Lezione del 27 Aprile 2021

Presenti in aula (su autodichiarazione)

SM 6000694

SM 6000712

SM 6000695

SM 6000683

SM 6000687

SM 6000699

SM 6000706

$$\int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx$$

$\frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$

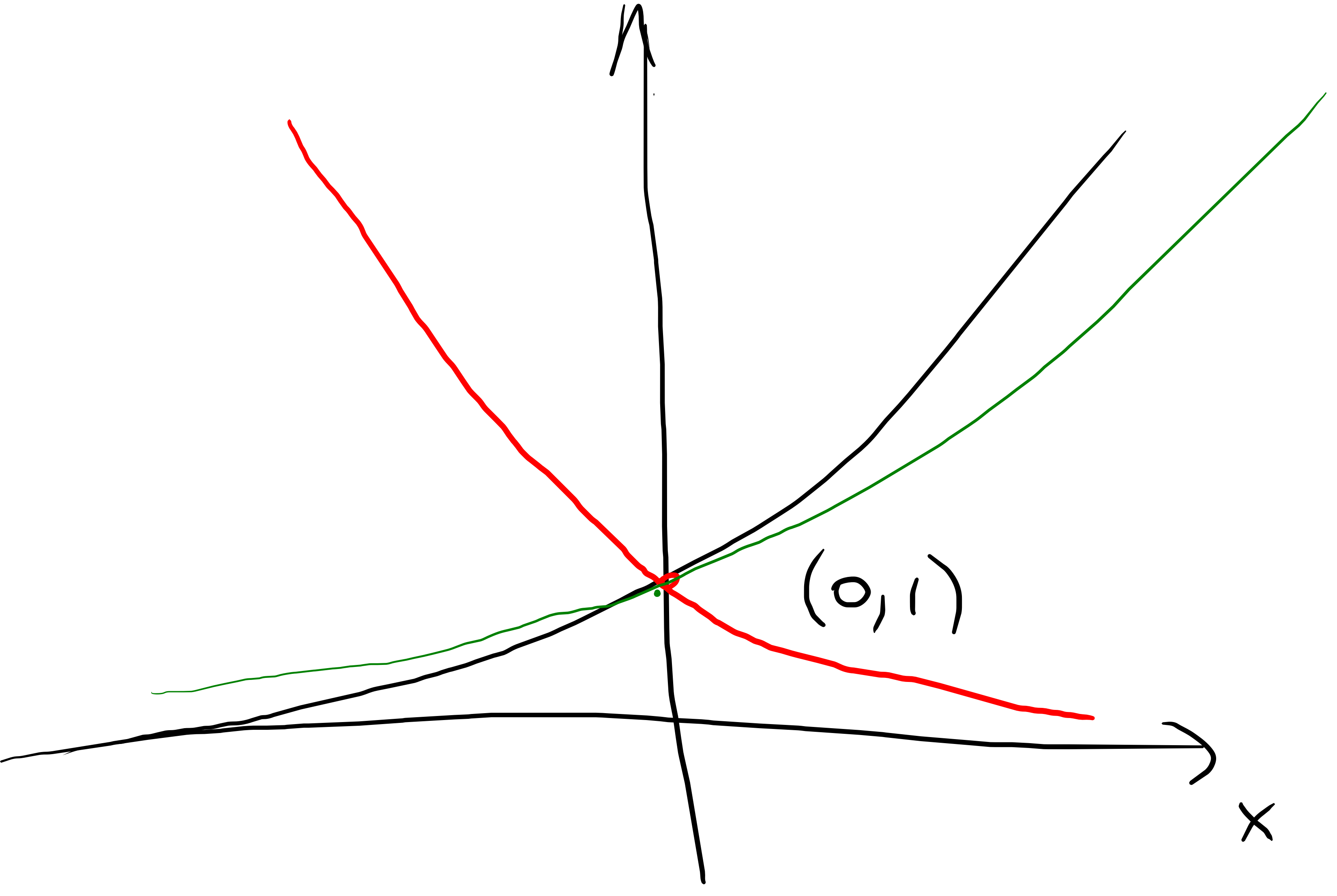
$e^{2x} - 1 \geq 0$

$e^{2x} \geq 1$

$\ln\sqrt{2} = \ln 2^{1/2} = \frac{1}{2}\ln 2$

$x \xmapsto{2} 2x \xrightarrow{e} e^{2x} \longrightarrow e^{2x} - 1 \longrightarrow \sqrt{e^{2x} - 1} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$ $\boxed{x > 0}$

