

SIMMETRIA DI LORENTZ E TEORIA DEI CAMPI

MECCANICA
QUANTISTICA } Lo spin (di un elettrone) e^-
una caratteristica fondamentale,
ma qual'è la sua origine?

⇒ L'INVARIANZA DI LORENTZ, e quindi
la teoria dei campi con il suo formalismo
lorentz-covariante, ci fornisce la connessione
profonda con lo spin.

RAPPRESENTAZIONI UNITARIE DEL GRUPPO DI POINCARÉ [5.8.1]

La teoria deve essere invariante sotto:

- traslazioni : $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+a)$, $\forall a^{\nu} = \text{const}$
- rotazioni + boost : invarianza di Lorentz $x_{\mu} \rightarrow \Lambda_{\mu}^{\nu} x_{\nu}$

\Rightarrow traslazioni \oplus Lorentz = GRUPPO DI POINCARÉ $ISO(1,3)$
(isometrie di Minkowski)

Diverse particelle hanno massa, momento, indici di spin, ma anche altri numeri quantici.

Sotto Poincaré solamente il momento e le proiezioni di spin devono cambiare, ma non il resto.

\Rightarrow Una **PARTICELLA** può essere definita come il set di stati che si mischiano tra loro sotto transf. di Poincaré:

$$|\psi\rangle \rightarrow P|\psi\rangle$$

• per esempio per un campo scalare φ ,
I valori del campo in tutti i punti "x", $\varphi(x)$
forma una rappresentazione.

Sotto traslazioni $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+a)$

In generale, per ogni rappresentazione possiamo fissare una **BASI DI STATI** $|\psi_i\rangle$:

$$|\psi_i\rangle \rightarrow P_{ij} |\psi_j\rangle, \quad P \in \text{ISO}(1,3)$$

P_{ij} è una **RAPPRESENTAZIONE** del gruppo.

L'indice i può essere discreto (e.g. spin) o continuo (e.g. momento) e la rapp. può essere finito- o infinito-dimensionale.

Se non c'è un sottoinsieme degli stati $\{|\psi_i\rangle\}$ che trasforma solo al suo interno, la rapp. è **IRRIDUCIBILE**.

Vogliamo anche che la rappresentazione sia **UNITARIA**.

Un elemento di matrice $M_{ij} \sim \langle \psi | \psi \rangle_{in}$

deve essere invariante di Poincaré :

$$M_{ij} \rightarrow \langle \psi | P^\dagger P | \psi \rangle_{in} \equiv \langle \psi | P^\dagger P | \psi \rangle_{in} \Rightarrow \boxed{P^\dagger P = 1}$$

DEFINIZIONE DI UNA PARTICELLA:

PARTICELLE trasformano sotto **RAPPRESENTAZIONI**
IRRIDUCIBILE e **UNITARIA** del gruppo di Poincaré

Tensori costanti tipo ρ (scalare), V_μ (vettore), $T_{\mu\nu}, \dots$ sono rappresentazioni finito-dimensionali, ma non unitarie.

e.g. vettore:

$$|\psi\rangle = c_0|V_0\rangle + c_1|V_1\rangle + c_2|V_2\rangle + c_3|V_3\rangle$$

la norma darebbe come

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{i=0}^3 |c_i|^2 \geq 0 \rightarrow \text{Non Lorentz-invariante}$$

In termini dei boost: $\Lambda^\dagger \neq \Lambda^{-1} \rightarrow \text{Non UNITARIA.}$

Potremmo modificare la norma:

$$\langle\psi|\psi\rangle \equiv |c_0|^2 - |c_1|^2 - |c_2|^2 - |c_3|^2 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Non e'} \\ \text{strettamente} \\ \text{positiva.} \end{array}$$

\Rightarrow genera probabilità anche $> 1 \rightarrow$ inconsistente.

Per i campi di spin-1 vedremo come si risolve questo problema.

RAPPRESENTAZIONI IRRIDUCIBILI E UNITARIE
DEL GRUPPO DI POINCARÉ SONO
INFINITO-DIMENSIONALI

Conseguenza del fatto che $ISO(1,3)$ è non-compacto.

