# MECCANICA RAZIONALE

Ing Civile e Ambientale

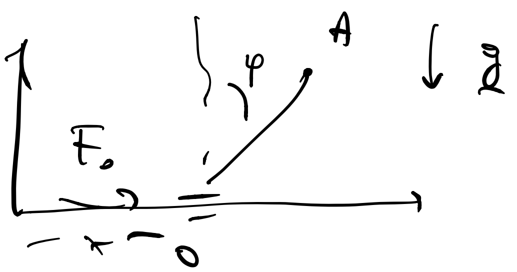
Novole

28 aprile 2021

---

Nell'esercizio di ieri

$$K = \frac{1}{2} m \left( \dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{3} \dot{\varphi}^2 + \dot{x}\dot{\varphi}\, \ell \cos\varphi \right)$$




$$\underline{q} = (x, \varphi)$$

$$\underline{\dot{q}} = (\dot{x}, \dot{\varphi})$$

$$K = \frac{1}{2}\, \underline{\dot{q}}\, A\, \underline{\dot{q}} = \frac{1}{2} (\dot{x} \quad \dot{\varphi}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \dot{x}^2 a_{11} + \dot{\varphi}^2 a_{22} + 2\, a_{12}\, \dot{x}\dot{\varphi} \right]$$

$$\overset{!}{=} \frac{1}{2}\, m \left[ \dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{3} \dot{\varphi}^2 + \dot{x}\dot{\varphi}\, \ell \cos\varphi \right]$$

$$A = \begin{pmatrix} m & \frac{\ell}{2} m \cos\varphi \\ \frac{\ell}{2} m \cos\varphi & m \frac{\ell^2}{3} \end{pmatrix}$$

---

$K \longrightarrow \mathcal{L}$ & eq. di moto

$$K = \underbrace{k_0(\underline{q}(t); t)}_{} + \underbrace{\underline{b}(\underline{q}(t); t)}_{} \cdot \dot{\underline{q}} + \frac{1}{2} \dot{\underline{q}} \cdot \underbrace{A(\underline{q}(t); t)}_{} \cdot \dot{\underline{q}}$$

$$k_0 = \frac{1}{2} \sum_{B \in S} m_B \left\| \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial t} \right\|^2 \longrightarrow 0 \qquad \underline{x}_B = \underline{x}_B(\underline{q}(t); t)$$

$$b_i = \sum_{B \in S} m_B \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial t} \longrightarrow 0$$

$$A_{ij} = \sum_{B \in S} m_B \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_j}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{2} \dot{\underline{q}} \cdot A \dot{\underline{q}} \qquad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \end{pmatrix}$$

A def positiva ( $\det A > 0$ )

Equazioni di Lagrange

$$\left( \ddot{\underline{q}} = A^{-1} \underline{F} \right) \leftarrow$$ 2° ordine nelle $\underline{q}$

$\downarrow$ Sistema dinamico

eq. diff. del 1° ordine nelle $(\underline{q}, \underline{p})$

$$p_i = \frac{\partial k}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{\ell} A_{ij} \dot{q}_j + b_i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt} q_i = \gamma_i (\underline{q}, \underline{p}, t) \\ \dfrac{d}{dt} p_i = f_i (\underline{q}, \underline{p}, t) \end{array} \right.$$

$$\dot{\underline{q}} = A^{-1} (\underline{p} - \underline{b})$$

$$\frac{d}{dt} p_i = \left( \frac{\partial k}{\partial q_i} + Q_i \right) \Big|_{\dot{q} = \gamma_i (\underline{q}, \underline{p}; t)}$$

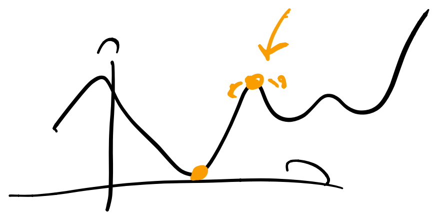
$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} \underline{y} = \underline{G} (\underline{y}, t)$$

$$\underline{y} = (q_1, \dots, q_\ell, p_1, \dots, p_\ell)$$

# STABILITÀ

Statica : PLV (forze conservative)

$\rightarrow \quad dV$



$dV = 0$

$\leftarrow$ conf. di equilibrio

Sistema olonomo a $\ell$ gradi di libertà $\rightarrow$ sistema dinamico nelle variabili $\underline{y} = (\underline{q}, \underline{p})$