$2x \geq 0 \iff x \geq 0$



(0,1)
x

Poichè $\frac{1}{2}\ln 2 > 0$ e $\ln 2 > \frac{1}{2}\ln 2$

allora la funzione integranda risulta

ben definita e continua in $\left[\frac{1}{2}\ln 2, \ln 2\right]$

Quindi si può applicare il Teorema

Fondamentale del Calcolo Integrale.

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}(1-e^{-2x})}}\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{e^{x}\cdot\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx$$

$$\boxed{e^{2x} = (e^{x})^{2}}$$

$$e^{0} = 1 = e^{2x-2x}$$

$$= \int \frac{1}{e^x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2x}}}\,dx =$$

$$= \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-(e^{-x})^{+2}}}\,dx$$

$$-du = e^{-x}\,dx$$

$$\boxed{e^{-x} = u}$$

$$\frac{1}{e^x} \qquad \boxed{-e^{-x}\,dx = du}$$

$$= -\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \left\{ -\arcsin u + C \right\}$$

$$C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = \left\{ -\arcsin e^{-x} + C \right\}$$

$u = e^{-x}$

$$\int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx = \Big[-\operatorname{arcsen} e^{-x} \Big]_{\ln\sqrt{2}}^{\ln 2}$$

$\ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$

$$= -\operatorname{arcsen} e^{-\ln 2} + \operatorname{arcsen} e^{-\ln\sqrt{2}}$$

$$e^{-\ln 2} = \frac{1}{e^{\ln 2}} = \frac{1}{2}$$

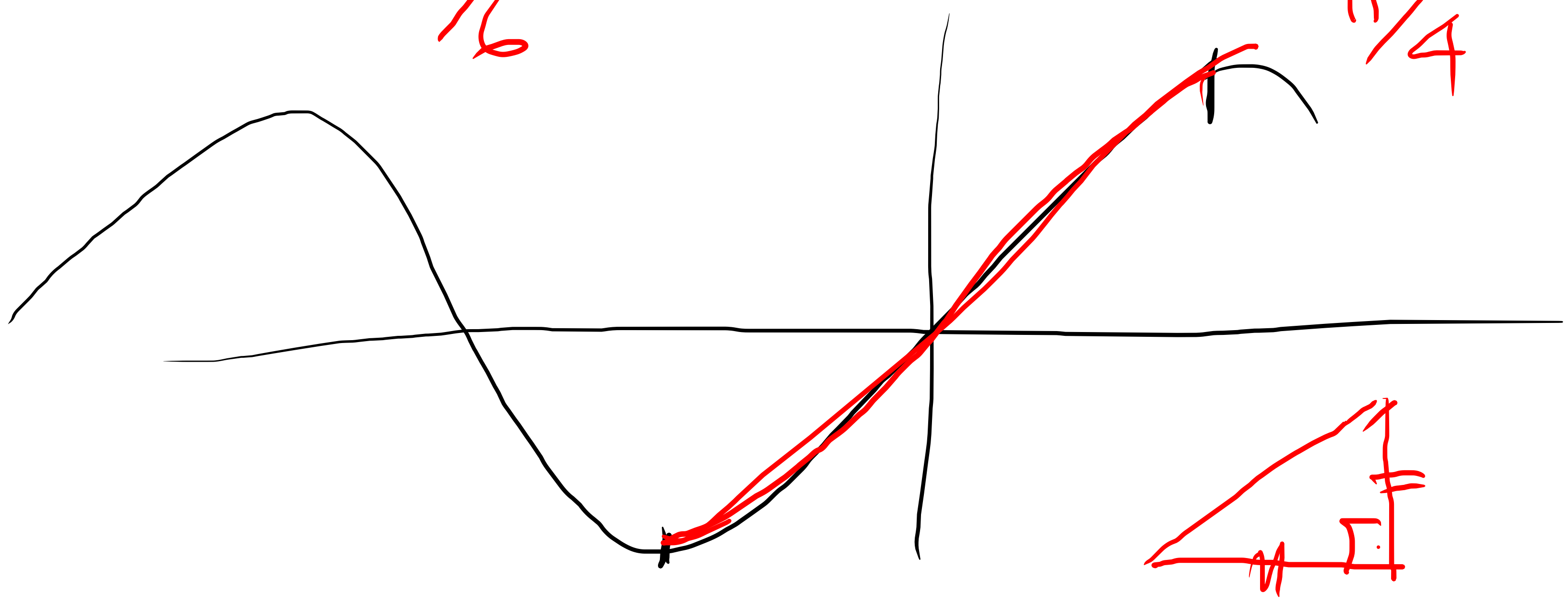
$$e^{-\ln\sqrt{2}} = \frac{1}{e^{\ln\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

