Integrale sui cammini [5.14.5]

$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + J_\mu A^\mu$ $\qquad J_\mu$: corrente

E.o.m nello spazio dei momenti:

$$(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) A_\nu(k) = J_\mu$$

$\Rightarrow$ Non possiamo invertirla perché $\det(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) = 0$

Ha un autovettore k_ν con autovalore 0 : $(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) k_\nu = 0$

Ovvero: non possiamo risolvere per A_μ in termini di J_μ perché abbiamo una ridondanza $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha$. Molti vettori A_μ corrispondono alla stessa corrente J_μ.

La soluzione è rimuovere la ridondanza

FISSANDO LA GAUGE aggiungendo $\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2$

$\Rightarrow$ Elementi di matrice di operatori gauge-invarianti sono indipendenti da ξ.

$$\langle 0 | T\{ O(x_1 \ldots x_n) \} | 0 \rangle = \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^* \, e^{i\int d^4x \, \mathcal{L}[A,\varphi]} \, O(x_1, \ldots, x_n)$$

Vogliamo fattorizzare dall'integrale sui cammini la parte di gauge $(\pi(x))$ in $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \pi(x)$

Metodo di Faddeev & Popov

l'obiettivo sarà avere $\partial_\mu A_\mu = 0$:

$\partial_\mu A_\mu \to \partial_\mu A_\mu + \Box\alpha \Rightarrow$ scegliamo $\alpha = \frac{1}{\Box}\partial_\mu A_\mu$

Consideriamo $$f(\xi) \equiv \int D\pi \, e^{-i\int d^4x \frac{1}{2\xi}(\Box\pi)^2}$$

Facciamo un cambio di variabili: è solo una traslazione

$$\pi(x) \to \pi(x) - \alpha(x) = \pi(x) - \frac{1}{\Box}\partial_\mu A_\mu \, ; \quad D\pi \to D\pi$$

$$f(\xi) = \int D\pi \, e^{-i\int d^4x \frac{1}{2\xi}(\Box\pi - \partial_\mu A_\mu)^2} \leftarrow$$ è indipendente da A_μ come la $f(\xi)$ iniziale

Moltiplichiamo e dividiamo l'integrale sui cammini per $f(\xi)$:

operatore gauge-invariante

$$\langle 0|T\{O(x_1 \ldots x_n)\}|0\rangle = \frac{1}{Z[0]f(\xi)}\int DA\,D\varphi\,D\varphi^*D\pi \, O(..)\, e^{i\int d^4x\left(\mathcal{L}[A,\varphi] - \frac{1}{2\xi}(\Box\pi - \partial_\mu A_\mu)^2\right)}$$

Adesso facciamo una trasformazione di gauge $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\pi$

$$\mathcal{L}[A_\mu,\varphi] \to \mathcal{L}[A_\mu,\varphi] \, ; \quad DA\,D\varphi\,D\varphi^*D\pi \to DA\,D\varphi\,D\varphi^*D\pi$$

$$\langle 0|T\{O(x_1 \ldots x_n)\}|0\rangle = \frac{1}{Z[0]}\underbrace{\left(\frac{\int D\pi}{f(\xi)}\right)}_{\text{entra anche in } Z[0]}\int DA\,D\varphi\,D\varphi^* \, O(..)\, e^{i\int d^4x\left(\mathcal{L}[A,\varphi] - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2\right)}$$

$$= \frac{1}{Z[0]}\int DA\,D\varphi\,D\varphi^* \, O(..)\, e^{i\int d^4x\left(\mathcal{L}[A,\varphi] - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2\right)}$$

Ma l'espressione iniziale è indipendente da ξ, quindi anche le funzioni di correlazione di OPERATORI GAUGE-INVARIANTI lo sono.

