punto critico. Vale comunque la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.10 Sia $f \in C^2(X)$. Se \mathbf{x}^0 è punto di massimo (minimo), allora $d^2f(\mathbf{x}^0)$ è definita oppure semidefinita negativa (positiva). In particolare $f_{x_j x_i}(\mathbf{x}^0) \leq 0$ (≥ 0) per ogni $j = 1, \dots, n$.

Lasciamo la dimostrazione per esercizio.

La condizione espressa dalla Proposizione 1.10 è solo necessaria affinché \mathbf{x}^0 sia punto di estremo. Ciò risulta particolarmente evidente se $d^2f(\mathbf{x}^0)$ è nullo (cioè tutte le derivate seconde di f in \mathbf{x}^0 sono nulle), come nel seguente caso: $f(x, y) = x^2y + y^5$ ha differenziale secondo nullo in $(0, 0)$ e $(0, 0)$ è punto di colle.

Anche se $d^2f(\mathbf{x}^0)$ non è nulla, non si può ugualmente decidere; per esempio, per la funzione $f(x, y) = x^2 - y^4$, $d^2f(0, 0) = 2h_1^2$ è semidefinita positiva, e l'origine è punto di sella (di minimo sull'asse x , di massimo sull'asse y).

La Proposizione 1.10 si può raffinare in questo senso:

se $d^2f(\mathbf{x}^0)$ non è nulla ed è semidefinita positiva (negativa), allora \mathbf{x}^0 non può essere punto di massimo (minimo) (Esercizio 10b).

La situazione cambia se $d^2f(\mathbf{x})$ è (non nulla) *semidefinita*, positiva o negativa, non solo in \mathbf{x}^0 ma per ogni \mathbf{x} in un intorno $B_r(\mathbf{x}^0)$. In tal caso infatti f è *convessa* o *concava* rispettivamente, in $B_r(\mathbf{x}^0)$ (Esercizio 24, pag. 338, Vol. 1) e la conclusione è immediata in base alla Proposizione 1.3.

Se poi è semidefinita in *tutto* X , $f(\mathbf{x}^0)$ è estremo *globale*.

OSSERVAZIONE 1.2 Ricordando la Proposizione 1.4, le considerazioni precedenti conducono alla seguente regola nel caso bidimensionale:

Siano $f \in C^2(X)$, X aperto in \mathbb{R}^2 , e (x_0, y_0) un punto critico per f .

L'hessiana di f in (x_0, y_0) è

$$\mathbf{H}_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{yx}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

a) se $\det \mathbf{H}_f(x_0, y_0) > 0$ e

$f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, allora (x_0, y_0) è punto di minimo locale forte

$f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, allora (x_0, y_0) è punto di massimo locale forte

(si noti che in questo caso $f_{xx}(x_0, y_0)$ e $f_{yy}(x_0, y_0)$ hanno lo stesso segno);

b) se $\det \mathbf{H}_f(x_0, y_0) < 0$, allora (x_0, y_0) è punto di colle;

c) se $\det \mathbf{H}_f(x_0, y_0) = 0$ occorre un'analisi ulteriore.

Si ritrovano così le tre situazioni già incontrate nello studio degli insiemi di livello nel Paragrafo 7.3.3, Volume 1; in quel contesto, ricordiamo la classificazione dei punti critici in *ellittici*, *iperbolici* e *parabolici* secondo che si verifichi a), b) o c) rispettivamente.

Se poi $\det \mathbf{H}_f(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \in X$, l'estremo è globale. Se infine $\det \mathbf{H}_f(x, y) = 0$ e $f_{xx}(x, y) > 0$ (risp. < 0) oppure $f_{yy}(x, y) > 0$ (risp. < 0) in tutto X , allora (x_0, y_0) è punto di minimo globale (risp. massimo globale).

Esempio 1.11 Si vogliono determinare gli estremi della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 5.$$

Poiché $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ i suoi eventuali estremi si trovano tra i punti critici, soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2 = 0 \\ f_y = 2y = 0 \\ f_z = 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

L'unica soluzione è $(1, 0, 1)$. Risulta inoltre: $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = 2$ mentre le altre derivate seconde sono nulle. Perciò:

$$d^2f(x, y, z) = 2h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2$$

che è una f.q. definita positiva per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Si deduce che il punto $(1, 0, 1)$ è di minimo globale, in base all'Osservazione 1.1.

Esempio 1.12 Minimi quadrati. Dati k punti nel piano $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$ con ascisse tutte distinte, se $k > 2$ è evidente che, in generale, non esisterà una retta passante per ognuno di essi. Si vuole trovare la retta $y = ax + b$ che *minimizza l'errore quadratico totale*, definito dalla seguente espressione:

$$(1.16) \quad E(a, b) = \sum_{j=1}^k (ax_j + b - y_j)^2 \quad (k \geq 3).$$

I punti critici di E sono le soluzioni del seguente sistema:

$$(1.17) \quad \begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a} = \sum_{j=1}^k 2x_j(ax_j + b - y_j) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial b} = \sum_{j=1}^k 2(ax_j + b - y_j) = 0. \end{cases}$$

Poniamo, per comodità

$$P = \sum_{j=1}^k x_j^2, \quad Q = \sum_{j=1}^k x_j, \quad R = \sum_{j=1}^k y_j, \quad S = \sum_{j=1}^k x_j y_j.$$

Il sistema (1.17) si può scrivere ora nella forma

$$(1.17') \quad \begin{cases} Pa + Qb = S \\ Qa + kb = R. \end{cases}$$

Il determinante $kP - Q^2$ è sempre positivo se $k > 2$ e i numeri x_1, \dots, x_k sono distinti. Infatti $kP - Q^2 > 0$ equivale alla disuguaglianza

$$(1.18) \quad \left(\sum_{j=1}^k x_j \right)^2 < k \sum_{j=1}^k x_j^2,$$

vera nel caso indicato³.

³Si veda comunque l'Esercizio 12.

Si trova quindi che l'unico punto critico di E è il punto

$$(1.19) \quad \bar{a} = \frac{kS - RQ}{kP - Q^2}, \quad \bar{b} = \frac{PR - SQ}{kP - Q^2}.$$

Per vedere che si tratta di un minimo calcoliamo la matrice hessiana di E . Si trova

$$\mathbf{H}_E(a, b) = 2 \begin{pmatrix} P & Q \\ Q & k \end{pmatrix}$$

che coincide con la matrice dei coefficienti del sistema (1.17').

Poiché $P > 0$ e $\det \mathbf{H}_E = kP - Q^2 > 0$ in *tutto* \mathbb{R}^2 , in base all'Osservazione 1.2 si deduce che (\bar{a}, \bar{b}) è il punto di minimo globale cercato.

Applichiamo il procedimento alle coppie altezza/peso della seguente tabella:

altezza in cm	160	163	168	170	175	178	185	190	193
peso in kg	60	61	70	72	73	74	81	83	87

Si ha: $P = 279176$, $Q = 1582$, $R = 661$, $S = 117036$. Dalle (1.18), accontentandoci di 3 cifre dopo il punto, si ricava: $\bar{a} = 0.772$, $\bar{b} = -62.435$, e la retta è $y = 0.773x - 62.435$.

Quest'ultima equazione può essere interpretata nel presente caso come una relazione "ottimale" tra peso e altezza dove il criterio di ottimalità è quello di rendere minimo lo scarto quadratico totale dei dati della tabella. Per esempio, secondo questo legame, un'altezza di cm 180 dovrebbe essere corrispondente a un peso "ideale" di 76.705 kg.

Concludiamo il paragrafo esaminando il caso in cui $d^2 f(\mathbf{x}^0)$ sia semidefinita. Abbiamo già osservato che eventuali proprietà di convessità o concavità di f permettono di riconoscere la natura di \mathbf{x}^0 . Altrimenti si può procedere nei due modi seguenti:

- 1) esaminare direttamente il segno di $f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0)$ quando \mathbf{h} varia in un intorno di $\mathbf{0}$. Tale metodo è realistico se l'espressione analitica non è troppo complicata;
- 2) se f è sufficientemente regolare, esaminare il segno dei differenziali di ordine superiore al secondo, nell'intorno delle rette sulle quali il differenziale secondo si annulla.

Illustriamo i due metodi con un esempio.

Esempio 1.13 Sia $f(x, y) = 3 + (y - x)^2 - y^2(\sin x)^2$.

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $f(0, 0) = 3$ e $df(0, 0) = 0$. Inoltre $d^2 f(0, 0) = 2(h_2 - h_1)^2$ è una f.q. semidefinita positiva che si annulla sulla retta $h_2 = h_1$; $(0, 0)$ è di minimo o di colle.

Procedendo col primo metodo si avrebbe:

$$f(h_1, h_2) - f(0, 0) = (h_2 - h_1)^2 - h_2^2(\sin h_1)^2$$

che si annulla sulle due curve del piano h_1, h_2 definite dalle equazioni

$$h_2 = \frac{h_1}{1 \pm \sin h_1}.$$

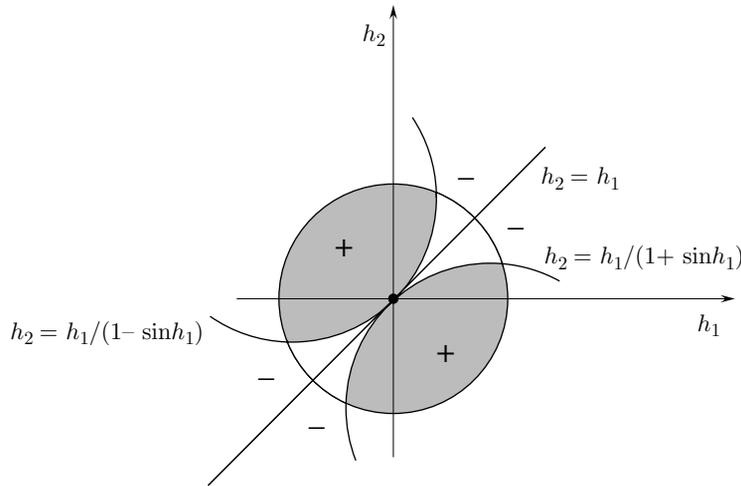


Figura 2.5. Segno di $f(h_1, h_2) - f(0, 0)$ (Esempio 1.13).

Dalla Figura 2.5 si vede che in ogni intorno circolare di $(0, 0)$, $f(h_1, h_2) - f(0, 0)$ cambia segno, per cui $(0, 0)$ è di colle.

Con il secondo metodo si calcolano i differenziali di ordine superiore. Il primo non nullo è il quarto; si ha

$$d^4 f(0, 0) = -4! h_2^2 h_1^2.$$

Il suo segno sulla retta $h_2 = h_1$ (dove $d^2 f(0, 0)$ è nullo) è negativo e quindi $f(h_1, h_1) - f(0, 0) < 0$ se $|h_1|$ è piccolo: l'origine non può essere punto di minimo e perciò è di colle.

Esercizi

1. In riferimento all'Esempio 1.4:

- dare un esempio in cui X non è chiuso e il minimo non esiste;
- dare un esempio in cui X è un compatto non convesso ed esiste più di un punto di minimo;
- * siano X , \mathbf{p} , \mathbf{x}^0 come nell'Esempio 1.4. Mostrare che il punto di minimo \mathbf{x}^0 (proiezione di \mathbf{p} su X) è caratterizzato dalla seguente proprietà:

$$(H) \quad \forall \mathbf{x} \in X : \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}^0, \mathbf{p} - \mathbf{x}^0 \rangle \leq 0.$$

In altri termini: \mathbf{x}^0 soddisfa (H) e, viceversa, se \mathbf{y} soddisfa (H) , allora $\mathbf{x}^0 = \mathbf{y}$. Interpretare geometricamente la condizione (H) .

[Suggerimento: considerare la funzione reale di variabile reale $g(t) = |\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) - \mathbf{p}|^2$, $t \geq 0$. Calcolare g' e g'' e mostrare che (H) equivale a $g'(0) \geq 0$. Se \mathbf{x}^0 è punto di minimo allora $g'(0) \dots$];

- si può generalizzare tutto a n dimensioni?

2. Sia X convesso, chiuso, illimitato. Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ strettamente convessa in X e $f(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$ se $|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty$. Mostrare che esiste uno e un solo punto di minimo per f in X .