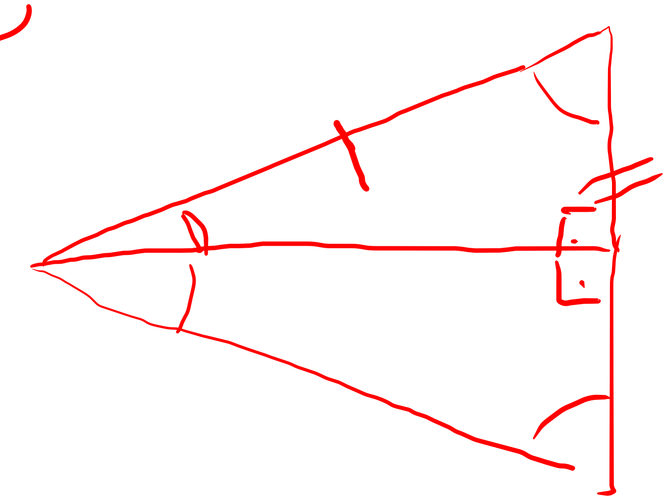
$$\|$$

$$e^{-\frac{1}{2}\ln 2} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\ln 2}} = \frac{1}{\left(e^{\ln 2}\right)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{1/2}}$$

$$-\operatorname{arcsen} e^{-\ln 2} + \operatorname{arcsen} e^{-\ln\sqrt{2}} =$$

$$= \underbrace{-\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)}_{-\pi/6} + \underbrace{\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\pi/4} = \frac{\pi}{12} \checkmark$$





$$\boxed{u = e^{-x}}$$

$$-\int_{\sqrt{2}/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \Big[-\arcsin u\Big]_{\sqrt{2}/2}^{1/2}$$

$$x_0 = \ln\sqrt{2} \qquad u_0 = e^{-x_0}$$

$$x_1 = \ln 2 \qquad u_1 = e^{-x_1}$$

$$\| $$

$$\int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln 2} \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx$$

$$= \Big[\arcsin\Big]_{1/2}^{\sqrt{2}/2}$$

$$\sqrt{2}/2 > 1/2$$

✓

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx =$$

$$p = -2 \quad (\neq -1)$$

Oss $\boxed{\frac{1}{x^2} > 0}$

$$= \left\{ \frac{1}{-2+1} \cdot x^{-2+1} + C \right\}$$

$$= \left\{ -\frac{1}{x} + C \right\} = \left\{ -x^{-1} + C \right\}$$

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$\frac{1}{x^2}$ NON è continua in $x_0 = 0$ e $0 \in [-1,2]$

$-\frac{1}{x}$ è una primitiva di $\frac{1}{x^2}$

$$\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{2} = -\frac{1}{2} + (-1) = -\frac{3}{2} < 0$$

$$\cancel{\int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx} = \cancel{\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx} + \cancel{\int_{0}^{2} \frac{1}{x^2}\,dx}$$

Se f non è continua in uno dei due estremi dell'intervallo di integrazione si deve provare a calcolare un limite del valore dell'integrale.