Particelle hanno momento "p", variabile continua.

CLASSIFICAZIONE DI WIGNER (1939)

Tutte le rapp. irred. del gruppo di Poincaré sono classificate dagli autovalori dei due INVARIANTI DI CASIMIR DEL GRUPPO:

massa $m^2 = C_1 = P^\mu P_\mu$

spin $C_2 = W^\mu W_\mu = -m^2 J(J+1)$

P_μ : momento

W_μ : pseudo-vettore di Pauli-Lubanski

$$W_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} J^{\nu\sigma} P^\rho$$

$$m \geq 0 \quad \& \quad J = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

- Se $J > 0$ & $m > 0 \rightarrow$ ci sono $2J+1$ stati indipendenti
- Se $J > 0$ & $m = 0 \rightarrow$ solo 2 stati di polarizzazione.
- Se $J = 0 \rightarrow$ 1 solo stato per ogni m .



Un problema:

Per scrivere una Lagrangiana Lorentz-invariante per un campo di spin-1 lo descriviamo come un vettore $V_\mu(x)$. Ma un campo di spin-1 ha 3 d.o.f. se $m > 0$, 2 se $m = 0$, d'altro canto V_μ ha 4 elementi.

Questo mismatch è l'origine della ridondanza che sta alla base dell'invarianza di gauge.

RICHIAMI DI TEORIA DEI GRUPPI

- Un **GRUPPO** G è un insieme di elementi $\{g_i\}$ e un'operazione "o"
 - $\forall g_i, g_j \in G \quad g_i \circ g_j = g_k \in G$ CHIUSURA
 - $\forall g_i, g_j, g_k \in G \quad (g_i \circ g_j) \circ g_k = g_i \circ (g_j \circ g_k)$ ASSOCIATIVITA'
 - $\exists e : e \circ g = g \circ e = g \quad \forall g \in G$ IDENTITA'
 - $\forall g \exists g^{-1} : g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ INVERSO

Un **GRUPPO DI LIE** è un gruppo con un numero infinito di elementi che possono essere caratterizzati da parametri che variano in maniera continua

- Una **RAPPRESENTAZIONE** è un insieme di matrici in corrispondenza 1 a 1 con gli elementi del gruppo

$$g \rightarrow D(g)$$

e che soddisfa la stessa legge di moltiplicazione.

Se la matrice è $n \times n \rightarrow n$ è la dimensione della rapp.

Queste matrici agiscono su uno SPAZIO VETTORIALE V .

$$\forall v \in V \quad v \xrightarrow{g} v_g = D(g)v \quad \left[\begin{array}{l} \text{o anche} \\ v_g = D(g)v D(g)^{-1} \\ \text{se } v \text{ è una matrice} \end{array} \right]$$

A representation is **REDUCIBLE** if there is a subspace $U \subset V$, $U \neq V$ such that $\forall u \in U \rightarrow D(g)u \in U$.
If not, it is **IRREDUCIBLE (IRREP)**.

ALGEBRA DI LIE

The Lie algebra \mathfrak{g} of a Lie group G consists of all infinitesimal displacements away from the identity.

Near the identity e : $g = e + i\alpha_i t_i \rightarrow$ GENERATORS OF G
for finite transt. $\Rightarrow g = \exp(i\alpha_i t_i)$
infinitesimal parameters

The number of generators (dimension of the vector space \mathfrak{g}) is equal to the number of independent parameters that are required to define an element of G : $N^2 - 1$ for $SU(N)$, $\frac{1}{2}N(N-1)$ for $SO(N)$.

DIMENSION OF A LIE GROUP = NUMBER OF ITS INDEP. GENERATORS

The commutation relations define the Lie algebra \mathfrak{g}

$$[T_a, T_b] = \sum_{k=1}^n f_{ab}^k T_k \quad f_{ab}^c : \text{STRUCTURE CONSTANTS}$$
$$f_{ab}^c = -f_{ba}^c$$

Must satisfy the Jacobi identity:

$$[T_a, [T_b, T_c]] + [T_c, [T_a, T_b]] + [T_b, [T_c, T_a]] = 0$$

The generators can be defined in terms of representation matrices close to the identity.