3. Determinare gli estremi liberi delle seguenti funzioni:

- $x^2(x - y)$;
- $(x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$;
- $\cos x \operatorname{Sh} y$;
- $\sin(x + y) - \cos(x - y)$;
- $3xe^y - x^3 - e^{3y}$ (il lettore osservi che la funzione presenta un solo punto critico che è un massimo locale, ma non c'è un massimo globale; perché?).

4. Determinare estremi liberi, estremo superiore e inferiore della funzione $f(x, y) = |y - 1|(2 - y - x^2)$ nell'insieme $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 2 - x^2 - y^2\}$.

5. Determinare la natura dell'origine per la funzione $f(x, y) = \log(1 + x^2) - x^2 + xy^2 + y^3 + 2$.

6. Determinare gli estremi di $f(x, y) = x^2 \log(1 + y) + x^2 y^2$ nel suo dominio.

7. Verificare che $(0, 0, 0)$ è punto critico per la funzione $z = z(x, y, u)$ definita implicitamente dall'equazione $x^2 + xu^2 + y^2 + e^{xu} - z + y^2 e^z = 0$. Determinarne la natura.

8. Senza fare calcoli: considerare le funzioni

$$f_1(x, y, z) = [\sin(x - z)]^2 + y^2 - xyz, \quad f_2(x, y, z) = [\sin(x - z)]^2 + y^2 + x^2 z.$$

Verificare che $(0, 0, 0)$ è punto stazionario, determinare $d^2 f_j(0, 0, 0)$ e $d^3 f_j(0, 0, 0)$ e dedurne la natura di $(0, 0, 0)$.

9. Determinare gli estremi di $f(x, y, z) = x^2(y - 1)^3(z + 2)^2$ e di

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz.$$

10. Determinare la minima distanza intercorrente tra le due rette in \mathbb{R}^3 di equazione

$$x - 1 = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 2}{2} \quad \text{e} \quad \frac{x}{4} = y = \frac{z}{2}.$$

11.

- Dimostrare la Proposizione 1.10.
- Dimostrare che se $d^2 f(\mathbf{x}^0)$ non è nulla ed è semidefinita positiva (negativa), allora \mathbf{x}^0 è di colle o di minimo (massimo).

[Suggerimento: esaminare la dimostrazione del Teorema 1.9.]

12. Siano $k > 2$ e x_1, \dots, x_k reali positivi tutti distinti tra loro.

Dimostrare che

$$(*) \quad \left(\sum_{j=1}^k x_j \right)^2 < k \sum_{j=1}^k x_j^2$$

[Suggerimento: usare il principio di induzione; oppure osservare che la (*) può essere scritta nella forma seguente:

$$\left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_j \right)^2 \leq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_j^2;$$

per provare questa basta usare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per i vettori $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ e $\mathbf{v} = (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k})$ in \mathbb{R}^k .]

13. Determinare, al variare del parametro reale α , il segno delle seguenti forme quadratiche:

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2\alpha x_1 x_2 + x_2^2 + 2\alpha x_2 x_3 + x_3^2$$

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_1^2 + \alpha x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 2x_1 x_3 + 4x_2 x_4 + 2\alpha x_3 x_4.$$

14. Sia S l'insieme delle matrici simmetriche definite positive di ordine n ed S_0 l'insieme di quelle semidefinite positive dello stesso ordine.

Vero o falso: rispetto alla somma di matrici e al prodotto di una matrice per un numero reale:

- S è uno spazio vettoriale;
- S_0 è uno spazio vettoriale.

Rispetto al prodotto di matrici righe per colonne:

- S è un gruppo;
- S_0 è un gruppo.

15. *Teorema di Rolle multidimensionale.* Sia K un compatto di \mathbb{R}^n con interno $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$. Sia poi $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ tale che: $f \in C(K)$, f è differenziabile in K e f assume valore costante su ∂K .

Dimostrare che esiste un punto critico di f in $\overset{\circ}{K}$.

2. ESTREMI VINCOLATI. VINCOLI DI UGUAGLIANZA

2.1 Funzioni di due variabili

Cominciamo a esaminare il caso più semplice di ottimizzazione vincolata: date due funzioni di due variabili f e g di classe $C^1(X)$, X aperto di \mathbb{R}^2 , si vogliono determinare gli estremi di f (funzione obiettivo) ristretta all'insieme (vincolo)

$$E_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}.$$

Il significato geometrico è illustrato in Figura 2.6.

La situazione più favorevole è quella in cui dall'equazione $g(x, y) = 0$ si può esplicitare $y = y(x)$ oppure $x = x(y)$ oppure, più in generale, quella in cui E_0 coincide con una curva γ di equazioni parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I$, con I intervallo contenuto in \mathbb{R} .

Il problema è allora ricondotto alla ricerca degli estremi della funzione, reale di variabile reale,

$$\phi(t) = f(x(t), y(t))$$

con $t \in I$.

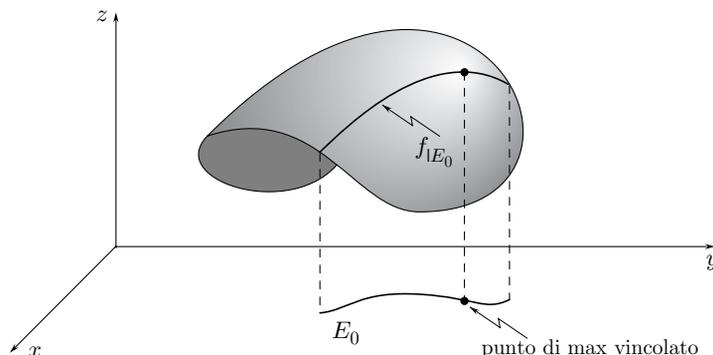


Figura 2.6.

Esempio 2.1 Si vogliono determinare gli estremi di $f(x, y) = x^2 + 3y$ con il vincolo $g(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$.

E_0 è un'ellisse che ha equazioni parametriche $x(t) = 2 \cos t$, $y(t) = 3 \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ e pertanto il problema posto equivale a determinare gli estremi di

$$\phi(t) = 4(\cos t)^2 + 9 \sin t$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Si ha: $\phi'(t) = \cos t(-8 \sin t + 9) = 0$ per $\cos t = 0$ e cioè per $t = \pi/2$ e $3\pi/2$. Poiché $\phi''(t) = -\sin t(-8 \sin t + 9) - 8(\cos t)^2$ si ha $\phi''(\pi/2) = -1$ e $\phi''(3\pi/2) = 17$ e perciò $t = \pi/2$ è un punto di massimo locale, $t = 3\pi/2$ di minimo locale.

Essendo poi $\phi(0) = \phi(2\pi) = 4$, $\phi(\pi/2) = 9$, $\phi(3\pi/2) = -9$, si deduce che 9 e -9 sono rispettivamente massimo e minimo *globali*.

In generale non sarà possibile ridurre a una dimensione il problema, almeno dal punto di vista pratico. Vediamo allora come si può estendere la teoria sviluppata nella precedente sezione.

Il primo concetto da introdurre è quello di *punto critico (o stazionario) vincolato*. Sia (x_0, y_0) un punto *regolare* di E_0 , cioè

$$g(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}.$$

In tal caso, in un intorno di (x_0, y_0) , E_0 coincide con una curva γ di equazioni parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$; si può inoltre scegliere il parametro in modo che t vari in un intorno I_0 di $t = 0$ e che $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.⁴

Il vettore $(x'(0), y'(0))$ rappresenta dunque un vettore tangente al vincolo nel punto (x_0, y_0) .

Possiamo allora considerare la funzione $\phi(t) = f(x(t), y(t))$ e definire (x_0, y_0) *punto critico vincolato* se $t = 0$ è *punto critico* per ϕ ovvero se $\phi'(0) = 0$. Essendo f

⁴Per esempio, se $g_y(x_0, y_0) \neq 0$, l'equazione $g(x, y) = 0$ definisce $y = h(x)$ per x in un intorno di x_0 . Le due equazioni parametriche $x(t) = x_0 + t$, $y(t) = h(x_0 + t)$ soddisfano le condizioni richieste.

differenziabile, si ha

$$\phi'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

e l'equazione $\phi'(0) = 0$ significa

$$(2.1) \quad f_x(x_0, y_0)x'(0) + f_y(x_0, y_0)y'(0) = 0;$$

in altre parole: *la derivata di f in direzione tangente al vincolo in (x_0, y_0) è nulla.* Precisamente:

DEFINIZIONE 2.1 Siano $f, g \in C^1(X)$, X aperto di \mathbb{R}^2 . Il punto $(x_0, y_0) \in X$ si dice *critico o stazionario condizionato al vincolo $g(x, y) = 0$* se:

- i) $g(x_0, y_0) = 0$ e $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ (cioè (x_0, y_0) è punto regolare per E_0);
- ii) *la derivata di f in direzione tangente al vincolo si annulla in (x_0, y_0) (cioè vale la (2.1)).*

Naturalmente la ii) diventa significativa nel caso in cui $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$.

Una notevole ed elegante caratterizzazione di un punto critico vincolato è contenuta nel seguente teorema.

■ **TEOREMA 2.1** Siano $f, g \in C^1(X)$, X aperto di \mathbb{R}^2 e sia (x_0, y_0) un punto regolare per $E_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; g(x, y) = 0\}$. Allora (x_0, y_0) è punto critico vincolato a E_0 se e solo se esiste un numero reale λ_0 tale che

$$(2.2) \quad \nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0).$$

Dimostrazione. Siano $(x(t), y(t))$, $t \in I_0$ le equazioni parametriche di E_0 in un intorno di (x_0, y_0) con $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Sia $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ ⁵.

Se (x_0, y_0) è punto critico vincolato, vale la (2.1) e quindi il vettore $\nabla f(x_0, y_0)$ è normale al vettore tangente. Essendo $\nabla g(x_0, y_0)$ normale a E_0 in (x_0, y_0) ne segue che $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ sono paralleli e cioè che esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, tale che valga la (2.2).

Viceversa, se vale la (2.2), $\nabla f(x_0, y_0)$ è normale a E_0 in (x_0, y_0) e quindi vale la (2.1). □

Dalla discussione precedente segue subito una condizione necessaria per gli estremi condizionati, analogo del teorema di Fermat:

■ **TEOREMA 2.2** Nelle ipotesi del Teorema 2.1, se (x_0, y_0) è punto di estremo condizionato (al vincolo $g(x, y) = 0$), allora è punto critico condizionato. In particolare esiste λ_0 tale che valga la (2.2).

Dimostrazione. (x_0, y_0) è di estremo condizionato se e solo se $t = 0$ è di estremo per $\phi(t) = f(x(t), y(t))$. Dunque $\phi'(0) = 0$ da cui la tesi. □

OSSERVAZIONE 2.1 Il numero λ_0 , la cui esistenza è asserita nel Teorema 2.1, prende il nome di *moltiplicatore di Lagrange*.

Introducendo la funzione $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, \lambda)$, detta *lagrangiana*, definita da

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda g(x, y),$$

⁵Se $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$ non c'è nulla da dimostrare.

il Teorema 2.1 afferma che (x_0, y_0) è punto critico condizionato se e solo se esiste λ_0 tale che il punto (x_0, y_0, λ_0) sia punto critico libero per \mathcal{L} . Infatti i punti critici di \mathcal{L} sono soluzioni del sistema:

$$(2.3) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_x = f_x - \lambda g_x = 0 \\ \mathcal{L}_y = f_y - \lambda g_y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = -g = 0. \end{cases}$$

Le prime due equazioni coincidono con la (2.2) mentre la terza esprime la condizione di vincolo.

Ritorniamo al problema di ottimizzazione posto all'inizio del paragrafo.

La teoria sviluppata indica il seguente modo di procedere, noto come *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*:

- si isolano gli eventuali punti non regolari di E_0 che vanno esaminati a parte;
- si cercano i punti critici condizionati di f o equivalentemente quelli liberi della lagrangiana, e cioè le soluzioni del sistema (2.3);
- si determina la natura dei punti critici. A questo proposito, un criterio generale, basato sullo studio del segno di una forma quadratica vincolata, è presentato nel Paragrafo 2.3.

Esempio 2.2 Si vogliono determinare gli estremi della funzione $f(x, y) = xy$, soggetti al vincolo $g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$.⁶

Le funzioni f e g sono di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ed E_0 non ha punti singolari.

La lagrangiana è $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 - xy + y^2 - 1)$. I punti critici sono soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} f_x - \lambda g_x = y - 2\lambda x + \lambda y = 0 \\ f_y - \lambda g_y = x - 2\lambda y + \lambda x = 0 \\ g(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni: $(1, 1, 1)(-1, -1, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1/\sqrt{3}), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, -1/\sqrt{3})$.