Più precisamente se f è continua in $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \quad a < x \leq b\} =]a,b]$

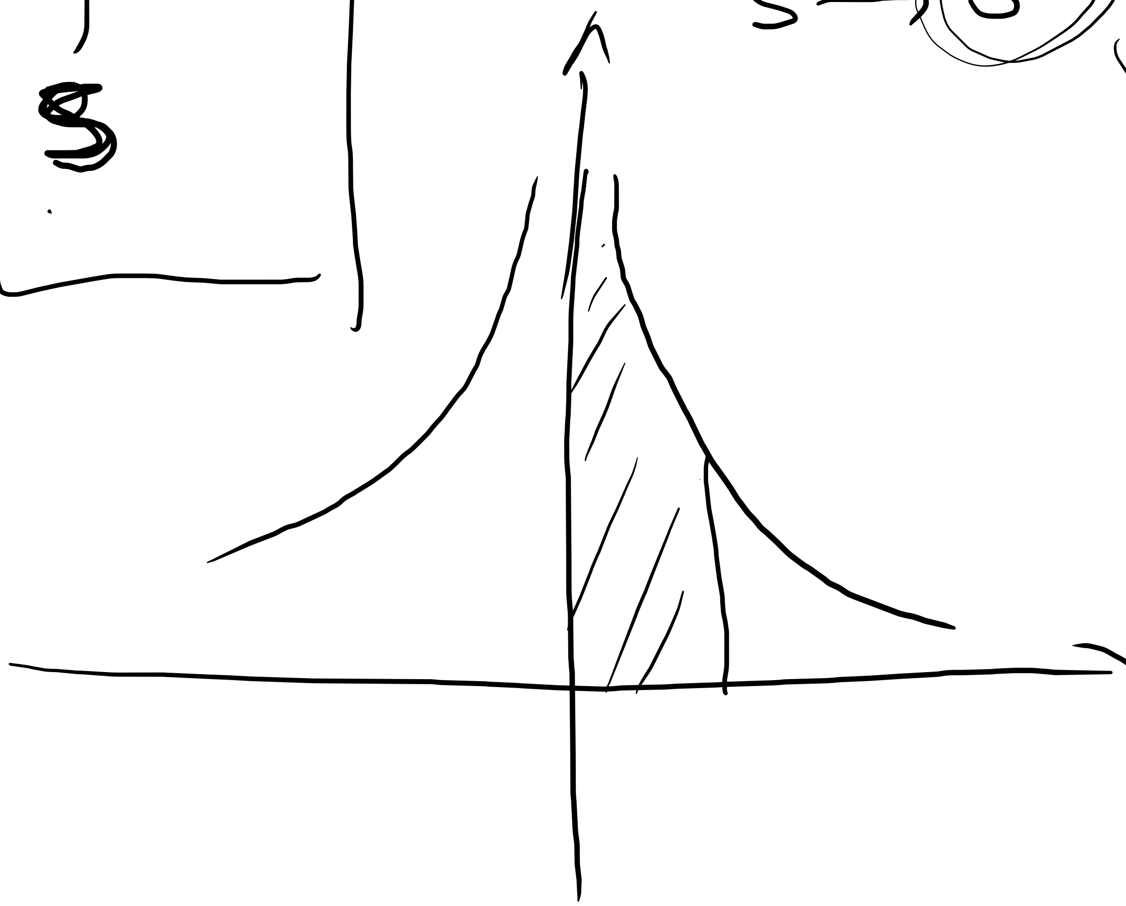
MA non è continua in a

Si definisce INTEGRALE IMPROPRIO
o INTEGRALE GENERALIZZATO di
f in [a,b], il Limite SE ESSO
ESISTE FINITO, ~~di~~ seguente