$\ell$ $\quad$ $\ell$

"Spazio delle fasi"

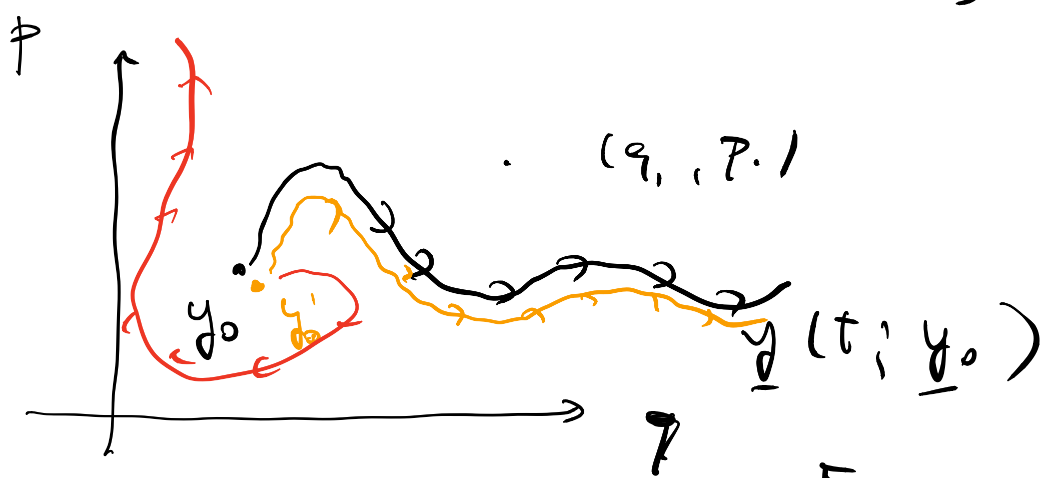
$$\begin{cases} \dot{\underline{y}} = \underline{F}(\underline{y}, t) \\ \underline{y}(0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

Per ogni $\underline{y}_0$ il problema ha un'unica soluzione. La scriviamo come $\underline{y}(t;\underline{y}_0)$

**Def** Una traiettoria uscente da $\underline{y}_0$ è la curva nello spazio delle fasi

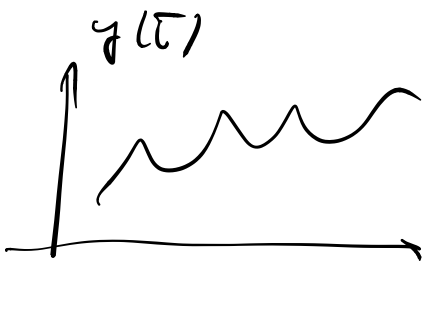
$$\Gamma_{\underline{y}_0} = \{ \underline{y} \in \mathbb{R}^{2l} \mid \underline{y} = \underline{y}(t;\underline{y}_0) \text{ per } t \geq 0 \}$$

$t \in I$




nello spazio $(\underline{q}, \underline{p})$

$y(t)$




L'equilibrio corrisponde a soluzioni

stazionarie (costanti nel tempo)

$$\begin{cases} \underline{q}(t) = \underline{q}_E \\ \underline{p}(t) = \underline{0} \end{cases}$$

sistema fermo nella configurazione di equilibrio

$$\underline{y}_E = (\underline{q}_E, \underline{0})$$

$\downarrow$

$$\underline{\dot{y}} = \underline{F}(\underline{y}, t) \longrightarrow \underline{F}(\underline{y}_E, t) = \underline{0}$$

In particolare se $\underline{F}(\underline{y}, t)$ non dipende esplicitamente dal tempo

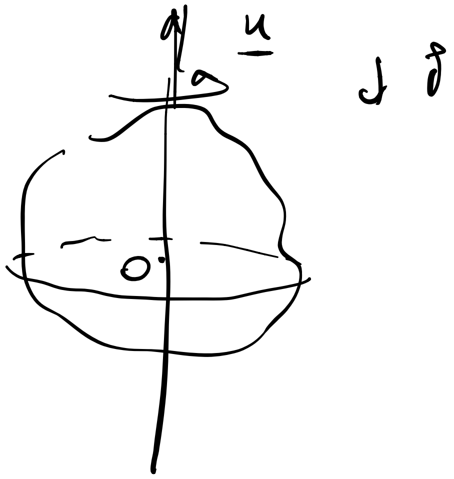
$\rightarrow$ $\underline{F}(\underline{y})$ sistema di equazioni differenziali autonome.