Dunque vi sono quattro punti critici vincolati: $\mathbf{p}_0 = (1, 1)$, $\mathbf{p}_1 = (-1, -1)$, $\mathbf{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1)$, $\mathbf{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1)$.

Ora, essendo $E_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$ un compatto e f continua, il teorema di Weierstrass assicura l'esistenza di un punto di massimo e uno di minimo. Poiché $f(1, 1) = f(-1, -1) = 1$ e $f(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = f(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) = -1/3$ si deduce che \mathbf{p}_0 e \mathbf{p}_1 sono punti di massimo globali e $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ di minimo globali.

⁶Anche se in questo caso il vincolo si presta a una rappresentazione parametrica globale è forse più semplice ricorrere al metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Il Teorema 2.1 ha interessanti interpretazioni. Ne illustriamo due.

Per la prima, di carattere *geometrico*, introduciamo la famiglia degli insiemi di livello di f , definiti dall'equazione $f(x, y) = c$, ($c \in \mathbb{R}$).

Osserviamo che il vincolo E_0 corrisponde all'insieme di livello zero di g . Sia ora (x_0, y_0) punto critico condizionato e $f(x_0, y_0) = c_0$ il livello critico corrispondente. Essendo per ipotesi $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ dalla (2.2) si deduce che:

- se $\lambda_0 = 0$, allora $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$ e il punto (x_0, y_0) è singolare per la linea di livello critica;
- se invece $\lambda_0 \neq 0$, allora la linea di livello critica è tangente al vincolo nel punto (x_0, y_0) .

La seconda alternativa è illustrata in Figura 2.7, in riferimento al problema dell'Esempio 2.2. Il vincolo E_0 è un'ellisse centrata nell'origine, con assi nelle direzioni $y = x$ e $y = -x$ e diametri lunghi rispettivamente $2\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2/3}$. Le linee di livello di f sono iperboli equilateri di equazione $xy = c$ (due rami per ogni valore di c). I livelli $c = 1$ e $c = -1/3$, corrispondenti agli estremi condizionati, sono tangenti all'ellisse nei punti critici.

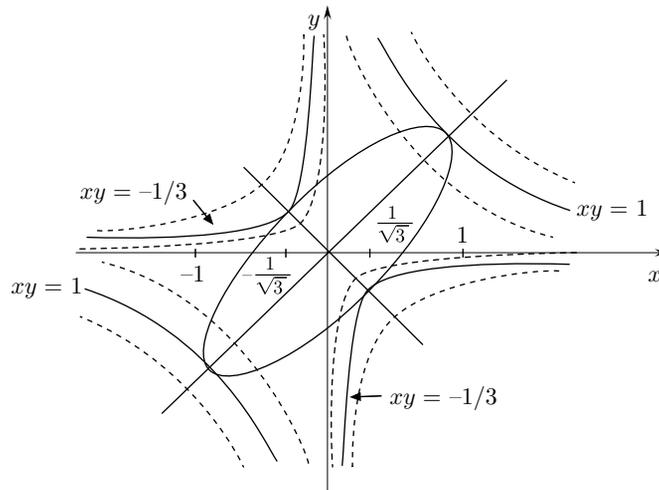


Figura 2.7. Illustrazione della soluzione del problema dell'Esempio 2.2.

La seconda è un'interpretazione *meccanica*. Sia f il potenziale di una forza piana meccanica $\mathbf{F} = \nabla f$ il cui punto di applicazione sia vincolato senza attrito a una linea γ di equazione $g(x, y) = 0$. Dalla statica sappiamo che si può eliminare il vincolo pur di introdurre la reazione vincolare, rappresentata da una forza diretta normalmente al vincolo stesso e perciò del tipo $-\lambda \nabla g$. L'equilibrio si raggiunge allorché la risultante delle forze in gioco è nulla, ovvero quando $\nabla f - \lambda \nabla g = \mathbf{0}$.

In conclusione, *le posizioni di equilibrio sono i punti critici condizionati di f su γ .*

I moltiplicatori di Lagrange non esauriscono il loro ruolo nella determinazione dei punti critici, bensì hanno un interessante significato, che viene illustrato nell'Esercizio 11.

2.2 Il caso generale: funzioni di n variabili con m vincoli ($m < n$)

Il problema di ottimizzazione vincolata con vincoli di uguaglianza, nel caso generale, si presenta così: *dato un aperto X di \mathbb{R}^n e date due funzioni $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbf{g} : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m < n$, entrambe di classe C^1 , determinare gli estremi di f , ristretta all'insieme (vincolo)*

$$E_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Se $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_m)$, E_0 è l'insieme dei punti di \mathbb{R}^n che soddisfano le m equazioni

$$(2.4) \quad \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Il caso $n = 2, m = 1$ è quello trattato nel paragrafo precedente.

Come già nel caso più semplice, la situazione più favorevole è quella in cui dal sistema (2.4) si riescono a ricavare esplicitamente m variabili in termini delle altre $n - m$, riducendo così il problema di ottimizzazione vincolata a un problema di ottimizzazione, che può ancora essere vincolata, ma in dimensione inferiore.

Generalmente, si ricorre al metodo dei *moltiplicatori di Lagrange*, estensione di quello presentato nel paragrafo precedente. Sviluppiamo la teoria introducendo anche qui il concetto di *punto critico o stazionario vincolato*.

Sia $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in X$ un punto *regolare* di E_0 intendendo con ciò che la matrice Jacobiana di \mathbf{g} :

$$\mathbf{D}\mathbf{g} = \begin{pmatrix} D_{x_1}g_1 & D_{x_2}g_1 & \dots & D_{x_n}g_1 \\ D_{x_1}g_2 & D_{x_2}g_2 & \dots & D_{x_n}g_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{x_1}g_m & D_{x_2}g_m & \dots & D_{x_n}g_m \end{pmatrix}$$

abbia caratteristica m in \mathbf{x}^0 . In altri termini i vettori $\nabla g_j(\mathbf{x}^0)$, per $j = 1, \dots, m$, siano linearmente indipendenti.

Esiste dunque un minore di ordine m , estratto da $\mathbf{D}\mathbf{g}(\mathbf{x}^0)$, diverso da zero; possiamo senz'altro supporre che tale minore sia $\frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_m)}$, cioè quello individuato dalle prime m colonne di $\mathbf{D}\mathbf{g}$.

In questo caso, grazie al teorema di Dini (Teorema 3.8, pag. 361, Vol. 1), il sistema (2.4) definisce x_1, \dots, x_m , in funzione di x_{m+1}, \dots, x_n in un intorno di \mathbf{x}^0 :

$$(2.5) \quad \begin{aligned} x_1 &= h_1(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ x_2 &= h_2(x_{m+1}, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_m &= h_m(x_{m+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

in modo tale che

$$(2.6) \quad x_j^0 = h_j(x_{m+1}^0, \dots, x_n^0) \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, m.$$

Si dice allora che, in un intorno di \mathbf{x}^0 , E_0 è una *varietà di dimensione $n - m$* .

Intuitivamente ciò significa che una ipotetica particella che si muova su E_0 è dotata di $n - m$ gradi di libertà; da un altro punto di vista, ciò vuol dire che per individuare un punto su E_0 (in un intorno di \mathbf{x}^0) occorre specificare $n - m$ parametri che, in questo contesto, fungono da coordinate locali.

Le varietà di dimensione $n - 1$ si chiamano *ipersuperfici* in \mathbb{R}^n ; se $n = 3$ esse coincidono con le ordinarie superfici (trattate nel Cap. 6).

Le varietà di dimensione 1 si chiamano *curve* in \mathbb{R}^n . I casi $n = 2$ ed $n = 3$ sono stati ampiamente trattati nel Capitolo 1 del presente volume. In generale una curva in \mathbb{R}^n è assegnata da un vettore

$$\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

con $t \in I$, intervallo contenuto in \mathbb{R} .

La curva si dice *regolare* se $\mathbf{r} \in C^1(I)$ e se il vettore

$$\mathbf{r}'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t))$$

che chiameremo vettore *tangente* o vettore *velocità*, in analogia con i casi $n = 2$ e 3 , è diverso da $\mathbf{0}$ per ogni $t \in I$.

Il nostro scopo è definire quando \mathbf{x}^0 è punto critico per f ristretta alla varietà $n - m$ dimensionale, individuata in un intorno di \mathbf{x}^0 dal sistema (2.4), o equivalentemente dalle (2.5).

Ricordiamo che sia f sia \mathbf{g} si intendono sempre di classe $C^1(X)$, X aperto di \mathbb{R}^n .

Consideriamo una curva regolare in \mathbb{R}^n di equazione $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, che abbia le seguenti proprietà:

H_1) \mathbf{r} è definita in un intorno I_0 di $t = 0$ e $\mathbf{r}(0) = \mathbf{x}^0$;

H_2) la curva è contenuta in E_0 e cioè

$$(2.6') \quad g_j(\mathbf{r}(t)) = g_j(x_1(t), \dots, x_n(t)) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad \forall t \in I_0.$$

DEFINIZIONE 2.2 Il punto regolare $\mathbf{x}^0 \in X$ si dice *critico* o *stazionario* per f , vincolato alla varietà E_0 , se per ogni curva regolare $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ soddisfacente le condizioni H_1) e H_2), posto $\phi(t) = f(\mathbf{r}(t))$, si ha $\phi'(0) = 0$.

L'interpretazione geometrica della definizione di punto critico si trova nell'Osservazione 2.2. Il seguente teorema è immediato.

■ **TEOREMA 2.3** Se $\mathbf{x}^0 \in X$ è punto di estremo per f , vincolato alla varietà E_0 , ed è punto regolare per E_0 , allora \mathbf{x}^0 è punto critico vincolato (a E_0).

Dimostrazione. Se \mathbf{x}^0 è di massimo (minimo) vincolato e $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ è una curva soddisfacente le condizioni H_1) e H_2), allora $\phi(t) = f(\mathbf{r}(t))$ ha un massimo (minimo) libero in $t = 0$ e perciò $\phi'(0) = 0$. □

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange è basato sulla seguente caratterizzazione dei punti critici (generalizzazione del Teorema 2.1), di cui omettiamo la dimostrazione.

■ **TEOREMA 2.4** Sia $\mathbf{x}^0 \in X$ un punto regolare per E_0 . Allora \mathbf{x}^0 è punto critico vincolato (a E_0) per f se e solo se esistono m numeri reali $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0$, detti moltiplicatori di Lagrange, tali che:

$$(2.7) \quad \nabla f(\mathbf{x}^0) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^0 \nabla g_j(\mathbf{x}^0).$$

Si noti che la (2.7) equivale a n equazioni scalari.

OSSERVAZIONE 2.2 Le direzioni corrispondenti ai vettori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$\langle \nabla g_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$$

si dicono *direzioni tangenziali ai vincoli*. Si dimostra che, nelle ipotesi del teorema, per ogni vettore \mathbf{v} tangenziale esiste una curva regolare $\mathbf{r}(t)$ soddisfacente le condizioni $H_1)$ e $H_2)$ e tali che $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{v}$.

Si vede allora che un punto regolare $\mathbf{x}^0 \in X$ è stazionario se e solo se la derivata di f lungo *ogni* direzione tangenziale ai vincoli è nulla.

OSSERVAZIONE 2.3 Introducendo la funzione lagrangiana, definita dalla formula

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) := f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\mathbf{x}),$$

il Teorema 2.4 afferma che, se \mathbf{x}^0 è regolare, allora è critico condizionato se e solo se esiste $\boldsymbol{\lambda}^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0)$ tale che $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ sia punto critico libero per \mathcal{L} . Infatti i punti critici liberi per \mathcal{L} sono soluzioni del seguente sistema di $n + m$ equazioni in $n + m$ incognite:

$$(2.8) \quad \begin{cases} D_{x_1} \mathcal{L} = D_{x_1} f - \sum_{j=1}^m \lambda_j D_{x_1} g_j = 0 \\ D_{x_2} \mathcal{L} = D_{x_2} f - \sum_{j=1}^m \lambda_j D_{x_2} g_j = 0 \\ \vdots \\ D_{x_n} \mathcal{L} = D_{x_n} f - \sum_{j=1}^m \lambda_j D_{x_n} g_j = 0 \\ D_{\lambda_1} \mathcal{L} = -g_1 = 0 \\ D_{\lambda_2} \mathcal{L} = -g_2 = 0 \\ \vdots \\ D_{\lambda_m} \mathcal{L} = -g_m = 0. \end{cases}$$

Le prime n equazioni equivalgono alla (2.7); le ultime sono le condizioni di vincolo.