[S.8.5]

$$\mathcal{L}^{free}_{gauge} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 = \frac{1}{2} A_\mu \left(\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu \partial^\nu \right) A_\nu$$

$$Z[J_\mu] = \int \mathcal{D}A_\mu \exp\left\{ i \int d^4x \left[\frac{1}{2} A_\mu \left(\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu \right) A_\nu + i\varepsilon A_\mu A_\mu + J_\mu A_\nu \right]\right.$$

$$= Z[0] \exp\left\{ -\int d^4x\, d^4y\, \frac{1}{2} J_\mu(x)\, i\Pi^{\mu\nu}(x-y)\, J_\nu(y) \right\}$$

Dove:

$$\left(\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu \right) \Pi^{\mu\nu}(x-y) = \delta(x-y)$$

$$\Rightarrow \quad i\Pi^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2+i\varepsilon} \left(g^{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right)$$

PROPAGATORE DEL FOTONE NELLA ξ-GAUGE

$\boxed{\text{ESERCIZIO: Verificare}}$

$$\langle 0 | T\{A_\mu(x) A_\nu(y)\} | 0 \rangle = \frac{1}{Z[0]} \left(-i\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J_\nu(y)}\right) Z[J] = i\Pi_{\mu\nu}(x-y)$$

- FEYNMAN - 't Hooft gauge: $\xi = 1$
- Lorenz gauge: $\xi = 0$
- Unitary gauge: $\xi \to \infty$

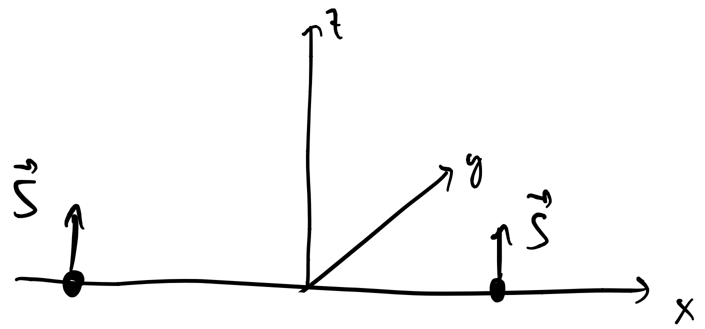
INTEGRALE SUI CAMMINI PER FERMIONI

[S.14.6]
[PS.9.5]

Abbiamo visto che sotto rotazioni di 2π

$$\psi(x) \xrightarrow{\theta_z = 2\pi} -\psi(x).$$

Consideriamo 2 fermioni identici posizionati a $C\hat{x}$ e $-C\hat{x}$, con spin allineati a $\hat{z}$



Lo stato è:

$$|\psi_{12}\rangle = |\psi_\uparrow(\vec{x})\,\psi_\uparrow(-\vec{x})\rangle$$

Ruotiamo di π attorno a $\hat{z}$: ogni spinore ha: $\Lambda_s(\pi) = i$

$$|\psi_{12}\rangle \xrightarrow{\theta_z = \pi} -|\psi_{21}\rangle \underset{\uparrow}{=} -|\psi_{12}\rangle$$

perché i due fermioni sono identici.

$\Rightarrow$ la funzione d'onda cambia segno sotto scambio di due spinori.

I fermioni **anticommutano**.

A livello CLASSICO: $\{\psi(x), \chi(y)\} = 0$

Introduciamo il concetto di numeri che anticommutano.

ALGEBRA DI GRASSMAN: insieme $\mathcal{G}$ di oggetti

generati da una base $\{\vartheta_i\}$ **NUMERI DI GRASSMAN**

$\{\vartheta_i\}$ soddisfano:
$$\begin{cases} \vartheta_i \vartheta_j = -\vartheta_j \vartheta_i \\ \vartheta_i + \vartheta_j = \vartheta_j + \vartheta_i \\ \alpha\vartheta \in \mathcal{G} \quad \text{dato} \quad \vartheta \in \mathcal{G} \text{ e } \alpha \in \mathbb{C} \\ \exists\, 0 : \quad \vartheta_i + 0 = \vartheta_i \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad \vartheta_i^2 = 0 \quad : \quad \vartheta_i^2 = -\vartheta_i^2 \to 2\vartheta_i^2 = 0$