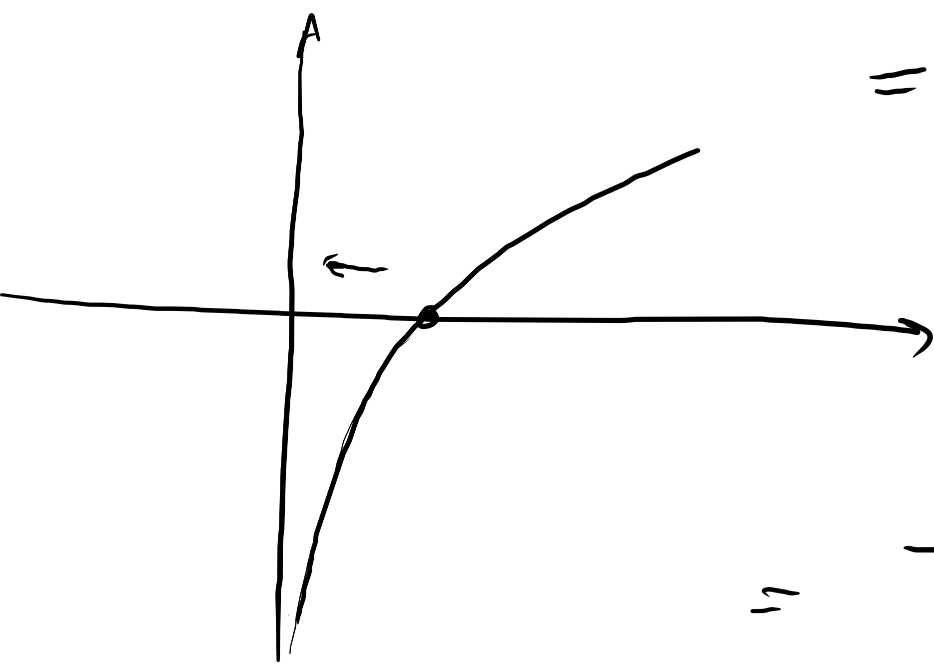
$$\lim_{s \to a^+} \int_s^b f(x)\,dx$$

$$\lim_{s\to 0^+} \boxed{\int_s^2 \frac{1}{x^2}}\, dx = \lim_{s\to 0^+} \underbrace{\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{s}\right]}_{=\left[-\frac{1}{x}\right]_s^2} = +\infty$$

Per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale



$$\underbrace{\lim_{s\to 0^+}\int_s^1 \ln x\,dx} = \lim_{s\to 0^+}\left[\underbrace{x\ln x - x}\right]_s^1 =$$



$$= \lim_{s\to 0^+}\left[-1 \underbrace{- s\ln s} + s\right] = -1 \checkmark$$

$$s\ln s = \frac{\ln s}{\frac{1}{s}} \quad H \quad \frac{\frac{1}{s}}{-\frac{1}{s^2}}$$

$$= -s \xrightarrow{s\to 0^+} 0$$

Esiste l'integrale improprio o generalizzato

$$\boxed{\int_0^1 \ln x \, dx = -1}$$

Analogamente se f è continua in $[a,b) =$

$= \{ x \in \mathbb{R} \quad a \leq x < b \} = [a, b[$

si definisce INTEGRALE IMPROPRIO o GENERALIZZATO

di f in $[a,b)$ il limite seguente

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$ se esiste ed è finito.