---

Seconda parte

---

<u>Esempio</u> Consideriamo un rigido in rotazione attorno ad un asse fisso verticale




però coppia di momento $-\nu \underline{\omega}$

$\varphi$ l'angolo di rotazione

$I_O$ momento di inerzia rispetto a $\underline{u}$

$$K = \frac{1}{2} I_O \dot{\varphi}^2$$

$V =$ costante perché G centro di massa ho altezza costante

il momento $-\nu \underline{\omega}$ dà una forza generalizzata $-\nu \underline{\omega} \cdot \underline{u} = -\nu \dot{\varphi}$

$(Q_\varphi)$

Allora $p = \dfrac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}$ momento coniugato a $\varphi$

$$= I_O \dot{\varphi}$$

quindi

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{p}{I_0} \\[2ex] \dot{p} = \underbrace{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right)}_{\text{dobbiamo calcolare}} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \left(\cancelto{0}{\frac{\partial K}{\partial \varphi}} + Q\right)_{\dot{\varphi} = \frac{p}{I_0}}$$

eq. di Lagrange

$$= \left(-\nu \dot{\varphi}\right)\Big|_{\dot{\varphi} = \frac{p}{I_0}} =$$

$$= -\nu \frac{p}{I_0}$$

Il sistema dinamico è

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{p}{I_0} & \leftarrow \\[2ex] \dot{p} = -\dfrac{\nu}{I_0} p & \leftarrow \end{cases}$$

Condizioni iniziali generiche

$$\begin{cases} \varphi(0) = \varphi_0 \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

Troviamo la soluzione

$$\begin{cases} \varphi(t) = \varphi_0 + \dfrac{p_0}{\nu}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{\nu}{I_0} t\right)\right) \\ p(t) = p_0 \exp\left(-\dfrac{\nu}{I_0} t\right) \end{cases}$$

$$\underline{y}(t; \underline{y}_0) = (\varphi(t; \varphi_0, p_0), p(t; \varphi_0, p_0))$$

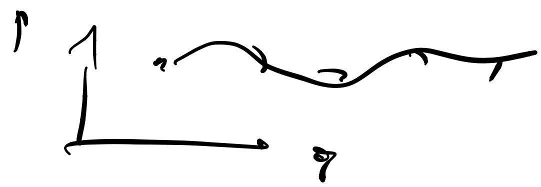
Le configurazioni di equilibrio sono $\underline{y}_E = (\varphi_0, 0) \quad \forall \varphi_0$

Vediamo

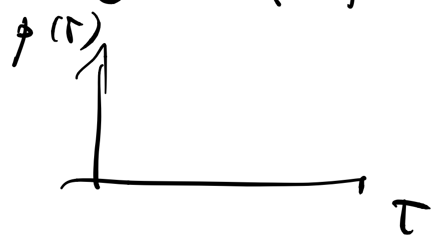
- se $p_0 = 0 \Rightarrow$ la traiettoria uscente da $(\varphi_0, 0)$ è il punto $(\varphi_0, 0)$ stesso

• $p_0 \neq 0$

vogliamo proiezione nello spazio $(q, p)$




se abbiamo $\varphi(\tau)$, $p(\tau)$


vogliamo esprimere queste funzioni nello spazio $(q, p)$

$$p(\tau) = p_0 \exp\left(-\frac{\nu}{I_0}\tau\right)$$

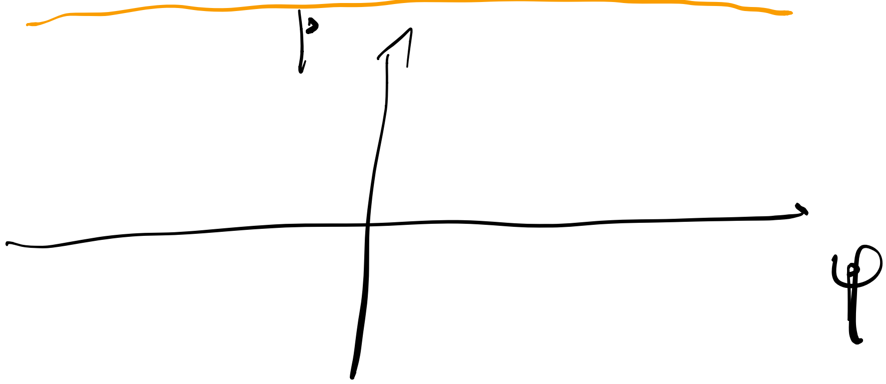
$$\to \frac{p(\tau)}{p_0} = \exp\left(-\frac{\nu}{I_0}\tau\right)$$