- Per $\boxed{\text{un } \vartheta}$, l'elemento generico dell'algebra è
$$g = a + b\vartheta \qquad a, b \in \mathbb{C}$$

- Per due $\{\vartheta_1, \vartheta_2\}$: $\quad g = a + b\vartheta_1 + c\vartheta_2 + f\vartheta_1\vartheta_2$

- $(\vartheta_i \vartheta_j)$ è "bosonico" : $\quad \vartheta_i \vartheta_j \vartheta_a = \vartheta_a \vartheta_i \vartheta_j \qquad$ (o ogni $2n$)

- $(\vartheta_i \dots \vartheta_{2n+1})$ è "fermionico" : $\quad \vartheta_i \vartheta_j \dots \vartheta_{2n+1} \vartheta_a = -\vartheta_a \vartheta_i \dots \vartheta_{2n+1}$

INTEGRALE $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) \longleftrightarrow \int d\theta\, f(\theta)$

È una mappa da $\mathcal{G} \to \mathbb{C}$

- linearità: $\int d\theta_1 .. d\theta_n (sX + tY) = s \int d\theta_1 .. d\theta_n X + t \int d\theta_1 .. d\theta_n Y$
  $s, t \in \mathbb{C}$; $X, Y \in \mathcal{G}$

- $d\theta$ anticommuta come θ, anche $\int d\theta \Rightarrow \int d\theta = 0$

  $\int d\theta (a + b\theta) \equiv a \int d\theta + b \int d\theta\, \theta = b$ DEF: $\boxed{\int d\theta\, \theta = 1}$

  $\frac{d}{d\theta}(a + b\theta) \equiv b$

$\Rightarrow \frac{d}{d\theta} = \int d\theta$ per numeri Grassmaniani

- Per più θ_i:

  $\int d\theta_1 .. d\theta_n X \equiv \frac{\partial}{\partial\theta_1} .. \frac{\partial}{\partial\theta_n} X \Rightarrow \int d\theta_1 .. d\theta_n\, \theta_n .. \theta_1 = 1$

  NOTA: $\int d\theta_1 d\theta_2\, \theta_2 \theta_1 = - \int d\theta_1 d\theta_2\, \theta_1 \theta_2 = 1$

- Cambio di variabili

$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x + a)$
$a : \frac{d}{dx} a = 0$

$\int d\theta (A + B\theta) = \int d\theta (A + B(\theta + X))$
$X : \frac{\partial}{\partial\theta} X = 0$

- $\int d\vartheta_1 d\vartheta_2\, e^{-\vartheta_1 A_{12} \vartheta_2} = \int d\vartheta_1 d\vartheta_2 \left(1 - \vartheta_1 A_{12} \vartheta_2\right) = A_{12}$

termini sup hanno $\vartheta_1^2 = 0$ o $\vartheta_2^2 = 0$.

- Numeri complessi:

$\vartheta = \frac{\vartheta_1 + i\vartheta_2}{\sqrt{2}}$, $\bar{\vartheta} \equiv \vartheta^* = \frac{\vartheta_1 - i\vartheta_2}{\sqrt{2}}$ $\to$ $\int d\bar{\vartheta} d\vartheta\, \vartheta \bar{\vartheta} = 1$

$(\vartheta \eta)^* = \bar{\eta}\, \bar{\vartheta} = -\bar{\vartheta}\, \bar{\eta}$ (come prendere l'Hermitiano di operatori)