Per risolvere un problema di ottimizzazione vincolata con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, dopo aver isolato i punti singolari, si determinano i punti critici, risolvendo il sistema (2.8).

In generale si cerca poi di stabilire la natura di detti punti mediante considerazioni legate al problema specifico, oppure ricorrendo al criterio sufficiente presentato nel paragrafo successivo.

Esempio 2.3 Applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange al problema dell'Esempio 1.2. L'obiettivo da massimizzare è $V(x, y, z) = xyz$, nell'ottante positivo di \mathbb{R}^3 , sotto la condizione

$$(2.9) \quad g(x, y, z) = xy + xz + yz - A = 0 \quad (A > 0).$$

Poiché $\nabla g = (y + z, x + z, z + y)$ si annulla solo in $(0, 0, 0)$, sulla superficie (2.9) non vi sono punti singolari. Cerchiamo i punti critici. Il sistema (2.8) è assegnato dalle equazioni

$$\begin{aligned} V_x - \lambda g_x &= yz - \lambda(y + z) = 0 \\ V_y - \lambda g_y &= xz - \lambda(x + z) = 0 \\ V_z - \lambda g_z &= xy - \lambda(x + y) = 0 \end{aligned}$$

alle quali va aggiunta la (2.9). Facilmente si trova l'unico punto $x = y = z = \sqrt{A/2}$ con $\lambda = \sqrt{A/8}$.

Si tratta ora di stabilire la natura del punto critico $(\sqrt{A/2}, \sqrt{A/2}, \sqrt{A/2})$.

Consideriamo V definita per $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$; ciò non influisce sulla conclusione in quanto $V = 0$ sui piani coordinati.

Si noti che l'esistenza del massimo non si può inferire direttamente dal teorema di Weierstrass, essendo la superficie (2.9) illimitata.

Facciamo vedere che, tuttavia, ci si può restringere all'interno di una sfera di raggio opportunamente grande. Osserviamo infatti che, se un punto (x, y, z) appartiene alla superficie (2.9) e $x^2 + y^2 + z^2 > 3R^2$, allora almeno una delle variabili x, y, z è maggiore di R . Sia per esempio $x > R$. Dalla (2.9) stessa si deduce poi che $xy \leq A$ e $xz \leq A$ e perciò $y \leq \frac{A}{x}$ e $z \leq \frac{A}{x}$. Dunque, se $x^2 + y^2 + z^2 > 3R^2$ e il punto (x, y, z) è sulla superficie, per il volume V abbiamo:

$$V(x, y, z) = xyz \leq x \frac{A}{x} \frac{A}{x} = \frac{A^2}{x} < \frac{A^2}{R}.$$

Ne segue che, per R abbastanza grande, $V(x, y, z) < V(\sqrt{A/2}, \sqrt{A/2}, \sqrt{A/2}) = (A/2)^{3/2}$.

D'altra parte, nell'intersezione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3R^2$ con l'ottante e il vincolo (2.9), V deve ammettere massimo (per il teorema di Weierstrass). Per quanto abbiamo visto, i punti di massimo, se R è grande, devono essere interni alla sfera ed essere critici condizionati. Essendoci uno solo di tali punti, si deduce che esso è il punto cercato.

In conclusione, *tra tutti i parallelepipedi di assegnata superficie totale il cubo è quello che ha volume massimo.*

Esempio 2.4 Sia $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matrice simmetrica di ordine 3 definita positiva. L'equazione

$$(2.10) \quad \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_i x_j = 1 \quad (\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3))$$

definisce un ellissoide con centro nell'origine. Vogliamo determinare gli estremi di $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ sull'ellissoide.

Osserviamo che non vi sono punti singolari; infatti:

$$D_{x_j} \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 2 \sum_{i=1}^3 a_{ij} x_i \quad \text{e perciò} \quad \nabla \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 2\mathbf{A}\mathbf{x},$$

che, essendo $\det \mathbf{A} > 0$, si annulla solo per $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, punto non appartenente all'ellissoide.

Essendo poi f continua e la superficie compatta, esistono massimo e minimo globali, che devono essere punti critici condizionati.

La lagrangiana del problema è

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = |\mathbf{x}|^2 - \lambda(\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 1)$$

e il sistema (2.8) consiste delle 3 equazioni

$$(2.11) \quad D_{x_j} \mathcal{L} = 2x_j - 2\lambda \sum_{i=1}^3 a_{ij} x_i = 0 \quad j = 1, 2, 3$$

più il vincolo

$$D_\lambda \mathcal{L} = \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - 1 = 0.$$

Le (2.11) si possono scrivere nella forma compatta

$$(2.11') \quad \lambda \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Se ora $\lambda = 0$, la (2.11') implica $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ che non verifica il vincolo. Se $\lambda \neq 0$ la (2.11'), scritta nella forma

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{x},$$

indica che *i punti critici sono gli autovettori di \mathbf{A} che soddisfano la condizione $\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1$ e i moltiplicatori sono i reciproci degli autovalori corrispondenti*. Studiamo la natura dei punti critici.

Siano $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$ i reciproci degli autovalori di \mathbf{A} e $\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \mathbf{w}^3$ tre rispettivi autovettori, soddisfacenti il vincolo. Dalla (2.11') si ha:

$$\mathbf{A}\mathbf{w}^j = \frac{1}{\mu_j} \mathbf{w}^j \quad \text{per ogni } j = 1, 2, 3.$$

Moltiplicando scalarmente per \mathbf{w}^j si trova

$$1 = \langle \mathbf{A}\mathbf{w}^j, \mathbf{w}^j \rangle = \frac{1}{\mu_j} |\mathbf{w}^j|^2$$

ovvero

$$f(\mathbf{w}^j) = |\mathbf{w}^j|^2 = \mu_j \quad (j = 1, 2, 3).$$

Si può trarre allora la seguente conclusione:

Il massimo di f è μ_3 , moltiplicatore massimo; il minimo è μ_1 , moltiplicatore minimo. Essendo f il quadrato della distanza dall'origine, ricaviamo che $\sqrt{\mu_3}$ e $\sqrt{\mu_1}$ sono rispettivamente le lunghezze dei semiassi maggiore e minore dell'ellissoide.

Il moltiplicatore intermedio μ_2 corrisponde a un *punto di sella*: partendo da \mathbf{w}^2 e muovendosi sull'ellissoide verso \mathbf{w}^1 , f diminuisce, mentre muovendosi verso \mathbf{w}^3 , f aumenta; la sua radice quadrata è la lunghezza del semiasse intermedio. Anche μ_2 può essere comunque caratterizzato come estremo vincolato di un opportuno problema, come mostrato nell'Esercizio 7.

Nel caso $n = 2$ ed $m = 1$ o $m = 2$, il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e in particolare la (2.7), è suscettibile di interpretazione geometrica e meccanica analoghe a quelle del paragrafo precedente. Lasciamo al lettore l'onere di tale estensione.

*2.3 Condizioni sufficienti

Il riconoscimento della natura di un punto critico libero è basato sullo studio del segno del differenziale secondo della funzione obiettivo come forma quadratica negli incrementi delle variabili.

Nel caso di punti critici condizionati è possibile procedere in modo analogo facendo intervenire il differenziale secondo (rispetto a \mathbf{x}) della lagrangiana, ristretto però a incrementi tangenziali ai vincoli.

Analizziamo il caso di un solo vincolo ($m = 1$).

Sia $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ un punto critico per f condizionato al vincolo $g(\mathbf{x}) = 0$ e sia λ^0 il corrispondente moltiplicatore di Lagrange.

Vale il seguente risultato:

■ **TEOREMA 2.5** *Siano $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, X aperto di \mathbb{R}^n , di classe C^2 .*

Se la forma quadratica

$$(2.12) \quad \sum_{i,j=1}^n [f_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0) - \lambda^0 g_{x_i x_j}(\mathbf{x}^0)] h_i h_j = \langle [\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0) - \lambda^0 \mathbf{H}_g(\mathbf{x}^0)] \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle,$$

ristretta all'insieme dei vettori $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ tangenziali al vincolo in \mathbf{x}^0 , (cioè $\langle \nabla g(\mathbf{x}^0), \mathbf{h} \rangle = 0$), è definita negativa (positiva), allora \mathbf{x}^0 è punto di massimo (minimo) locale forte vincolato.

Posticipiamo la dimostrazione, per presentare un criterio di riconoscimento del segno di una f.q. soggetta a vincolo lineare. Vale il seguente lemma algebrico di cui omettiamo la dimostrazione.

LEMMA 2.6 *Sia $q(\mathbf{h}) = \langle \mathbf{A}\mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle$ una forma quadratica in \mathbb{R}^n e sia $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $b_1 \neq 0$. Allora la f.q. $q(\mathbf{h})$, soggetta al vincolo lineare $\langle \mathbf{b}, \mathbf{h} \rangle = 0$, è definita positiva se sono **negativi** tutti i minori principali di nord-ovest, di ordine*

maggiore di 2, della seguente matrice

$$(2.13) \quad \begin{pmatrix} 0 & b_1 & \dots & b_n \\ b_1 & & & \\ \vdots & & \mathbf{A} & \\ b_n & & & \end{pmatrix}.$$

È definita negativa se i suddetti minori si susseguono a segni alterni a partire dal primo (di ordine 3) **positivo**.

Il lemma si applica nel nostro caso con $\mathbf{A} = \mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0) - \lambda^0 \mathbf{H}_g(\mathbf{x}^0)$ e $\mathbf{b} = \nabla g(\mathbf{x}^0)$; poiché $\nabla g(\mathbf{x}^0) \neq \mathbf{0}$, si può sempre supporre che $D_{x_1} g(\mathbf{x}^0) \neq 0$.

Esempio 2.5 Riprendiamo il problema dell'Esempio 2.3. Verifichiamo tramite il Lemma 2.6 che il punto critico $(\sqrt{A/2}, \sqrt{A/2}, \sqrt{A/2})$ è di massimo (locale!). In questo caso si ha $\lambda^0 = \sqrt{A/8}$

$$\begin{aligned} V_{xx} - \lambda g_{xx} &= V_{yy} - \lambda g_{yy} = V_{zz} - \lambda g_{zz} = 0; \\ V_{xy} - \lambda g_{xy} &= z - \lambda \\ V_{xz} - \lambda g_{xz} &= y - \lambda \\ V_{yz} - \lambda g_{yz} &= x - \lambda \\ \nabla g &= (y + z, x + z, z + y). \end{aligned}$$

Dunque la matrice (2.13) è

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2A} & \sqrt{2A} & \sqrt{2A} \\ \sqrt{2A} & 0 & \sqrt{A/8} & \sqrt{A/8} \\ \sqrt{2A} & \sqrt{A/8} & 0 & \sqrt{A/8} \\ \sqrt{2A} & \sqrt{A/8} & \sqrt{A/8} & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2A} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché il determinante di questa matrice è negativo e il suo minore principale di nord-ovest di ordine 3 è positivo, si ottiene la conclusione desiderata.

Dimostrazione del Teorema 2.5. Essendo \mathbf{x}^0 punto regolare, l'equazione

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

definisce, per esempio, $x_1 = \varphi(x_2, \dots, x_n)$, in un intorno circolare $B_\delta(\mathbf{x}^0)$.

Sia ora $\mathbf{x}^1 \in B_\delta(\mathbf{x}^0) \cap E_0$ e assumiamo che la (2.12) sia definita positiva. Vogliamo mostrare che, se δ è sufficientemente piccolo, $f(\mathbf{x}^0) < f(\mathbf{x}^1)$.

Costruiamo una curva regolare $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $t \in [-1, 1]$, tale che: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{x}^0$, $\mathbf{r}(1) = \mathbf{x}^1$; $\mathbf{r}(t) \in B_\delta(\mathbf{x}^0)$ e $g(\mathbf{r}(t)) = 0$, $\forall t \in [-1, 1]$.