Naturalmente diremo che f continua

in $]a,b[= (a,b) = \{ x \in \mathbb{R} \quad a<x<b \}$

ammette INTEGRALE IMPROPRIO O GENERALIZZAT

in $[a,b)$ se esiste finito il seguente

limite $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

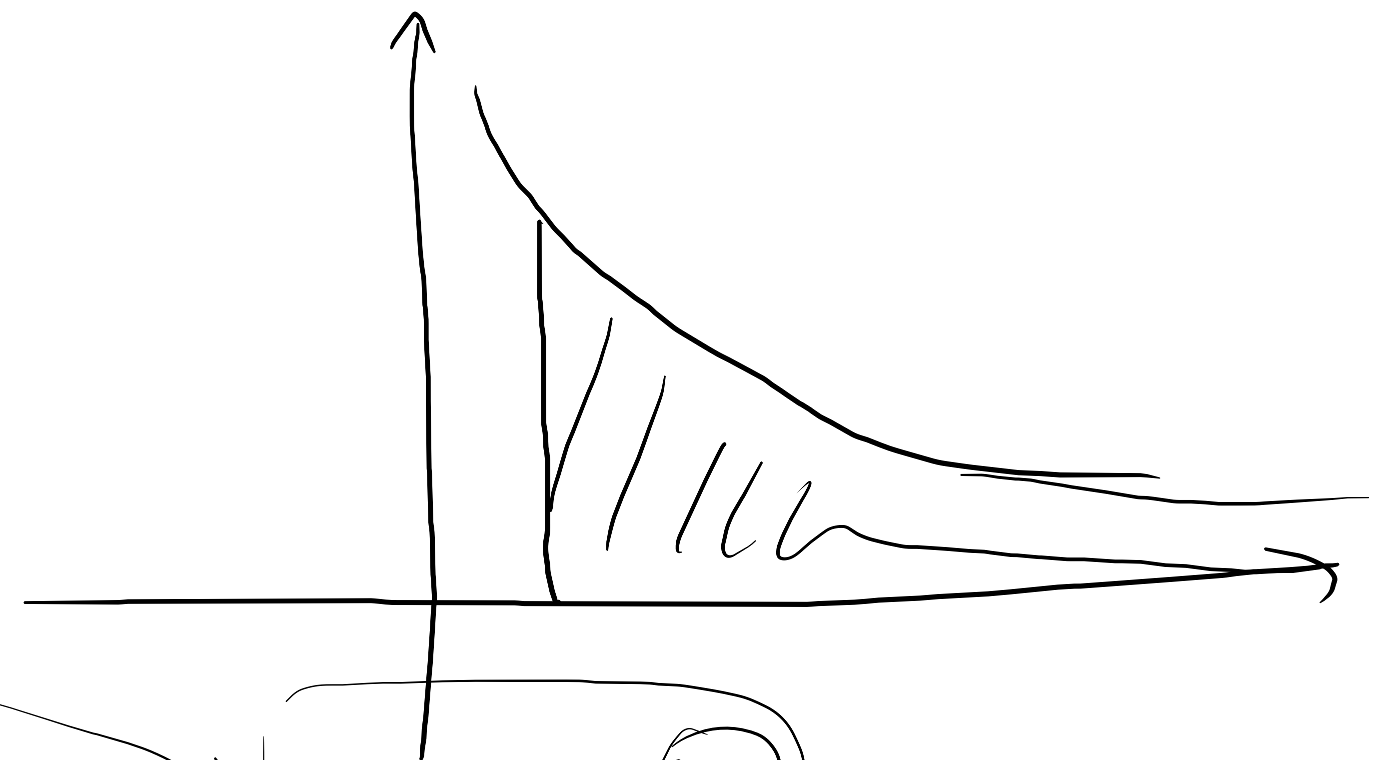
$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \ldots$$

Si utilizzano i limiti anche per calcolare (ove sia possibile) integrali definiti su intervalli illimitati, del tipo

$$(a, +\infty) \qquad (-\infty, b)$$

oppure $(-\infty, +\infty)$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx =$$



$$= \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{t} = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{1}{t}+1\right]$$

$$= 1$$

In generale se f è continua in $[a,+\infty)$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx \leftarrow \text{se finito}$$

se f è continua in $(-\infty, b]$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x) = \lim_{s\to-\infty} \int_s^b f(x)\,dx \leftarrow \text{se finito}$$

Se f è continua in $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,dx$$

se finito

Ad esempio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{r} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{r \to +\infty} \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_{-r}^{r} = 0 \quad ✓$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^n}\,dx \qquad \text{converge se} \quad n > 1$$