- Prendiamo n ϑ_i e n $\bar{\vartheta}_i$ (tutte variabili di Grassman indipendenti)

$$\int d\bar{\vartheta}_1 \dots d\bar{\vartheta}_2\, d\vartheta_1 \dots d\vartheta_n\, e^{-\bar{\vartheta}_i A_{ij} \vartheta_j} =$$

$$= \int d\bar{\vartheta}_1 \dots d\bar{\vartheta}_2\, d\vartheta_1 \dots d\vartheta_n \left(1 - \bar{\vartheta}_i A_{ij} \vartheta_j + \frac{1}{2} (\bar{\vartheta}_i A_{ij} \vartheta_j)(\bar{\vartheta}_k A_{kl} \vartheta_l) + \dots \right)$$

L'unico termine non nullo è quello con tutti gli ϑ_i e $\bar{\vartheta}_i$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\text{perm}\{i_n\}} \pm A_{i_1 i_2} \dots A_{i_{n-1} i_n} = \det(A)$$

$$\boxed{\begin{gathered} \int d\bar{\vartheta}_1 \dots d\bar{\vartheta}_2\, d\vartheta_1 \dots d\vartheta_n\, e^{-\bar{\vartheta}_i A_{ij} \vartheta_j} = \det(A) \\ \int dx_1 \dots dx_n\, e^{-\frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det(A)}} \end{gathered}}$$

• Prendiamo altre 2n variabili di Grassman η_i e $\bar{\eta}_i$:

$$\int d\bar{\theta}_1 .. d\bar{\theta}_2\, d\theta_1 .. d\theta_n\; e^{-\bar{\theta}_i A_{ij}\theta_j + \bar{\eta}_i \theta_i + \bar{\theta}_i \eta_i} =$$

$$= e^{\bar{\eta}_i A^{-1}_{ij}\eta_j} \int d\bar{\theta}_1 .. d\bar{\theta}_2\, d\theta_1 .. d\theta_n\; e^{-(\bar{\theta}_i - \bar{\eta}_i A^{-1}) A (\theta_i - A^{-1}\eta_i)} = \det(A)\, e^{\bar{\eta}_i A^{-1}_{ij}\eta_j}$$

Limite del continuo

Prendiamo il limite del continuo:

$$i \to x \qquad \begin{cases} \theta_i \to \psi(x) \\ \bar{\theta}_i \to \bar{\psi}(x) \end{cases}$$

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_p}} \left(\underbrace{a_s(p)} u_s(p)\, e^{-ipx} + \underbrace{b^{\dagger}_s(p)} v_s(p)\, e^{ipx} \right)$$

variabili di Grassman

Per definire il funzionale generatore introduciamo due correnti esterne, $\eta(x)$ e $\bar{\eta}(x)$, anch'esse Grassmaniane:

$$Z[\bar{\eta},\eta] = \int D[\bar{\psi}(x)]\, D[\psi(x)]\, \exp\left\{ i \int d^4x \left[\bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m + i\varepsilon)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta \right] \right\}$$

$$= Z[0,0]\; e^{-\int d^4x\, d^4y\; \bar{\eta}(x)\, S_F(x-y)\, \eta(y)},$$

dove: $Z[0,0] = \det(i\partial\!\!\!/ - m)$

Abbiamo anche definito: $(i\not{\partial}_x - m + i\varepsilon)\, S_F(x-y) = i\,\delta^4(x-y)$

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon}\, e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \frac{\not{p}+m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon'}\, e^{-ip(x-y)}$$

$$(i\not{\partial}_x - m + i\varepsilon)\, S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \frac{i}{\cancel{(\not{p} - m + i\varepsilon)}}\cancel{(\not{p} - m + i\varepsilon)}\, e^{-ip(x-y)} = i\,\delta^4(x-y) \quad \checkmark$$

Nota: $$\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\, \bar{\vartheta}(x)\,\eta(x) = -\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\, \eta(x)\,\bar{\vartheta}(x) = -\bar{\vartheta}(x)$$