È sufficiente porre:

$$x_j(t) = x_j^0 + t(x_j^1 - x_j^0) \quad \text{per } j = 2, \dots, n$$

e

$$x_1(t) = \varphi(x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

Osserviamo che $\mathbf{r}'(0)$ è tangenziale al vincolo in \mathbf{x}^0 ; inoltre si ha:

$$x'_j(t) = (x_j^1 - x_j^0) \quad \text{per } j = 2, \dots, n$$

e

$$x'_1(t) = \sum_{j=2}^n \varphi_{x_j}(\dots)(x_j^1 - x_j^0).$$

Pertanto, ponendo $M_1 = \max |\nabla \varphi|^2$, si ha $|x'_1(t)|^2 \leq M_1 \sum_{j=2}^n (x_j^1 - x_j^0)^2$ da cui

$$(2.14) \quad |\mathbf{r}'(t)|^2 \leq (1 + M_1) \sum_{j=2}^n (x_j^1 - x_j^0)^2 \leq (1 + M_1) |\mathbf{r}'(0)|^2.$$

Analogamente si trova

$$(2.15) \quad \begin{aligned} |\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}'(0)| &= |x'_1(t) - x'_1(0)| \leq \\ &\leq |\nabla \varphi(x_2(t), \dots, x_n(t)) - \nabla \varphi(x_2^0, \dots, x_n^0)| \cdot |\mathbf{r}'(0)|. \end{aligned}$$

Poniamo ora $\phi(t) = f(\mathbf{r}(t))$. Essendo \mathbf{x}^0 punto critico vincolato, si ha $\phi'(0) = 0$.

Usando la formula di Mac Laurin, possiamo scrivere

$$(2.16) \quad f(\mathbf{x}^1) - f(\mathbf{x}^0) = \phi(1) - \phi(0) = \frac{1}{2} \phi''(\bar{t})$$

dove \bar{t} è un opportuno punto di $[0, 1]$.

Essendo $g(\mathbf{r}(t)) = 0, \forall t \in [-1, 1]$, si ha $\phi(t) = f(\mathbf{r}(t)) - \lambda^0 g(\mathbf{r}(t))$ e perciò

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \langle \nabla f(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t) \rangle - \lambda^0 \langle \nabla g(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t) \rangle \\ \phi''(t) &= \langle \mathbf{H}_f(\mathbf{r}(t)) \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t) \rangle + \langle \nabla f(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}''(t) \rangle - \lambda^0 \langle \mathbf{H}_g(\mathbf{r}(t)) \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t) \rangle - \\ &\quad - \lambda^0 \langle \nabla g(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}''(t) \rangle = \\ &= \langle [\mathbf{H}_f(\mathbf{r}(t)) - \lambda^0 \mathbf{H}_g(\mathbf{r}(t))] \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t) \rangle + \langle \nabla f(\mathbf{r}(t)) - \lambda^0 \nabla g(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}''(t) \rangle. \end{aligned}$$

Poniamo $\mathbf{A}(t) = \mathbf{H}_f(\mathbf{r}(t)) - \lambda^0 \mathbf{H}_g(\mathbf{r}(t))$. Per ipotesi, sappiamo che esiste $c > 0$ tale che

$$(2.17) \quad \langle \mathbf{A}(0) \mathbf{r}'(0), \mathbf{r}'(0) \rangle \geq c |\mathbf{r}'(0)|^2.$$

Osserviamo che, fissato $\varepsilon > 0$, se δ è abbastanza piccolo si ha $|a_{ij}(t) - a_{ij}(0)| \leq \varepsilon$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$, e, essendo φ di classe C^1 , per la (2.15)

$$(2.18) \quad |\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}'(0)| \leq \varepsilon |\mathbf{r}'(0)|.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}(t) \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t) \rangle &= \langle (\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}(0)) \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t) \rangle + \langle \mathbf{A}(0) (\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}'(0)), \mathbf{r}'(t) \rangle + \\ &\quad + \langle \mathbf{A}(0) \mathbf{r}'(0), \mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}'(0) \rangle + \langle \mathbf{A}(0) \mathbf{r}'(0), \mathbf{r}'(0) \rangle. \end{aligned}$$

Pertanto, se δ è sufficientemente piccolo, abbiamo, usando (2.14), (2.15) e (2.18)

$$\langle \mathbf{A}(t) \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t) \rangle \geq -n^2 \varepsilon (1 + M_1) |\mathbf{r}'(0)|^2 - 2a\varepsilon |\mathbf{r}'(0)|^2 + c |\mathbf{r}'(0)|^2$$

dove $a = n^2 \max_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}(0)|$. Se $\varepsilon \leq \frac{1}{2n^2[\varepsilon(1+M_1)+2a]}$ si trova

$$\langle \mathbf{A}(t)\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t) \rangle \geq \frac{c}{2} |\mathbf{r}'(0)|^2.$$

D'altra parte, essendo $\mathbf{r}''(t) = (x_1''(t), 0, \dots, 0)$ e

$$x_1''(t) = \sum_{i,j=2}^n \varphi_{x_i x_j}(\dots) x_i'(t) x_j'(t),$$

si ha: $|\mathbf{r}''(t)| \leq nM_2 |\mathbf{r}'(0)|^2$, dove $M_2 = \max_{i,j=1,\dots,n} |\varphi_{x_i x_j}|$.

Siccome poi $\nabla f(\mathbf{x}^0) - \lambda^0 \nabla g(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$, diminuendo eventualmente δ si ha:

$$|\nabla f(\mathbf{r}(t)) - \lambda^0 \nabla g(\mathbf{r}(t))| \leq \frac{c}{4nM_2}$$

e quindi

$$|\langle \nabla f(\mathbf{r}(t)) - \lambda^0 \nabla g(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}''(t) \rangle| \leq \frac{c}{4} |\mathbf{r}'(0)|^2.$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \phi''(t) &\geq \langle \mathbf{A}(t)\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}'(t) \rangle - |\langle \nabla f(\mathbf{r}(t)) - \lambda^0 \nabla g(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}''(t) \rangle| \geq \\ &\geq \frac{c}{2} |\mathbf{r}'(0)|^2 - \frac{c}{4} |\mathbf{r}'(0)|^2 = \frac{c}{4} |\mathbf{r}'(0)|^2. \end{aligned}$$

Ponendo $t = \bar{t}$ e sostituendo nella (2.16) si ottiene $f(\mathbf{x}^1) > f(\mathbf{x}^0)$.

La dimostrazione nel caso in cui la (2.12) sia definita negativa è analoga. \square

Esercizi

1. Siano $f(x, y) = x$ e $g(x, y) = y^2 - x^3$. Mostrare che $(0, 0)$ è di minimo per f , vincolato a $g(x, y) = 0$ ma che non è *critico* per f e pertanto non vale la (2.2).

Quale rilevanza ha questo esempio per il Teorema 2.1?

2. Trovare gli estremi vincolati di $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j \log x_j$ sotto la condizione $\sum_{j=1}^n x_j = 1$ (Esercizio 7, pag. 292, Vol. 1).

3. Determinare massimi e minimi di $f(x, y) = y(x^2 + \log(1 + x + y))$ in

$$X = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x \leq y \leq \frac{3-x}{3}, y \geq 0 \right\}.$$

4. Siano

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2)^{-1} & x^2 + y^2 \neq 4 \\ 1 & x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

e

$$D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{2}\} \quad \text{dove } a \in (0, \sqrt{2}).$$

Calcolare massimi e minimi di f in D_a . Determinare poi estremo superiore e inferiore di f in $D_{\sqrt{2}}$.

5. Determinare i punti della superficie $z^2 - xy = 1$ più vicini all'origine.
6. Determinare gli estremi di $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$ sotto la condizione $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.
7. Con riferimento all'Esempio 2.4, dimostrare che il moltiplicatore intermedio μ_2 è il massimo di $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2$ sotto le condizioni

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1 \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}^1 \rangle = 0$$

ed è il minimo di $f(\mathbf{x})$ sotto le condizioni

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1 \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}^2 \rangle = 0.$$

Interpretare geometricamente le due affermazioni.

8. Generalizzazione dell'Esempio 2.4. Sia $\mathbf{A} = (a_{ij})$ una matrice di ordine n , simmetrica e definita positiva.

a) Studiare i punti critici di $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2$ sotto la condizione

$$(*) \quad \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = 1.$$

Mostrare, in particolare, che, se $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$ sono i reciproci degli autovalori di \mathbf{A} , μ_1 e μ_n sono, rispettivamente, minimo e massimo vincolato (globali), mentre μ_2, \dots, μ_{n-1} sono *selle*.

b)* Siano $\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \dots, \mathbf{w}^n$ autovettori corrispondenti a μ_1, \dots, μ_n e soddisfacenti il vincolo (*). Si fissi j tra 1 ed n . Mostrare che μ_j è massimo di $|\mathbf{x}|^2$ sotto le condizioni

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= 1 \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}^k \rangle &= 0 \quad \text{per ogni } k = 1, \dots, j-1 \end{aligned}$$

e minimo di $|\mathbf{x}|^2$ sotto le condizioni

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= 1 \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}^k \rangle &= 0 \quad \text{per ogni } k = j+1, \dots, n. \end{aligned}$$

9. Sia $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, $n \geq 2$, $x_j \geq 0$, per $j = 1, \dots, n$.

a) Determinare il minimo di f sotto la condizione

$$x_1 x_2 \dots x_n = 1.$$

b) Dedurre la seguente disuguaglianza tra media geometrica e media aritmetica:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

dove $a_j \geq 0$ per ogni $j = 1, \dots, n$; (formula (3.14), pag. 91, Vol. 1).

10. Sia $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}$, $n \geq 2$, $x_j > 0$ per $j = 1, \dots, n$.

- a) Determinare il minimo di f sotto la condizione $x_1 x_2 \dots x_n = 1$.
 b) Dedurre la seguente disuguaglianza tra media *armonica* e media *geometrica*:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad \text{dove } a_j > 0 \text{ per ogni } j = 1, \dots, n.$$

11. Significato dei moltiplicatori di Lagrange. Siano f, g di classe $C^2(X)$, X aperto di \mathbb{R}^2 e t un parametro reale.

Sia inoltre (x_0, y_0) un punto critico per f , condizionato al vincolo $g(x, y) = t_0$, con moltiplicatore λ_0 .

- a) Dimostrare che, se $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - t)$ ha Hessiana non singolare in (x_0, y_0, λ_0) , il sistema

$$(**) \quad \begin{cases} f_x - \lambda g_x = 0 \\ f_y - \lambda g_y = 0 \\ g = t \end{cases}$$

definisce in un intorno di $t = t_0$ una famiglia di soluzioni $(x(t), y(t), \lambda(t))$.

- b) Posto $\varphi(t) = f(x(t), y(t)) =$ valore di f nel punto critico $(x(t), y(t))$, dimostrare che

$$\lambda(t) = \varphi'(t).$$

($\lambda(t)$ misura la sensibilità del valore critico $\varphi(t)$ rispetto a variazioni di livello di g).

[Suggerimento: a) applicare il teorema di Dini. b) Calcolare $\varphi'(t)$ col teorema di derivazione delle funzioni composte. Usare le prime due equazioni del sistema (**), e la seguente $g_x(x(t), y(t))x'(t) + g_y(x(t), y(t))y'(t) = 1$, che si ottiene per derivazione dalla terza.]

3. VINCOLI DI DISUGUAGLIANZA

3.1 Generalità sui problemi di programmazione

I problemi di estremo condizionato che si possono risolvere mediante la teoria svolta nella Sezione 2 sono caratterizzati dall'avere i vincoli espressi in forma di uguaglianza. Questa limitazione appare piuttosto rigida dal punto di vista delle applicazioni. Per esempio, nell'analisi economica ci si imbatte frequentemente nel problema di ottimizzare una funzione $f(\mathbf{x})$ quando la variabile \mathbf{x} è soggetta a uno o più vincoli del tipo $\varphi(\mathbf{x}) \leq 0$, oltre alla condizione di non-negatività delle sue componenti, cioè $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. È questo un tipico problema di programmazione matematica.

Usando la teoria sviluppata finora un problema come quello ora formalizzato ci obbligherebbe a un procedimento abbastanza lungo:

- a) la ricerca degli estremi (liberi) di f nell'interno della regione individuata dai vincoli e dove f è differenziabile;
 b) la ricerca degli estremi di f sulla frontiera di tale regione;
 c) la considerazione dei punti in cui f non è differenziabile.

Esempio 3.1 Determinare gli estremi di

$$f(x, y) = (x + y)|x^2 - y|$$

nella regione *ammissibile* (Fig. 2.8):

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - 2 \leq 0, x - 1 \leq 0, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

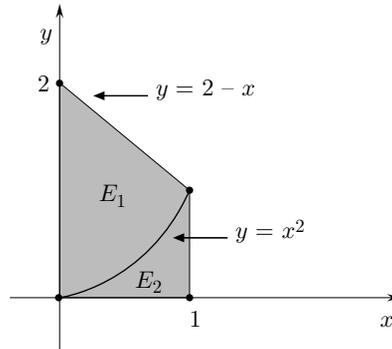


Figura 2.8. Regione ammissibile E nell'Esempio 3.1.

