# SISTEMI DINAMICI

27 aprile 2021

---

Sistemi dinamici lineari

$\dot{x} = f(x)$ $\qquad \mathbb{R}^n$

$\dot{x} = Ax$

algebra lineare di $A$

→ problema spettrale

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \longrightarrow \quad x(t) = e^{tA} x_0$$

<u>Stabilità</u> per <u>sistemi lineari</u>

Intuitivamente → andamento delle soluzioni per $t \longrightarrow +\infty$

Siccome la soluzione $x(t) = e^{tA} x_0$

$\rightarrow$ è lo spettro di $A$ a determinare se gli esponenziali sono crescenti o decrescenti.

<u>Nota</u> : esistono varie definizioni!

<u>Def</u> Un sistema dinamico lineare si dice spettralmente stabile se nessuno dei suoi autovalori ha parte reale positiva.

<u>Def</u> su $\mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$. $A : E \to E$

$$E = E^u \oplus E^c \oplus E^s$$

dove se : $\lambda_i = \alpha_i \mp i\beta_i$
$v_i = u_i + i w_i$

- $E^u = \text{Span}\{ u_i, w_i \mid Re(\lambda_i) > 0 \}$

sottospazio instabile
(unstable)

- $E^c = \mathrm{Span}\{u_i, w_i \mid \mathrm{Re}(\lambda_i) = 0\}$

  sottospazio centrale

- $E^s = \mathrm{Span}\{u_i, w_i \mid \mathrm{Re}(\lambda_i) < 0\}$

  sottospazio stabile

**Def** Un sistema lineare si dice iperbolico se $E^c = \emptyset$ (tutti gli autovalori hanno parte reale non zero).

Sistemi iperbolici sono "generici"

**Def** Un sistema dinamico lineare si dice linearmente stabile se tutte le soluzioni sono limitate per $t \to +\infty$

Nel sottospazio stabile $(x_0 \in E^s)$

→ Tutte le sol sono limitate

Se $x_0 \in E^u$, no

$x_0 \in E^c$ → le soluzioni possono essere limitate o no.

Soluzioni possono avere termini che vanno come $t^k$

<u>Def</u> [ancora più forte]: asintoticamente linearmente stabile se tutte le soluzioni vanno a zero per $t \to +\infty$

<u>Teorema</u>:

Abbiamo che $\lim_{t \to +\infty} e^{tA} x_0 = 0$ per tutti $x_0$ ⟺ tutti gli autovalori di $A$ hanno parte reale negativa

<u>Infatti</u>

Se tutti gli autovalori hanno parte reale negativa, $x_0 \in E^s$

→ le soluzioni $t^k e^{t\alpha_i} e^{it\beta_i}$

sin
cos

$\alpha_i < 0$

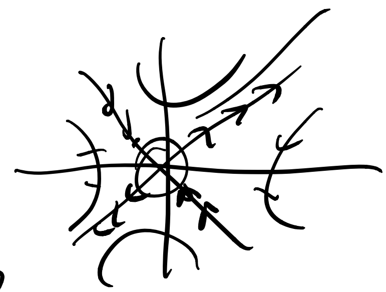
$\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$

Messaggio $\boxed{e^{tA} x_0}$

$\dot{x} = Ax$

$\dot{x} = f(x) \longleftarrow \dot{x} \approx Ax$

$x \in \mathbb{R}^n, f$



---

Seconda Parte

---

# SISTEMI DINAMICI NONLINEARI

Non avremo una ricetta generale

→ sequenza di tecniche

$$\dot{x} = f(x) \qquad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

non lineare

<u>Equilibrio</u> & <u>isocline</u>

Soluzioni più semplici : punti critici : $x^*$ t.c. $f(x^*) = 0$

Isocline :

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

se scriviamo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

le isocline sono superfici definite

da $\dot{x}_i = 0 = \underbrace{f_i(x_1, \dots, x_n)}$

La superficie $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ divide lo spazio delle fasi in due regioni : in una $\dot{x}_i > 0$, nell'altra $\dot{x}_i < 0$

Se determiniamo tutte le isocline abbiamo diviso lo spazio delle fasi in regioni in cui sappiamo l'andamento del flusso

$$f_1 = 0 \quad \begin{matrix} \dot{x}_1 > 0 \\ \dot{x}_1 < 0 \end{matrix} \quad , \quad f_2 = 0 \quad \begin{matrix} \dot{x}_2 > 0 \\ \dot{x}_2 < 0 \end{matrix}$$