$n=1$

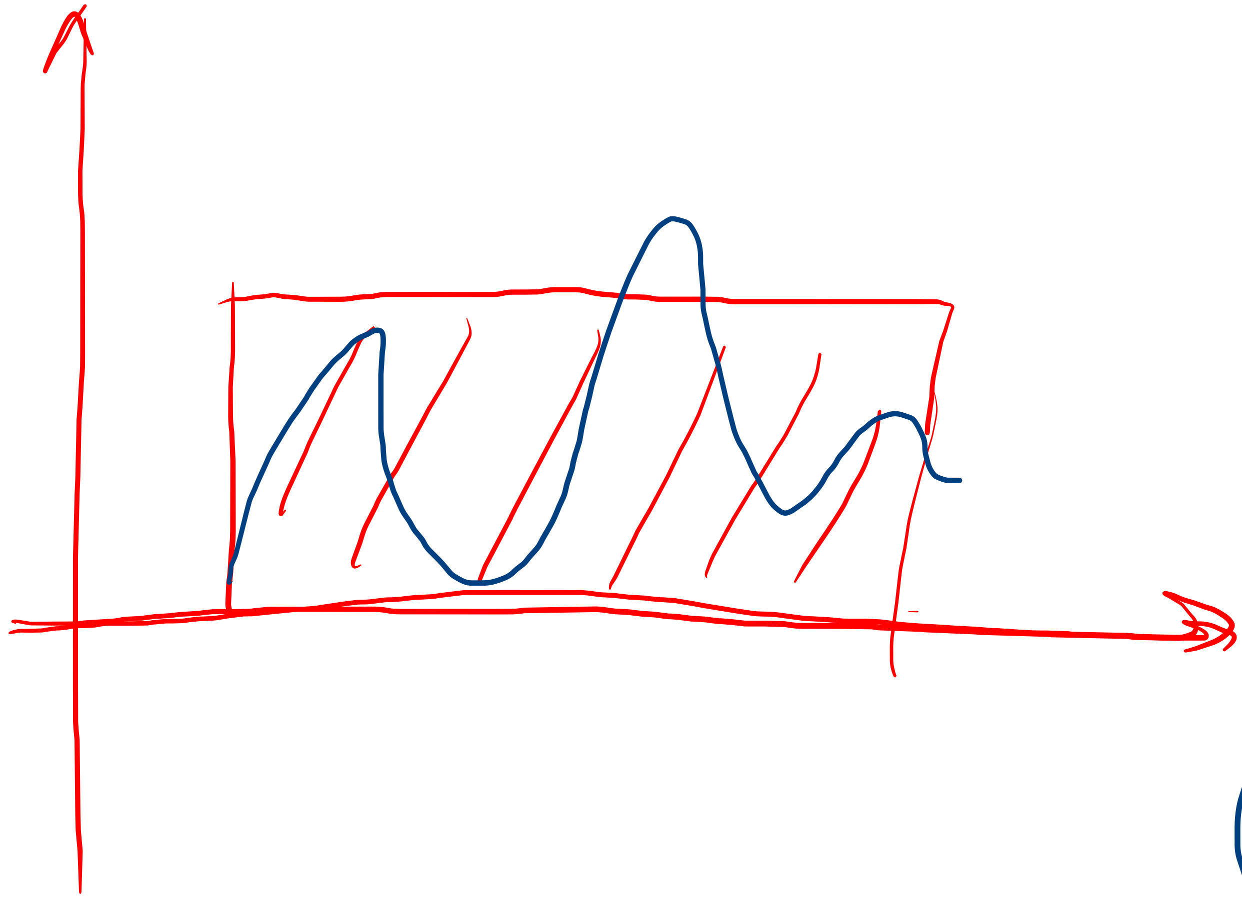
$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \Big[\ln x \Big]_a^t =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left(\ln t - \ln a \right) = +\infty \quad ✓$$

Condizione NECESSARIA ma non sufficiente affinché esiste l'integrale

$(-\infty, b)$

improprio di f su un intervallo illimitato del tipo $(a, +\infty)$ è che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$



$$\boxed{x' = x}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)$$

$$\int dx = \int x(t)\,dt$$

$$\ln x = \int \frac{1}{x}\,dx = \int dt = t$$

$$\boxed{x = e^{t}}$$