Il teorema di Weierstrass assicura che esistono massimo e minimo globali.

Si verifica facilmente che f non ha punti critici interni a E_1 ed E_2 . Sulla parabola $y = x^2$, f non è differenziabile e assume il valore 0 che è minimo globale in quanto $f \geq 0$ in E .

La frontiera di E è composta da quattro segmenti di retta:

- su $x = 1$, $0 \leq y \leq 1$ si ha: $f(1, y) = 1 - y^2$;
- su $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$ si ha: $f(x, 1) = x^3$;
- su $x = 0$, $0 \leq y \leq 2$ si ha: $f(0, y) = y^2$;
- e infine su $y = 2 - x$, $0 \leq x \leq 1$, si ha: $f(x, 2 - x) = 2(2 - x - x^2)$.

È facile allora trarre le seguenti conclusioni:

I punti sulla parabola $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, sono tutti punti di minimo globale, in corrispondenza ai quali $f = 0$. Il punto $(0, 2)$ è di massimo globale con $f(0, 2) = 4$ mentre il punto $(1, 0)$, dove $f = 1$, è di massimo relativo, essendo di massimo globale in E_2 .

Se la funzione obiettivo ha un'espressione analitica abbastanza semplice si può ricorrere a considerazioni grafiche.

Esempio 3.2 Metodo delle curve di livello. Determinare gli estremi di $f(x, y) = x + y$ nella regione $E = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 1 \leq 0, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Come si vede dalla Figura 2.9, per individuare i punti di estremo è sufficiente determinare la linea di massimo e di minimo livello che interseca la regione E . In questo caso $(0, 0)$ è punto di minimo con $f(0, 0) = 0$ mentre $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, punto di tangenza della circonferenza con la retta $x + y = \sqrt{2}$, è il punto di massimo.

I metodi indicati negli Esempi 3.1 e 3.2 risultano laboriosi o legati a situazioni troppo particolari. Occorrono metodi agevoli e adattabili a casi di sufficiente generalità.

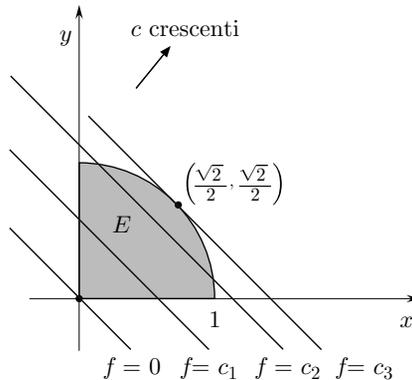


Figura 2.9. Linee di livello di f .

Il problema di cui ci occuperemo principalmente ha la formulazione seguente:

Siano $f, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, funzioni differenziabili.

(\mathcal{P}): Massimizzare f ristretta alla regione

$$E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \varphi_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, \dots, m\};$$

E viene detta regione *ammissibile*.

Tale formalizzazione richiede alcune precisazioni e commenti:

- non c'è alcuna relazione tra il numero delle variabili n , e il numero dei vincoli m . Naturalmente supporremo *sempre* che $E \neq \emptyset$;
- abbiamo assunto la differenziabilità della funzione obiettivo e delle funzioni φ_i in tutto \mathbb{R}^n per semplicità di trattazione, avendo come scopo quello di presentare le idee principali della programmazione;
- tutti i risultati che esporremo si estendono facilmente al problema della *minimizzazione* di f in E in quanto $\min_E f = -\max_E(-f)$. Gli estremi si intendono globali, rispetto alla regione E .
- Scrivere i vincoli nella forma $\varphi_j \leq 0$ anziché $\varphi_j \geq 0$ è del tutto convenzionale e generale. È ovvio che ogni vincolo può essere espresso nella forma $\varphi_j \leq 0$. In questo caso osserviamo che se $\varphi_j(\mathbf{x}^0) = 0$ e $\nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0) \neq \mathbf{0}$, $\nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0)$ è normale all'insieme di livello $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \varphi_j(\mathbf{x}) = 0\}$ e diretto verso l'esterno della regione $E_j = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \varphi_j(\mathbf{x}) \leq 0\}$ (Fig. 2.10). Si osservi che $E = \bigcap_{j=1}^m E_j$.

Il nostro primo obiettivo è, come al solito, cercare condizioni necessarie affinché un punto \mathbf{x}^0 sia soluzione di (\mathcal{P}). Come vedremo, si tratta di condizioni che generalizzano il metodo dei moltiplicatori di Lagrange e si basano, in ultima analisi, sulla linearizzazione delle funzioni f e φ_j in un intorno di \mathbf{x}^0 .

I Teoremi 2.1 e 2.4 richiedono che \mathbf{x}^0 sia punto regolare o, geometricamente, che la regione E ammissibile sia una varietà di dimensione $n - m$ in un intorno di \mathbf{x}^0 . Le condizioni di regolarità in programmazione fanno intervenire il *cono delle direzioni ammissibili* uscenti da \mathbf{x}^0 .

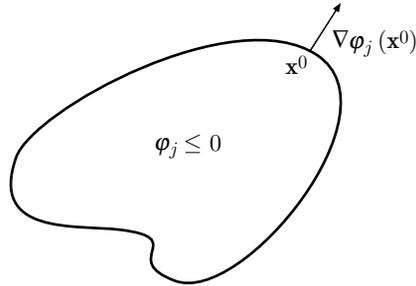


Figura 2.10. $\nabla\varphi_j(\mathbf{x}^0)$ è una normale esterna per l'insieme $E_j = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \varphi_j(\mathbf{x}) \leq 0\}$.

Più che di regolarità del punto \mathbf{x}^0 si parla di *qualificazione dei vincoli* nel punto \mathbf{x}^0 . A questo argomento è dedicato il prossimo paragrafo.

3.2 Direzioni ammissibili e qualificazione dei vincoli

Per ogni $\mathbf{x} \in E$, indichiamo con $J(\mathbf{x})$ l'insieme degli indici $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ tali che $\varphi_j(\mathbf{x}) = 0$. I vincoli corrispondenti si chiamano *attivi* in \mathbf{x} .

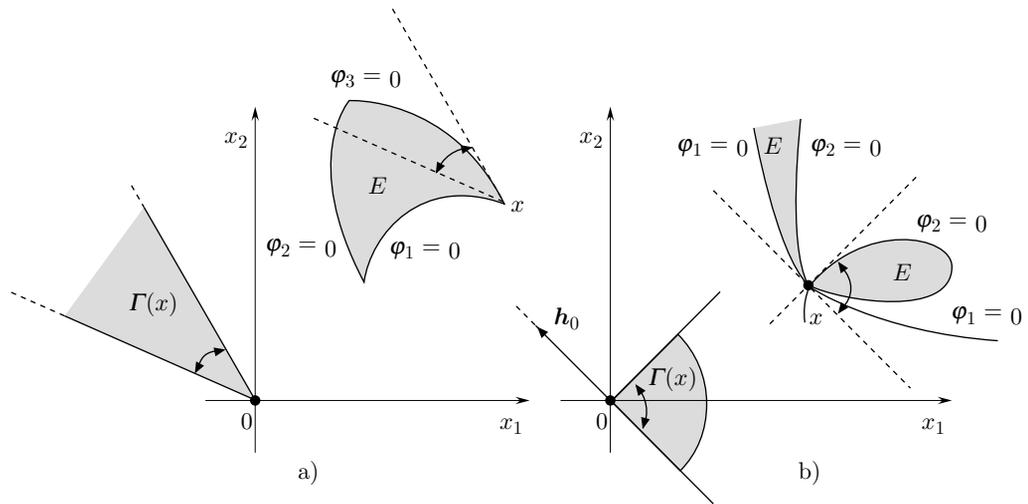


Figura 2.11. a) Il cono $\Gamma(\mathbf{x})$ delle direzioni ammissibili è convesso. b) $\Gamma(\mathbf{x})$ non è convesso: oltre alla parte ombreggiata, $\Gamma(\mathbf{x})$ contiene anche la semiretta $t\mathbf{h}_0$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Introduciamo ora la seguente definizione:

DEFINIZIONE 3.1 Sia $\mathbf{x} \in E$. Un vettore $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ costituisce una *direzione ammissibile* per E in \mathbf{x} se esiste una successione di punti $\{\mathbf{x}^k\} \subset E$ con le seguenti proprietà: per $k \rightarrow +\infty$

- i) $\mathbf{x}^k \rightarrow \mathbf{x}$ e $\mathbf{x}^k \neq \mathbf{x}$ definitivamente;
- ii) $\frac{\mathbf{x}^k - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}|} \rightarrow \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}$.

Se indichiamo con $\Gamma(E, \mathbf{x})$ o con $\Gamma(\mathbf{x})$, se E è fissato, l'insieme di tutte le direzioni ammissibili per E in \mathbf{x} , vale la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 3.1 $\Gamma(\mathbf{x})$ è un cono chiuso, non vuoto.

Dimostrazione. Evidentemente $\mathbf{0} \in \Gamma(\mathbf{x})$, dunque $\Gamma(\mathbf{x}) \neq \emptyset$. Inoltre se $\mathbf{h} \in \Gamma(\mathbf{x})$ anche $t\mathbf{h} \in \Gamma(\mathbf{x})$ per ogni $t \in \mathbb{R}^+$; infatti è sufficiente scegliere per $t\mathbf{h}$ la stessa successione $\{\mathbf{x}^k\}$ che va bene per \mathbf{h} ; quindi $\Gamma(\mathbf{x})$ è un cono. La dimostrazione che $\Gamma(\mathbf{x})$ è chiuso è suggerita nell'Esercizio 3. \square

In virtù della Proposizione 3.1, $\Gamma(\mathbf{x})$ si chiama *cono delle direzioni ammissibili* o *cono tangente* in \mathbf{x} .

È facile verificare (farlo per esercizio) che $\Gamma(\mathbf{x})$ contiene l'insieme dei vettori $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ tali che esiste una curva regolare $\mathbf{r}(t)$, definita per $t \in [0, \delta]$, $\delta > 0$, con le seguenti proprietà: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{x}$, $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{h}$ e $\mathbf{r}(t) \in E$, $\forall t \in [0, \delta]$.

Le direzioni ammissibili sono sostanzialmente quelle che puntano verso l'interno di E oppure sono tangenziali a E . Abbiamo osservato che se $\varphi_j(\mathbf{x}) = 0$, $\nabla\varphi_j(\mathbf{x})$ è nullo oppure è diretto verso l'esterno di E_j . Così, se $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ è tale che $\langle \nabla\varphi_j(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle > 0$, anche \mathbf{h} sarà diretto verso l'esterno di E_j .

È perciò naturale chiedersi che relazione esista tra $\Gamma(\mathbf{x})$ e il cono $\tilde{\Gamma}(\mathbf{x})$ dei vettori $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ tali che $\langle \nabla\varphi_j(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle \leq 0$ per ogni $j \in J(\mathbf{x})$, che si chiama *cono tangente linearizzato* in \mathbf{x} .

PROPOSIZIONE 3.2 Vale la seguente inclusione:

$$\Gamma(\mathbf{x}) \subseteq \tilde{\Gamma}(\mathbf{x}).$$

Dimostrazione. Siano $\mathbf{h} \in \Gamma(\mathbf{x})$ e $\{\mathbf{x}^k\}$ come nella Definizione 3.1. Ora, ogni φ_j è differenziabile; inoltre essendo $\mathbf{x}^k \in E$ si ha $\varphi_j(\mathbf{x}^k) \leq 0$ ed essendo $j \in J(\mathbf{x})$, si ha $\varphi_j(\mathbf{x}) = 0$; perciò

$$(3.1) \quad 0 \geq \varphi_j(\mathbf{x}^k) = \langle \nabla\varphi_j(\mathbf{x}), \mathbf{x}^k - \mathbf{x} \rangle + o(|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}|).$$

Dividendo la (3.1) per $|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}|$, passando al limite per $k \rightarrow \infty$ e ricordando la ii) della Definizione 3.1 si ottiene $\langle \nabla\varphi_j(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle \leq 0$; dunque $\mathbf{h} \in \tilde{\Gamma}(\mathbf{x})$. \square

Si noti che $\tilde{\Gamma}(\mathbf{x})$ è sempre convesso. Questo indica che in Figura 2.11b) $\Gamma(\mathbf{x}) \subset \tilde{\Gamma}(\mathbf{x})$. Un altro esempio è il seguente:

Esempio 3.3 Siano $\varphi_1(x_1, x_2) = x_2 + (x_1 - 1)^3$, $\varphi_2(x_1, x_2) = -x_2$. La regione ammissibile E è mostrata in Figura 2.12. $\Gamma(1, 0)$ coincide con la semiretta $-t(1, 0)$, $t \geq 0$.