<u>Esempio</u>

non lineari

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$$

$$f\,\cancel{x}\,x$$

$$n=1$$

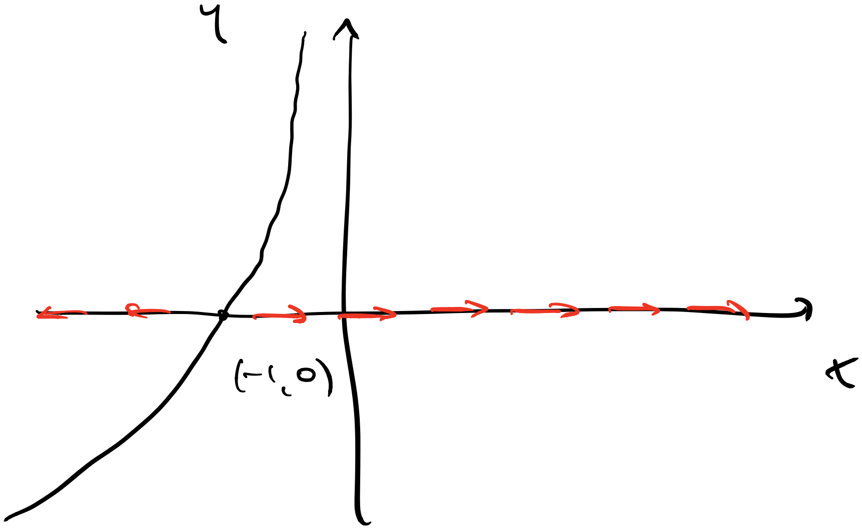
$$\begin{cases} \dot{x} = x + e^{-y} \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

Punti critici

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \longrightarrow (x^*, y^*) = (-1, 0)$$

Isocline

1) $\dot{y} = 0$ : il flusso è orizzontale nel piano delle fasi




$\dot y = -y$

$y = 0$

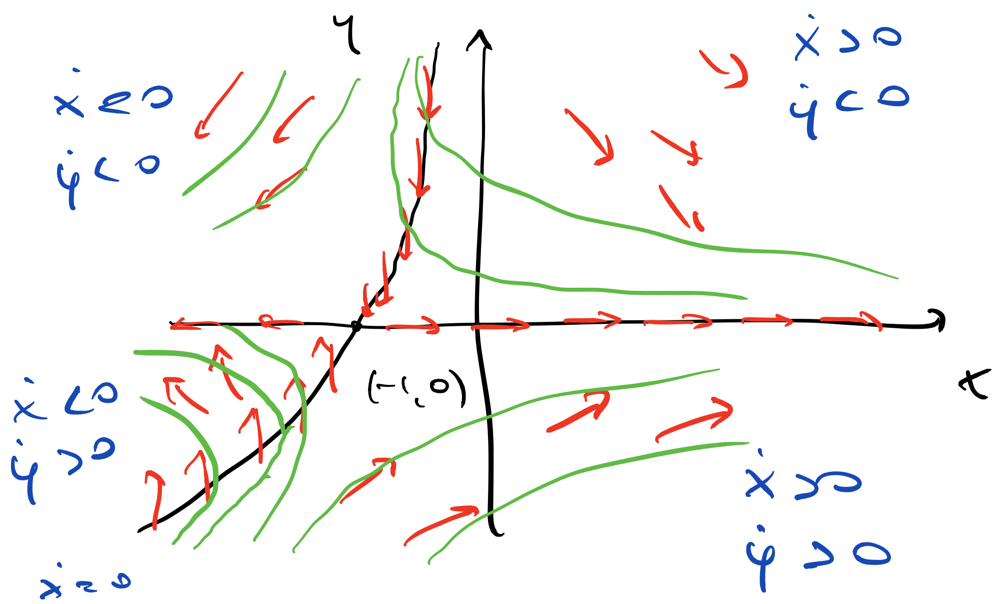
il flusso va verso destra se $\dot x > 0$

$$\dot x \to (x + e^{-y})\Big|_{y=0} > 0 \quad : \quad x > -1$$

2) $\dot x = 0$ : il flusso è verticale per $x + e^{-y} = 0$

Nel semipiano superiore $y > 0$

$\dot y = -y < 0$ il flusso va verso il basso



# Linearizzazione

Vogliamo capire l'andamento locale vicino alle soluzioni di equilibrio

Prendiamo $x^* \in \mathbb{R}^n$, $f(x^*) = 0$

$x = x^* + z$ $\quad$ $z$ "piccolo"

$$\frac{d}{dt} x = \frac{d}{dt}(x^* + z) = \dot{z} = f(x^* + z)$$

$$= f(x^*) + Df(x^*)\, z + \underset{\text{ordine superiore}}{\cdots}$$

$$Df(x^*) : \left(Df_{(x^*)}\right)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^*)$$

Se $z$ è piccolo possiamo trascurare termini di ordine superiore e lavorare con

$\dot{z} = A z$ $\qquad$ $A = \left(Df_{(x^*)}\right)$

sistema lineare $\qquad$ $A_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x^*}$