$$\varphi(\tau) = \varphi_0 + \frac{p_0}{\nu}\left(1 - \exp\left(-\frac{\nu}{I_0}\tau\right)\right)$$

$$= \varphi_0 + \frac{p_0}{\nu} - \frac{\cancel{p_0}}{\nu}\frac{p(\tau)}{\cancel{p_0}}$$

$$\varphi(\tau) - \varphi_0 = \frac{p_0 - p(\tau)}{\nu}$$

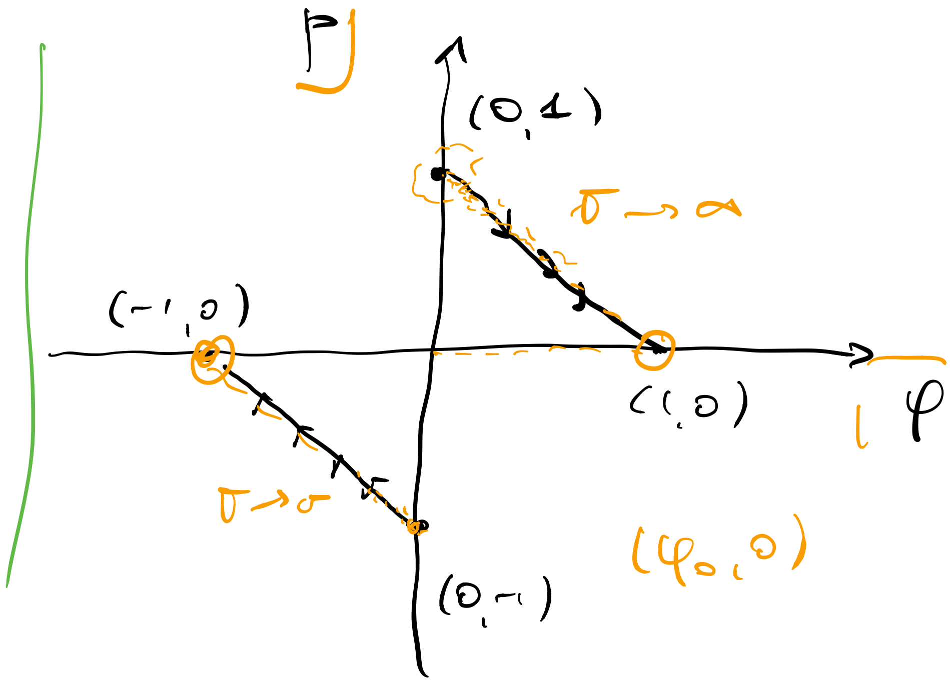
$$\boxed{p - p_0 = -\nu(\varphi - \varphi_0)}$$




segmenti di retta di pendenza $-\nu$ e passanti per il punto $(\varphi_0, p_0)$

Consideriamo il caso in cui

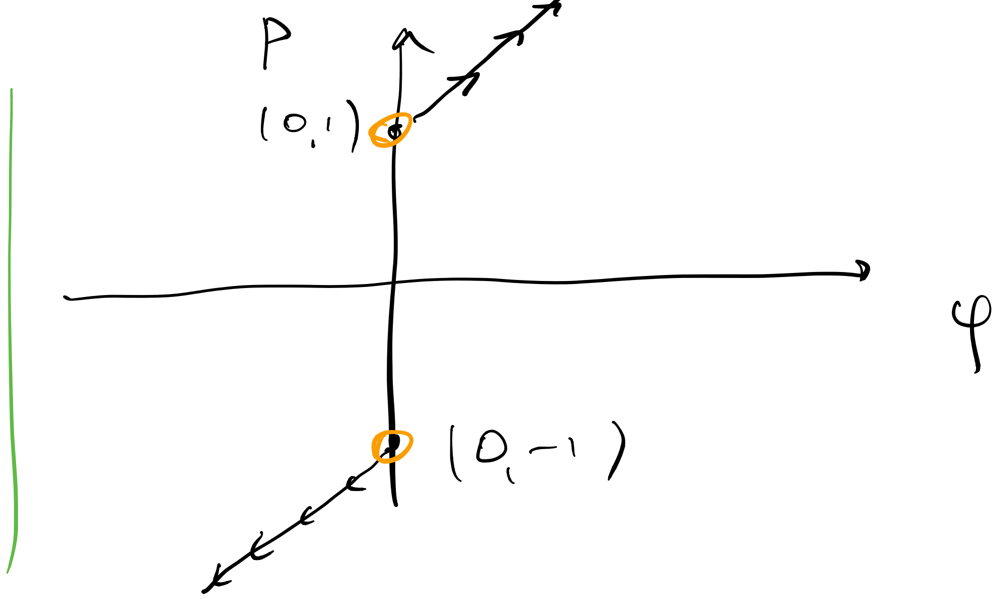
$\nu = 1 > 0 \quad \rightarrow$ coppia di attrito