$$D(g(\theta)) = I - i\theta^a t^a + O(\theta^2)$$

ADJOINT REPRESENTATION

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}^c T_c$$

The matrices $(T_A^{\text{ad}})_B^C = f_{AB}^C$ form a representation for the Lie Algebra

RAPPRESENTAZIONI DEL GRUPPO DI LORENTZ $SO(1,3)$ [5.10.7]

Il gruppo di Lorentz è l'insieme di rotazioni e boost che lasciano invariata la metrica di Minkowski:

$$\Lambda^T g \Lambda = g, \quad g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Nella rappresentazione dei 4-vettori $V_\mu \rightarrow \Lambda_{\mu\nu} V_\nu$

Estraiamo l'algebra di Lie del gruppo a partire da questa rapp. Studiamo trasformazioni infinitesime: $V_\mu \rightarrow V_\mu + \delta V_\mu$

$$\delta V_0 = \beta_i V_i \quad \delta V_i = \beta_i V_0 - \epsilon_{ijk} \partial_j V_k \quad \begin{array}{l} \beta_i: \text{boost} \\ \partial_i: \text{rotazioni} \end{array}$$

Ovvero:

$$\delta V_\mu = i \sum_{i=1}^3 \left(\partial_i (\mathcal{J}_i)_{\mu\nu} + \beta_i (K_i)_{\mu\nu} \right) V_\nu$$

↑
generatori dell'algebra di Lorentz

$$J_1 = i \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = i \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & -1 & & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = i \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.14)$$

$$K_1 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = i \begin{pmatrix} 0 & & -1 & \\ & 0 & & \\ -1 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad K_3 = i \begin{pmatrix} 0 & & & -1 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ -1 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Soddisfanno:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = i \epsilon_{ijk} \mathcal{J}_k \\ [\mathcal{J}_i, K_j] = i \epsilon_{ijk} K_k \\ [K_i, K_j] = -i \epsilon_{ijk} \mathcal{J}_k \end{array} \right\} \text{ algebra delle rotazioni } SO(3)$$

Lorentz algebra
 $so(1,3)$

Per trasformazioni finite: $\Lambda = \exp(i \partial_i \mathcal{J}_i + i \beta_i K_i)$

I generatori Σ_i sono Hermitiani: $\Sigma_i^\dagger = \Sigma_i$, ma $K_i^\dagger = -K_i$ anti-Hermitian

⇒ Le rappresentazioni Λ finito-dimensionali costruite in questo modo NON SONO UNITARIE: $\Lambda^{-1} \neq \Lambda^\dagger$

⇒ La base della nostra irrep unitaria deve dipendere da p ($0 \times$) e quindi è infinito-dimensionale:

• per spin-1 abbiamo le tre polarizzazioni $\epsilon_\mu^i(p)$

• Una rappresentazione infinito-dimensionale è quella che agisce su funzioni:

Generatori: $L^{\mu\nu} = i(x^\mu J^\nu - x^\nu J^\mu)$ → ai boost Momento angolare generalizzato

I generatori dell'algebra di Lorentz generano solamente elementi del gruppo di Lorentz connessi in maniera continua con l'identità:

$SO^+(1,3)$: proper orthochronous

La parità $P = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ e inversione temporale $T = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$

[nella rapp dei 4-vettori] $P, T \in SO(1,3)$ ma non sono connessi con $\mathbb{1}$

$so(1,3) \rightarrow SO^+(1,3)$ proper orthochronous - o "gruppo ristretto"

$so(1,3) \otimes P \rightarrow O^+(1,3)$ orthochronous

$g \in SO(1,3)$: $\det(g) = 1 \rightarrow$ proper $\det(P) = \det(T) = -1$

Per costruire irrep del gruppo di Lorentz possiamo usare quello che già sappiamo sulle irrep di $SU(2)$.