Essendo $\nabla\varphi_1(1, 0) = (0, 1)$ e $\nabla\varphi_2(1, 0) = (0, -1)$ si ha

$$\tilde{\Gamma}(1, 0) = \{(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2; \quad h_1 \leq 0 \text{ e } -h_2 \leq 0\}$$

e cioè $\tilde{\Gamma}(1, 0)$ coincide con la retta $t(1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, ossia l'asse x_1 .

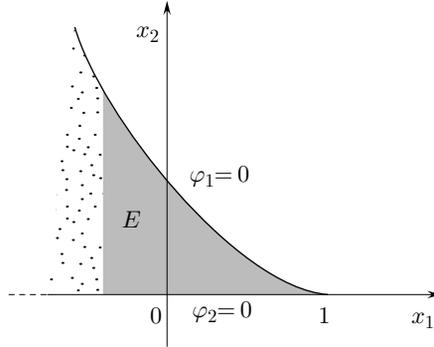


Figura 2.12. $\Gamma(1, 0)$ è l'insieme dei vettori $\mathbf{h} = (h_1, 0)$, $h_1 \leq 0$.

DEFINIZIONE 3.2 Si dice che i vincoli sono qualificati in $\mathbf{x}^0 \in E$ se

$$(3.2) \quad \Gamma(\mathbf{x}^0) = \tilde{\Gamma}(\mathbf{x}^0).$$

I seguenti tre lemmi illustrano condizioni sufficienti affinché m vincoli siano qualificati in un punto.

LEMMA 3.3 Se esiste $\mathbf{h}^* \in \mathbb{R}^n$ tale che, per ogni $j \in J(\mathbf{x}^0)$,

$$(*)^7 \quad \langle \nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h}^* \rangle < 0$$

oppure

$$\varphi_j \text{ è affine}^8 \text{ e } \langle \nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h}^* \rangle \leq 0,$$

allora vale (3.2) in \mathbf{x}^0 .

Dimostrazione. Occorre mostrare che $\tilde{\Gamma}(\mathbf{x}^0) \subseteq \Gamma(\mathbf{x}^0)$. Sia $\mathbf{h} \in \tilde{\Gamma}(\mathbf{x}^0)$. Facciamo vedere che per ogni $\delta > 0$, $\mathbf{h} + \delta \mathbf{h}^* \in \Gamma(\mathbf{x}^0)$. Sia $\{\varepsilon_k\}$ una successione di reali tale che $\varepsilon_k \downarrow 0$; poniamo $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^0 + \varepsilon_k(\mathbf{h} + \delta \mathbf{h}^*)$. Allora $\mathbf{x}^k \rightarrow \mathbf{x}^0$ e $\frac{\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0}{|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0|} = \frac{\mathbf{h} + \delta \mathbf{h}^*}{|\mathbf{h} + \delta \mathbf{h}^*|}$.

La Definizione 3.1 richiede ancora di mostrare che $\mathbf{x}^k \in E$, definitivamente per $k \rightarrow +\infty$.

Sia $j \in J(\mathbf{x}^0)$ e $\langle \nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h}^* \rangle < 0$. Allora, per la differenziabilità delle funzioni φ_j si ha:

$$\begin{aligned} \varphi_j(\mathbf{x}^k) &= \varphi_j(\mathbf{x}^0) + \langle \nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0 \rangle + o(|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0|) = \\ &= \varepsilon_k \langle \nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h} + \delta \mathbf{h}^* \rangle + o(\varepsilon_k). \end{aligned}$$

Poiché $\langle \nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h} + \delta \mathbf{h}^* \rangle = \langle \nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h} \rangle + \delta \langle \nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h}^* \rangle < 0$, si ottiene che per k grande, $\varphi_j(\mathbf{x}^k) < 0$.

Se $j \in J(\mathbf{x}^0)$, φ_j è affine e $\langle \nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h}^* \rangle \leq 0$ si ha:

$$\varphi_j(\mathbf{x}^k) = \varepsilon_k \langle \nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h} + \delta \mathbf{h}^* \rangle \leq 0 \text{ per ogni } k.$$

Se infine $j \notin J(\mathbf{x}^0)$, allora $\varphi_j(\mathbf{x}^0) < 0$ e, per continuità $\varphi_j(\mathbf{x}^k) < 0$ se k è abbastanza grande. In conclusione $\mathbf{x}^k \in E$ definitivamente e perciò $\mathbf{h} + \delta \mathbf{h}^* \in \Gamma(\mathbf{x}^0)$.

Poiché $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} (\mathbf{h} + \delta \mathbf{h}^*) = \mathbf{h}$ e $\Gamma(\mathbf{x}^0)$ è chiuso, segue che $\mathbf{h} \in \Gamma(\mathbf{x}^0)$. □

⁷La (*) è talvolta citata come condizione di Mangarasian-Fromowitz.

⁸ $\varphi_j(\mathbf{x})$ è affine se φ_j è un polinomio di 1° grado in x_1, \dots, x_n .

LEMMA 3.4 Se per ogni $j \in J(\mathbf{x}^0)$ esiste $\bar{\mathbf{x}}$ tale che

$$\begin{aligned} & o \quad \varphi_j(\bar{\mathbf{x}}) < 0 \quad e \quad \varphi_j \text{ è convessa} \\ & oppure \quad \varphi_j(\bar{\mathbf{x}}) \leq 0 \quad e \quad \varphi_j \text{ è affine} \end{aligned}$$

allora vale (3.2) in \mathbf{x}^0 .

Dimostrazione. Il vettore $\mathbf{h}^* = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0$ soddisfa le condizioni del Lemma 3.3. Infatti, se $j \in J(\mathbf{x}^0)$:

$$o \quad 0 > \varphi_j(\bar{\mathbf{x}}) \geq \langle \nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h}^* \rangle \quad (\text{per la convessità di } \varphi_j)$$

$$\text{oppure} \quad 0 \geq \varphi_j(\bar{\mathbf{x}}) = \langle \nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h}^* \rangle \quad (\text{poiché } \varphi_j \text{ è affine}) \quad \square$$

Dal Lemma 3.4 si deduce che se tutti i vincoli sono *affini*, essi sono qualificati in ogni punto. Si noti inoltre che, se ogni φ_j è convessa, anche E risulta un insieme convesso in \mathbb{R}^n .

LEMMA 3.5 Se i vettori $\nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0)$ per $j \in J(\mathbf{x}^0)$ sono linearmente indipendenti, allora vale (3.2) in \mathbf{x}^0 .

Dimostrazione. Possiamo supporre che $J(\mathbf{x}^0) = \{1, 2, \dots, p\}$, $p \leq n$. Poniamo $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ e $\mathbf{b} = (-1, -1, \dots, -1) \in \mathbb{R}^p$. Il sistema lineare $\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^0)\mathbf{h} = \mathbf{b}$ è certamente risolubile essendo p il rango di $\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^0)$. Se \mathbf{h}^* è una soluzione, essa soddisfa le condizioni del Lemma 3.3, poiché la j -esima equazione del sistema è $\langle \nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h}^* \rangle = -1$. \square

3.3 Il teorema di Karush-Kuhn-Tucker

Il seguente risultato è fondamentale in programmazione.

■ **TEOREMA 3.6** (di Karush-Kuhn-Tucker) Sia \mathbf{x}^0 soluzione di (\mathcal{P}) .

Se i vincoli sono qualificati in \mathbf{x}^0 , allora, per ogni $j \in J(\mathbf{x}^0)$, esiste $\lambda_j^0 \geq 0$ tale che

$$(3.3) \quad \nabla f(\mathbf{x}^0) = \sum_{j \in J(\mathbf{x}^0)} \lambda_j^0 \nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0).$$

Alla dimostrazione del teorema premettiamo alcuni commenti ed esempi.

OSSERVAZIONE 3.1 La (3.3) fa intervenire solo i vincoli attivi in \mathbf{x}^0 . Per la pratica del calcolo, poiché \mathbf{x}^0 non è conosciuto a priori, è più conveniente introdurre la lagrangiana

$$(3.4) \quad \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(\mathbf{x}),$$

nella quale intervengono tutti i vincoli, e osservare che la condizione necessaria del teorema equivale a richiedere che \mathbf{x}^0 e $\boldsymbol{\lambda}^0$ siano soluzione del seguente sistema:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \text{a) } \quad & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} = 0 & k = 1, \dots, n \\ \text{b) } \quad & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = -\varphi_j \geq 0 & j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

e inoltre

$$\text{c) } \lambda_j \geq 0, \lambda_j \varphi_j(\mathbf{x}) = 0 \quad j = 1, \dots, m.$$

Si noti che se $j \notin J(\mathbf{x}^0)$ le (3.5c) implicano $\lambda_j = 0$ per cui nella (3.5a) compaiono in realtà solo i vincoli attivi.

Le (3.5) sono dette *condizioni di Karush-Kuhn-Tucker*.

Esempio 3.4 Si voglia minimizzare $g(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^3 + x_2 + 1$ nella regione

$$E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Usando la relazione $\min_E g = -\max_E(-g)$, questo problema rientra nella nostra formulazione ponendo

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= -g(x_1, x_2) = -1 - x_2 - (x_1 - 1)^3, \\ \varphi_1(x_1, x_2) &= -x_1, \quad \varphi_2(x_1, x_2) = -x_2. \end{aligned}$$

I vincoli sono affini e pertanto vale la (3.2) in ogni punto.

La lagrangiana è $\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = -1 - x_2 - (x_1 - 1)^3 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$.

Il sistema (3.5) diventa:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = -3(x_1 - 1)^2 + \lambda_1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = -1 + \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 x_1 = 0, \lambda_2 x_2 = 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Si trova subito $\lambda_2 = 1$ e quindi $x_2 = 0$. Se poi $x_1 = 0$ si trova $\lambda_1 = 3$, mentre se $\lambda_1 = 0$ si trova $x_1 = 1$.

Dunque le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker selezionano i due possibili punti $(0, 0)$ e $(1, 0)$, con $f(0, 0) = 0$ e $f(1, 0) = -1$.

Osserviamo ora che $f|_E \leq 0$ e pertanto 0 è massimo globale per f ovvero di minimo globale per g .

OSSERVAZIONE 3.2 Come traspare dall'Esempio 3.4, le condizioni (3.5) si scrivono nella stessa maniera per i problemi seguenti:

$$\max f \quad \text{con i vincoli nella forma } \varphi_j \leq 0$$

e

$$\min f \quad \text{con i vincoli nella forma } \varphi_j \geq 0.$$

OSSERVAZIONE 3.3 I numeri λ_j che compaiono nella (3.3) prendono il nome di *moltiplicatori di Karush-Kuhn-Tucker*. Per la loro interpretazione valgono considerazioni del tutto analoghe a quelle fatte per i moltiplicatori di Lagrange. Infatti, nella (3.3) compaiono solo i vincoli attivi che si comportano dunque come vincoli di uguaglianza per $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$. Per quanto riguarda il loro segno si veda l'Esercizio 4.

Veniamo ora alla dimostrazione del teorema di Karush-Kuhn-Tucker.

Premettiamo due lemmi. Incominciamo con l'osservare che, se \mathbf{x}^0 è soluzione di (\mathcal{P}) , allora f non può crescere lungo una direzione ammissibile uscente da \mathbf{x}^0 .