Traiettoria uscente da $(\varphi_0, p_0) =$
$= (0, 1)$

$(\varphi_0, p_0) =$
$= (0, -1)$

Similmente se $\nu = -1 < 0$
(coppia motrice di momento $-\gamma \underline{\omega}$)




Che tipo di informazioni possiamo avere senza risolvere le eq. differenziali?

Prendiamo un sistema meccanico conservativo ($l$ gradi di libertà)

→ l'energia meccanica si conserva

$$E = K + V = \mathcal{H}(\underline{y}(t; y_0)) = \mathcal{H}(\underline{y}_0)$$

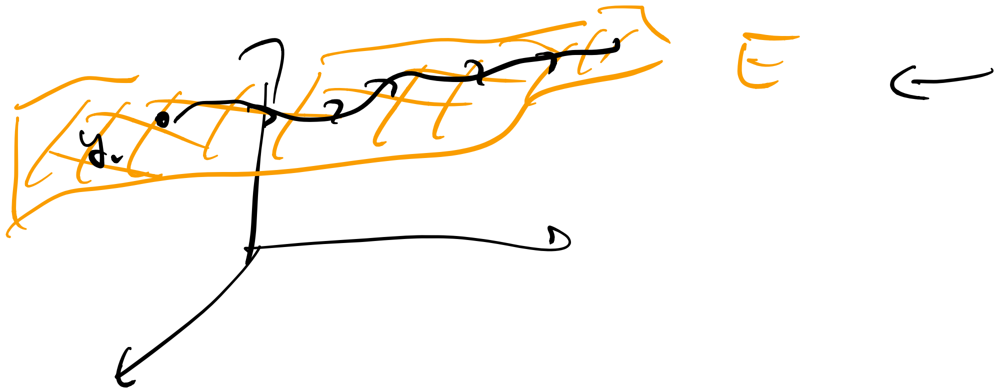
↑ condizioni iniziale

Graficamente: la

Traiettoria uscente dal dato iniziale $\underline{y}_0$, è sempre contenuta in

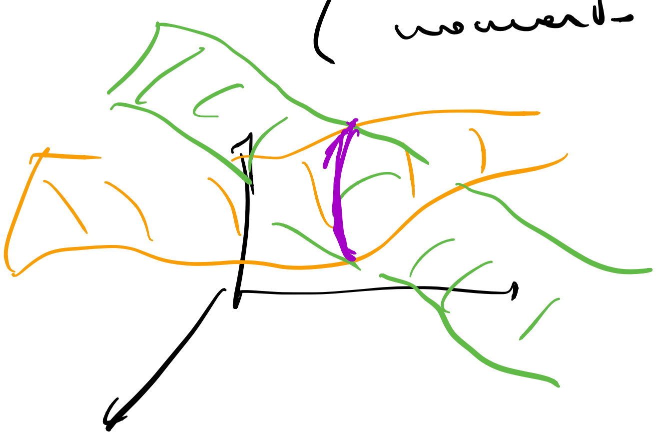
$$\{ \underline{y} \in \mathbb{R}^{2d} \mid H(\underline{y}(t)) = \bar{E} = H(\underline{y}_0) \}$$

insieme di livello $\bar{E}$ di $H$.




$\to$ cercare altre quantità conservate.