Definiamo: $J_i^+ = \frac{1}{2} (J_i + iK_i)$; $J_i^- = \frac{1}{2} (J_i - iK_i)$

Soddisfanno l'algebra $\left\{ \begin{array}{l} [J_i^+, J_j^+] = i \epsilon_{ijk} J_k^+ \\ [J_i^-, J_j^-] = i \epsilon_{ijk} J_k^- \\ [J_i^+, J_j^-] = 0 \end{array} \right\}$ due sub-algebre che commutano fra loro

↓

$so(1,3) = su(2)_L \oplus su(2)_R$

→ Le irrep del gruppo di Lorentz si possono determinare dalle rappresentazioni di $su(2) = so(3)$ [Rotazioni in $3D$]

⇒ specificate da un numero semi-intero

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

⇒ agisce su uno spazio vettoriale di $dim = (2j+1)$

Irrep. del gruppo di Lorentz e' descritta da due numeri → (A, B) $A, B = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$

$(2A+1) \cdot (2B+1)$ degrees of freedom

Il generatore delle rotazioni è $\vec{J} = \vec{J}^+ + \vec{J}^-$
(sommati vettorialmente: Clebsch-Gordan)

$su(2) \oplus su(2)$	$(0,0)$	$(\frac{1}{2}, 0)$	$(0, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 1)$
$so(3)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1 \oplus 0$	1	1	$2 \oplus 1 \oplus 0$
	↑ scalare	↑ spinore	↑ spinore	↑ vettore	↑ scalare		

Le rappresentazioni TENSORIALI

T_{M_1, \dots, M_n} corrispondono a $\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$

Sono rapp. IRRIDUCIBILI di **LORENTZ**,
ma sono RIDUCIBILI sotto il sottogruppo $SO(3)$ delle
rotazioni 3D \rightarrow describe lo **SPIN**.

Esempio: $A_{\mu} \sim \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1 \oplus 0$
vettore scalare.



Queste inducono le rappresentazioni di **Poincaré**.

Infatti:

Per un campo con spin s abbiamo i
vettori di polarizzazione $\left(\epsilon_{\mu}^i(p) \text{ o } u_{\mu}^{\alpha}(p), v_{\mu}^{\alpha}(p)\right)$
che dipendono da p : irrep. infinito-dimensionale.

1) Fissiamo un dato p^{μ} .

2) La irrep. di Poincaré è **INDOTTA** dal sottogruppo che
lascia invariato p^{μ} : **GRUPPO PICCOLO**.

Il gruppo piccolo ha irrep. finito-dimensionali.

3) Applicando poi una trasf. di Lorentz possiamo ottenere
la rapp. per p^{μ} generico.

CASO $m \neq 0$

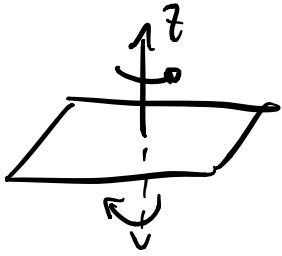
$p^\mu = (m, 0, 0, 0) \rightarrow$ Gruppo piccolo = $SO(3) \rightarrow$ rotazioni spaziali

$SO(3)$ ha irrep di spin J con $2J+1$ d.o.f.

$J=1 \rightarrow$ d.o.f. = 3

CASO $m=0$

$p^\mu = (E, 0, 0, E) \rightarrow$ Gruppo piccolo = $ISO(2)$ isometrie del piano euclideo 2D.



→ solo 2 d.o.f. per ogni spin J
rot. \downarrow LH o RH

VETTORI MASSIVI

[5.8.2.2]

Vogliamo descrivere una particella con: $m > 0$
spin $J=1$

Il tensore più piccolo che contiene

un vettore è $A_\mu \sim \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1 \oplus 0$

⇒ Contiene anche uno scalare, che dobbiamo eliminare.

Scriviamo la Lagrangiana Lorentz-invariante più generale:

$$\mathcal{L} = \frac{a}{2} A_\mu \square A_\mu + \frac{b}{2} A_\mu \partial_\mu \partial_\nu A_\nu + \frac{1}{2} m^2 A_\mu^2, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

• Il termine $(\partial_\nu A_\nu)$, per essere Lorentz-invariante, obbliga A_ν a trasformare come ∂_ν , ovvero $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. ✓

• Equazione del moto:

$$a \square A_\mu + b \partial_\mu \partial_\nu A_\nu + m^2 A_\mu = 0 \quad \leftarrow \text{Applichiamo } \partial_\mu$$

$$[(a+b)\square + m^2](\partial_\mu A_\mu) = 0.$$

Per $a = -b$ otteniamo il VINCOLO $(\partial_\mu A_\mu) = 0$

⇒ RIMOVE 1 grado di libertà.