La funzione a due punti è data da:

$$\langle 0|\, T\{\psi_\alpha(x)\,\bar{\psi}_\beta(y)\}\,|0\rangle = Z[0,0]^{-1}\left(-i\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\alpha(x)}\right)\left(+i\frac{\delta}{\delta\eta_\beta(y)}\right) Z[\bar{\eta},\eta]\Big|_{\bar{\eta}=\eta=0} =$$

indici spinoriali

$$= Z[0]^{-1}\int D\bar{\psi}\, D\psi \left(-i\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\alpha(x)}\right)\bar{\psi}_\beta(y)\; e^{i\langle \bar{\psi}(i\not{\partial} - m + i\varepsilon)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\rangle} =$$

$$= Z[0]^{-1}\int D\bar{\psi}\, D\psi\; \bar{\psi}_\beta(y)\,(-\psi_\alpha(x))\; e^{i\langle \bar{\psi}(i\not{\partial} - m + i\varepsilon)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\rangle} =$$

$$= Z[0]^{-1}\int D\bar{\psi}\, D\psi\; (\psi_\alpha(x)\,\bar{\psi}_\beta(y))\; e^{i\langle \bar{\psi}(i\not{\partial} - m + i\varepsilon)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\rangle} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial\bar{\eta}_\alpha(x)\,\partial\eta_\beta(y)}\left(1 - \langle \bar{\eta}\, S_F\, \eta\rangle\right) = \frac{\partial}{\partial\bar{\eta}_\alpha(x)}\int d^4w\; \bar{\eta}_\gamma(w)\, S_F^{\gamma\beta}(w-y) = S_F^{\alpha\beta}(x-y)$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left[\frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon}\right]_{\alpha\beta} e^{-ip(x-y)}$$

ELETTRODINAMICA QUANTISTICA - QED

$$\mathcal{L}^{QED} = \bar{\psi}(i\not{D}-m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2$$

$$D_\mu = \partial_\mu - iQeA_\mu$$

Invariante sotto: $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha(x)$, $\quad \psi \to e^{ieQ\alpha(x)}\psi$, $\quad \bar{\psi} \to e^{-ieQ\alpha}\psi$

$$\partial_\mu \psi \to ie^{ieQ\alpha}(\partial_\mu\psi + ieQ\alpha\psi), \qquad D_\mu\psi \to e^{ieQ\alpha(x)}D_\mu\psi$$

Gauge-fixing:

$$\mathcal{L}_{g.f.} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2$$

Interazioni

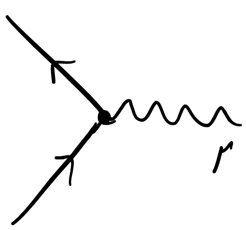
$$\mathcal{L}_{int}(A_\mu,\psi,\bar{\psi}) = eQ\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

Per l'elettrone $Q = -1$.

$$Z[J_\mu,\bar{\eta},\eta] = \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \, \exp\left[i\int d^4x\left(\mathcal{L}^{QED} + \mathcal{L}_{g.f.} + J_\mu A^\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\right)\right]$$

$$= Z_0[0]\, e^{i\langle \mathcal{L}_{int}\left(-i\frac{\delta}{\delta J_\mu}, -i\frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, i\frac{\delta}{\delta \eta}\right)\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle J_\mu(x) i\Pi^{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y)\rangle} e^{-\langle \bar{\eta}(x) S_F(x-y)\eta(y)\rangle}$$

Regola di Feynman



$$= i\frac{\delta}{\delta\psi}\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}\frac{\delta}{\delta A_\mu}\left[eQ\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu\right] = ieQ\gamma^\mu$$

QED SCALARE

- Campo scalare complesso + fotone

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \varphi)^* (D^\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi - \lambda (\varphi^* \varphi)^2$$

Dove $\quad D_\mu \varphi = (\partial_\mu - i e Q A_\mu)\varphi$

ESERCIZIO:

Derivare $\mathcal{L}_{int}$ tra φ ed il fotone e le regole di Feynman associate.