LEMMA 3.7 *Sia \mathbf{x}^0 soluzione di (\mathcal{P}) . Allora, per ogni $\mathbf{h} \in \Gamma(\mathbf{x}^0)$*

$$(3.6) \quad \langle \nabla f(\mathbf{x}^0), \mathbf{h} \rangle \leq 0.$$

Dimostrazione. Sia $\{\mathbf{x}^k\}$ come nella Definizione 3.1. Poiché $f(\mathbf{x}^0)$ è il massimo di f in E , ed f è differenziabile in E , si ha:

$$(3.7) \quad 0 \geq f(\mathbf{x}^k) - f(\mathbf{x}^0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}^0), \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0 \rangle + o(|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0|).$$

Dividendo ambo i membri della (3.7) per $|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0|$ e ricordando che $\frac{\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0}{|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0|} \rightarrow \mathbf{h}$ per $k \rightarrow +\infty$ si ottiene la (3.6). \square

LEMMA 3.8 (di Farkas) *Siano \mathbf{v} e $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_p$ vettori di \mathbb{R}^n . Allora vale l'inclusione*

$$(3.8) \quad \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{h}, \mathbf{w}_j \rangle \leq 0, \quad \forall j = 1, \dots, p\} \subseteq \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{h}, \mathbf{v} \rangle \leq 0\}$$

se e solo se esistono p scalari $\lambda_j \geq 0$, tali che

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^p \lambda_j \mathbf{w}_j.$$

Omettiamo la dimostrazione del lemma illustrandone solo il significato geometrico. L'insieme a destra della (3.8) è il semispazio V^- dei vettori che formano con \mathbf{v} un angolo ottuso. Analogamente, se W_j^- è il semispazio dei vettori che formano con \mathbf{w}_j un angolo ottuso, l'insieme a sinistra della (3.8) rappresenta $\bigcap_{j=1}^p W_j^-$.

Il lemma afferma che, se $\bigcap_{j=1}^p W_j^- \subset V^-$, allora \mathbf{v} è combinazione lineare a coefficienti non negativi dei \mathbf{w}_j (Fig. 2.13).

Dimostrazione del teorema di Karush-Kuhn-Tucker. Essendo i vincoli qualificati in \mathbf{x}^0 , per ogni $\mathbf{h} \in \Gamma(\mathbf{x}^0)$ e ogni $j \in J(\mathbf{x}^0)$ si ha $\langle \nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{h} \rangle \leq 0$. D'altra parte, il Lemma 3.7 implica che, se $\mathbf{h} \in \Gamma(\mathbf{x}^0)$, allora $\langle \nabla f(\mathbf{x}^0), \mathbf{h} \rangle \leq 0$.

Applicando il lemma di Farkas con $\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}^0)$ e $\mathbf{w}_j = \nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0)$ si ottiene immediatamente la tesi. \square

3.4 Condizioni sufficienti

Abbiamo già avuto modo di constatare nel Lemma 3.4 come la presenza di vincoli convessi o affini semplifichi molto la verifica della condizione (3.2).

Se poi la funzione obiettivo è concava, le condizioni di Kuhn-Tucker diventano necessarie e sufficienti.

■ **TEOREMA 3.9** *Supponiamo che f sia concava e che le funzioni φ_j , $j = 1, \dots, m$, siano convesse. Sia $\mathbf{x}^0 \in E$ un punto in cui i vincoli sono qualificati. Allora \mathbf{x}^0 è soluzione di (\mathcal{P}) se e solo se, per ogni $j \in J(\mathbf{x}^0)$, esiste $\lambda_j^0 \geq 0$ tale che valga la (3.3).*

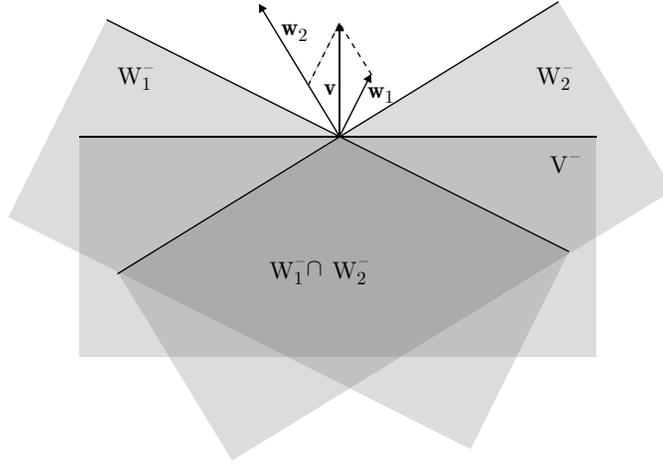


Figura 2.13. Essendo $W_1^- \cap W_2^- \subseteq V^-$, \mathbf{v} è combinazione lineare a coefficienti positivi di \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 .

Dimostrazione. Occorre mostrare solo la sufficienza della (3.3).

Dalla concavità di f e dalla (3.3), si ha, per ogni $\mathbf{x} \in E$:

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}^0), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{j \in J(\mathbf{x}^0)} \lambda_j^0 \langle \nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle.$$

Dalla convessità delle φ_j e dal fatto che $\varphi_j(\mathbf{x}^0) = 0$ se $j \in J(\mathbf{x}^0)$, si ricava:

$$\varphi_j(\mathbf{x}) \geq \langle \nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 \rangle.$$

Essendo $\lambda_j^0 \geq 0$ e $\varphi_j(\mathbf{x}) \leq 0$ per $\mathbf{x} \in E$, si trova

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0) + \sum_{j \in J(\mathbf{x}^0)} \lambda_j^0 \varphi_j(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0)$$

e perciò \mathbf{x}^0 è soluzione di (P). □

Esempio 3.5 Si voglia massimizzare $f(x_1, x_2) = x_1 + \log(1 + x_2)$ nell'insieme $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 - 1 \leq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

Come somma di due funzioni concave f è concava; inoltre $\varphi_1 = x_1 + x_2 - 1$, $\varphi_2 = -x_1$, $\varphi_3 = -x_2$ sono affini e pertanto convesse.

La lagrangiana del problema è

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = x_1 + \log(1 + x_2) - \lambda_1(x_1 + x_2 - 1) + \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_2.$$

Le condizioni di Karush-Kuhn-Tucker, in questo caso necessarie e sufficienti, sono:

$$1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{1}{1 + x_2} - \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0$$

$$\lambda_1(x_1 + x_2 - 1) = 0, \lambda_2 x_1 = 0, \lambda_3 x_2 = 0.$$

Con un po' di pazienza si trova l'unico punto $(1, 0)$ con i moltiplicatori $(1, 0, 0)$. Il valore $f(1, 0) = 1$ è pertanto massimo globale per f .

Le condizioni del Teorema 3.9 sono verificate in particolare quando il problema è di programmazione *lineare* (f e φ_j affini). In questo tipo di problemi la teoria ha raggiunto un notevole grado di perfezione tanto che a essa sono dedicati interi volumi.

3.5 Vincoli di uguaglianza e disuguaglianza

Terminiamo il capitolo esaminando brevemente il caso in cui vincoli di uguaglianza e di disuguaglianza sono presenti simultaneamente.

Il problema si formula come segue:

(\mathcal{P}^*). *Massimizzare la funzione f soggetta ai vincoli:*

$$\begin{aligned} \varphi_j(\mathbf{x}) &\leq 0 & j = 1, \dots, m \\ g_i(\mathbf{x}) &= 0 & i = 1, \dots, k \quad (k < n). \end{aligned}$$

dove $f, \varphi_j, g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono differenziabili.

In questo caso, il cono tangente linearizzato in un punto \mathbf{x} ammissibile è definito da

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n : \begin{aligned} \langle \nabla \varphi_j(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle &\leq 0, & \forall j \in J(\mathbf{x}) \\ \langle \nabla g_i(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle &= 0, & \forall i = 1, \dots, k \end{aligned} \right\}$$

e la condizione di qualificazione dei vincoli in \mathbf{v} è ancora espressa dall'uguaglianza tra il cono delle direzioni ammissibili $\Gamma(\mathbf{x})$ e $\tilde{\Gamma}(\mathbf{x})$.

Condizioni sufficienti per la qualificazione dei vincoli in \mathbf{x} sono le seguenti

- I gradienti $\nabla \varphi_j(\mathbf{x})$, $j \in J(\mathbf{x})$ e $\nabla g_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, k$ sono linearmente indipendenti.
- (Mangarasian-Fromowitz). Esiste un vettore $\mathbf{h}^* \in \mathbb{R}^n$, tale che

$$\begin{aligned} \langle \nabla \varphi_j(\mathbf{x}), \mathbf{h}^* \rangle &< 0, & \forall j \in J(\mathbf{x}) \\ \langle \nabla g_i(\mathbf{x}), \mathbf{h}^* \rangle &= 0, & i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Il teorema di Karush-Kuhn-Tucker si generalizza allora nel modo seguente:

■ **TEOREMA 3.10** *Sia \mathbf{x}^0 soluzione del problema (\mathcal{P}^*). Se i vincoli sono qualificati in \mathbf{x}^0 e le funzioni g_i , $i = 1, \dots, k$, sono differenziabili con continuità, esistono m scalari $\lambda_j^0 \geq 0$ e k scalari μ_i^0 tali che*

$$\nabla f(\mathbf{x}^0) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^0 \nabla \varphi_j(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^k \mu_i^0 \nabla g_i(\mathbf{x}^0)$$

e

$$\lambda_j \varphi_j(\mathbf{x}^0) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Esercizi

1. Determinare gli estremi di $f(x, y) = y - x^2$ nella regione $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + x^3 \leq 0, x + y + 1 \geq 0\}$, usando sia il metodo delle curve di livello, sia il metodo dei moltiplicatori di Kuhn-Tucker. Mostrare che (3.2) è verificata in ogni punto di E .

2. Dire se nei casi illustrati in Figura 2.14a) e b) è verificata la condizione (3.2) in $(0, 0)$. Qual è la rilevanza degli esempi in Figura 2.14 rispetto al Lemma 3.5?

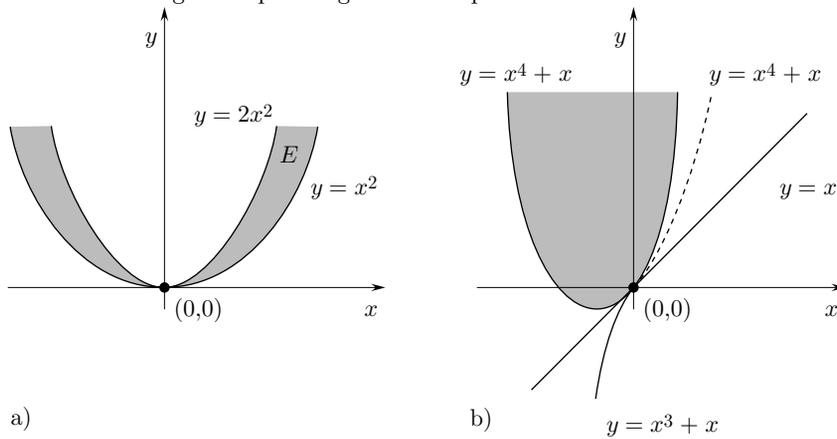


Figura 2.14.

3.* Dimostrare che $\Gamma(\mathbf{x})$ è chiuso.

[Suggerimento: Sia $\{\mathbf{h}^i\}$ una successione contenuta in $\Gamma(\mathbf{x})$, tale che $\mathbf{h}^i \rightarrow \mathbf{h}$ per $i \rightarrow +\infty$. Per ogni i , sia $\{\mathbf{x}_i^k\}$ come nella Definizione 3.1. Estrarre con un procedimento diagonale una sottosuccessione $\mathbf{y}^s = \mathbf{x}_{i_s}^{k_s}$ convergente a \mathbf{h} , tale che $\frac{\mathbf{y}^s - \mathbf{h}}{|\mathbf{y}^s - \mathbf{h}|} \rightarrow \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}$.]

4.* In base al significato dei moltiplicatori di Kuhn-Tucker illustrare la ragione della loro positività.

5. Dimostrare che se, oltre ai vincoli $\varphi_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, \dots, m$, si richiede la non-negatività di tutte le variabili: $x_k \geq 0, k = 1, \dots, n$ allora il complesso delle condizioni (3.5) si può scrivere nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} \leq 0, \quad x_k \geq 0, \quad x_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} = 0 \quad & \text{per ogni } k = 1, \dots, n \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} \geq 0, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \lambda_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = 0 \quad & \text{per ogni } j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

dove $\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(\mathbf{x})$.

6. Determinare il massimo globale di

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_3 + x_2$$

con i vincoli $x_1 + x_2 + x_3 - 1 \leq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

7. Risolvere il problema della dieta (Esempio 1.3) quando:

$$\begin{aligned} n = 2; \quad c_1 = 2, \quad c_2 = 1 \\ m = 3; \quad \mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2,3}} = \begin{pmatrix} 30 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (20, 16, 9). \end{aligned}$$

8. Determinare il minimo di $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ con i vincoli $x_1^3 - x_2 \geq 0, x_2 \geq 0$. Si può usare il metodo dei moltiplicatori di Kuhn-Tucker?