Facendolo in maniera Lorentz-invariante deve essere necessariamente lo scalare

LAGRANGIANA DI PROCA

Prendiamo $a = -b = 1$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A_\mu \square A_\mu - \frac{1}{2} A_\mu \partial_\mu \partial_\nu A_\nu + \frac{1}{2} m^2 A_\mu^2 =$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} m^2 A_\mu^2 \quad \text{con} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Eq. del moto:
$$\begin{cases} \partial_\mu A_\mu = 0 \\ (\square + m^2) A_\mu = 0 \end{cases}$$

Soluzione:
$$A_\mu(x) = \sum_i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \tilde{\alpha}_i(\vec{p}) \varepsilon_\mu^i(p) e^{ipx} \quad p_0 = \omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

POLARIZZAZIONI

$\partial_\mu A_\mu = 0 \rightarrow \boxed{p_\mu \varepsilon_\mu^i(p) = 0} \Rightarrow$ Rimangono 3 polarizzazioni indipendenti

Fissiamo $\varepsilon_\mu^+ \varepsilon_\mu^- = -1 \rightarrow$ normalizzazione.

Prendiamo $p^\mu = (C, 0, 0, p_z)$, $C^2 - p_z^2 = m^2$

POLARIZZAZIONI TRASVERSE

LONGITUDINALI

$$\varepsilon_1^\mu = (0, 1, 0, 0), \quad \varepsilon_2^\mu = (0, 0, 1, 0), \quad \varepsilon_L^\mu = \left(\frac{p_z}{m}, 0, 0, \frac{C}{m} \right)$$

Applicando Lorentz possiamo ottenerle per qualsiasi p^μ .

$\Rightarrow \varepsilon_\mu^i(p)$ genera la rapp. irriducibile di Poincaré infinito-dimensionale.

VETTORI SPIN-1 SENZA MASSA [S.8.2.3]

$$A_\mu \sim \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \bar{S} = 1, \quad m = 0 \quad \rightarrow \quad 2 \text{ d.o.f.}$$

$A_\mu(x)$ ha 4 componenti \rightarrow 2 sono ridondanti

Partiamo da: $\mathcal{L}^{\text{kin}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

\mathcal{L} è invariante sotto $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$ INVARIANZA DI GAUGE

\Rightarrow I campi A_μ e $A_\mu + \partial_\mu \alpha$ sono EQUIVALENTI

Questa invarianza permette di rimuovere gradi di libertà ridondanti scegliendo opportunamente la gauge (GAUGE FIXING).

E.g. LORÉNTZ GAUGE

$$\partial^\mu A_\mu \rightarrow \partial^\mu A_\mu + \square \alpha \quad \Rightarrow \quad \text{Scegliamo } \square \alpha : \quad \boxed{\partial^\mu A_\mu = 0}$$

Espandendo $A_\mu(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \tilde{a}_\mu(p) \epsilon_\mu^i(p) e^{ipx}$ (classico)

$$\partial^\mu A_\mu = i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \tilde{a}_\mu(p) p^\mu \epsilon_\mu^i(p) e^{ipx} = 0 \quad \Rightarrow \quad p^\mu \epsilon_\mu^i(p) = 0$$

Fissiamo $p_\mu = (\bar{E}, 0, 0, \bar{E})$

$p^\mu \epsilon_\mu^i = 0 \Rightarrow$ 3 soluzioni

$\left. \begin{array}{l} \epsilon_\mu^1 = (0, 1, 0, 0) \\ \epsilon_\mu^2 = (0, 0, 1, 0) \\ \epsilon_\mu^3 = (1, 0, 0, 1) \end{array} \right\}$	} polarizzazioni trasverse
	} polarizzazione longitudinale

Ma ϵ_μ^3 non corrisponde a stati fisici: $\epsilon_\mu \propto p_\mu$ invarianza

Ovvero $A_\mu(x) = C \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} p_\mu e^{ipx} = \partial_\mu \phi(x) \xrightarrow{\text{gauge}} \partial_\mu \phi + \partial_\mu \alpha = 0$

Questa configurazione è equivalente a $A_\mu = 0$ (pura gauge)

SPINORI [S.10.2, P.5.3.2]

Le irrep $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$ descrivono oggetti di spin $j = \frac{1}{2}$ e con $(2j+1) = 2$ gradi di libertà.

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \sim \Psi_L \quad \text{e} \quad \left(0, \frac{1}{2}\right) \sim \Psi_R \quad \text{Spinori di Weyl}$$

left e right-handed

I generatori di Lorentz in queste irrep devono essere

matrici 2×2 con queste regole di commutazione: $[\mathcal{J}_i^+, \mathcal{J}_j^+] = i \epsilon_{ijk} \mathcal{J}_k^+$

$$[\mathcal{J}_i^-, \mathcal{J}_j^-] = i \epsilon_{ijk} \mathcal{J}_k^-$$

$$[\mathcal{J}_i^+, \mathcal{J}_k^-] = 0$$

Matrici di Pauli: $\left[\frac{\vec{v}_i}{2}, \frac{\vec{v}_j}{2}\right] = i \epsilon_{ijk} \frac{v_k}{2}$

$$\Psi_L \sim \left(\frac{1}{2}, 0\right) : \vec{J}^- = \frac{1}{2} \vec{v}, \quad \vec{J}^+ = 0 \quad \vec{J} = \frac{1}{2} \vec{v} \quad \vec{K} = \frac{i}{2} \vec{v}$$

$$\Psi_R \sim \left(0, \frac{1}{2}\right) : \vec{J}^- = 0, \quad \vec{J}^+ = \frac{1}{2} \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{J} = \frac{1}{2} \vec{v} \quad \vec{K} = -\frac{i}{2} \vec{v}$$

Dato che $\vec{v}^+ = \vec{v}$, i generatori tra le due irrep son uno gli altri. Ψ_L e Ψ_R sono irrep **CONIUGATE**.

$$\Rightarrow \text{Sotto Lorentz} \quad \Psi_{R,L} \rightarrow e^{\frac{1}{2}(i\partial_j \vec{v}_j \pm \beta_j \vec{v}_j)} \Psi_{R,L}$$

$$\mathcal{D} \Psi_{R,L} = \frac{1}{2} (i\partial_j \pm \beta_j) \vec{v}_j \Psi_{R,L}, \quad \mathcal{D} \Psi_{R,L}^\dagger = \frac{1}{2} (-i\partial_j \pm \beta_j) \Psi_{R,L}^\dagger \vec{v}_j \quad (*)$$

NOTA: Prendiamo una rotazione di 2π , $\partial_z = 2\pi$.

$$\text{Si ha: } \Psi_{R,L} \rightarrow e^{\frac{1}{2} i 2\pi \vec{v}_3} \Psi_{R,L} = -\Psi_{R,L} !$$

Gli spinori CAMBIANO SEGNO sotto rotazioni di 2π .

\Rightarrow questa proprietà è all'origine del teorema di spin-statistica

Per approfondire vedi, e.g. [S.10.5]

⇒ I generatori dei boost \vec{K} sono anti-Hermitiani
 quindi le trasformazioni di Lorentz associate a
 questa irrep finito dimensionale NON sono unitari:

$$\Lambda^{-1} \neq \Lambda^\dagger \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda^\dagger \Lambda \neq \mathbb{1}$$

⇒ Dobbiamo introdurre irrep di Poincaré
 INFINITO-DIMENSIONALI, ovvero i CAMPI SPINORIALI

$$\psi_L(x) \quad \text{e} \quad \psi_R(x).$$

Lagrangiana per **SPINORI DI WEYL**

$$\mathcal{L}_{\text{weyl}} = i \psi_R^\dagger \bar{v}_r \partial_r \psi_R + i \psi_L^\dagger \bar{v}_r \partial_r \psi_L - m (\psi_R^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger \psi_R)$$

$$v^\mu = (1, \vec{v}) \quad \bar{v}^\mu = (1, -\vec{v})$$

⇒ La massa mescola (e accoppia) ψ_L e ψ_R .

ESERCIZIO: Verificare che tutti i termini
 in $\mathcal{L}_{\text{weyl}}$ sono Lorentz-invarianti
 date le trasformazioni in (*)
 Hint: provare che $\psi_{R,L}^\dagger \bar{v}_r \psi_{R,L}$
 trasforma come un 4-vettore.

Lo spinore di Dirac ψ è dato da

$$\psi = \psi_L \oplus \psi_R = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad \psi^+ = (\psi_L^+, \psi_R^+)$$

Definiamo $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$ Matrici di Dirac (o matrici γ)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

$$\bar{\psi} \stackrel{\text{def}}{=} (\psi_R^+, \psi_L^+)$$

$$\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0$$

La Lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad \xrightarrow{\text{e.o.m}} \quad (i \not{\partial} - m) \psi = 0 \quad \text{Equazione di Dirac}$$

Esercizio

Controlla che $\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \mathcal{L}_{\text{Weyl}}$

[S.11.1, eq(11.10)]

Definiamo

$$\gamma_5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

CHIRALITA' $\left\{ \begin{array}{l} \gamma_5 \psi_L = -\psi_L \\ \gamma_5 \psi_R = +\psi_R \end{array} \right.$ \leftarrow autostati

$$P_R = \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$P_L = \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5^2 = \mathbb{1}$$

$$\begin{aligned} P_R^2 &= P_R \\ P_L^2 &= P_L \\ P_L P_R &= 0 \end{aligned}$$

$$P_R \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

$$P_L \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eq. di Dirac:

$$\begin{cases} \sigma^\mu P_R \psi_R = (\not{C} - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \psi_R = m \psi_L \\ \bar{\sigma}^\mu P_L \psi_L = (\not{C} + \vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \psi_L = m \psi_R \end{cases}$$

1. La massa m mescola ψ_L e ψ_R

2. Per $m=0$, gli spinori sono autovettori di $\hat{C}LICITA'$

$$\hat{h} = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{1}{2} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{\hat{v} \cdot \vec{p}}{c}$$

$$\begin{cases} \hat{h} \psi_R|_{m=0} = +\frac{1}{2} \psi_R \\ \hat{h} \psi_L|_{m=0} = -\frac{1}{2} \psi_L \end{cases}$$

SOLUTIONS OF THE DIRAC EQUATION (richiami) [S.77.2]

$$(i\not{\partial} - m)\psi(x) = 0$$

[P.S.3.3]

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2W_p}} \left(a_p^s u_s(p) e^{-ipx} + b_p^{s*} v_s(p) e^{+ipx} \right)$$

Con $\begin{pmatrix} -m & p \cdot \vec{\sigma} \\ p \cdot \vec{\sigma} & -m \end{pmatrix} u_s(p) = 0$ & $\begin{pmatrix} -m & -p \cdot \vec{\sigma} \\ -p \cdot \vec{\sigma} & -m \end{pmatrix} v_s(p) = 0$

La soluzione per $u_s(p)$ e $v_s(p)$ si trova partendo da un sistema di riferimento con p^μ fisso (e.g. $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$) e studiare le trasi. di Lorentz che lasciano p^μ invariato

\Rightarrow GRUPPO PICCOLO Poi si fa un boost per p^μ generici

La soluzione

$$\Rightarrow u_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \vec{\sigma}} \xi_s \\ \sqrt{p \cdot \vec{\sigma}} \eta_s \end{pmatrix} \quad v_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \vec{\sigma}} \eta_s \\ -\sqrt{p \cdot \vec{\sigma}} \xi_s \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \xi_1 = \eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \xi_2 = \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Normalizzati come: $\bar{u}_s(p) u_s(p) = -\bar{v}_s(p) v_s(p) = 2m \delta_{ss'}$

Prodotto esterno:

$$\sum_{s=1}^2 u_s(p) \bar{u}_s(p) = \not{p} + m \quad \sum_{s=1}^2 v_s(p) \bar{v}_s(p) = \not{p} - m$$

ESERCIZIO: verificare queste relazioni.