( momento angolare, -- )

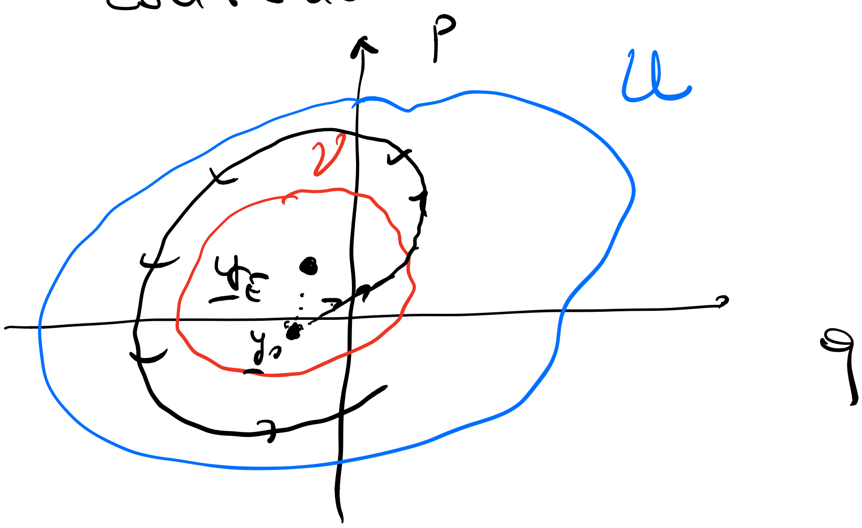


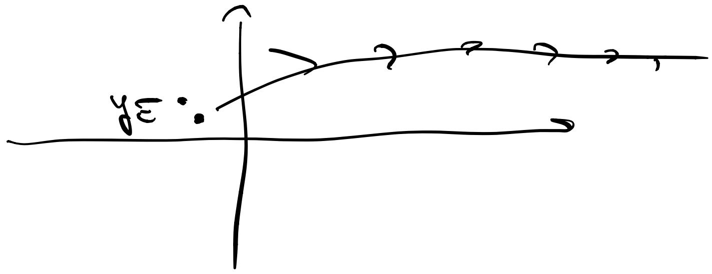
$\searrow$ informazioni qualitative senza risolvere le eq. del moto.

# Terza parte

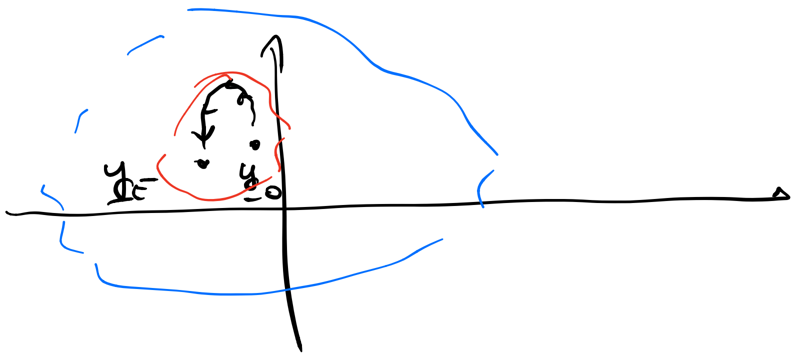
**Definizione** Stabilità di Liapunov

Una soluzione di equilibrio $\underline{y}_E$ si dice stabile (secondo Liapunov) se $\forall$ intorno $U$ di $\underline{y}_E$, esiste un intorno $V$ di "confinamento" di $\underline{y}_E$, tale che $\forall\, \underline{y}_0 \in V$ la traiettoria uscente da $\underline{y}_0$ è contenuta in $U$.

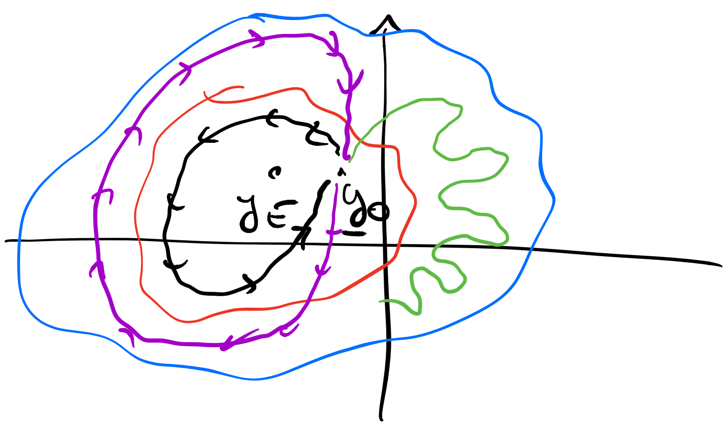





eq instabile




stabile




stabile

## Teorema di Liapunov

Consideriamo un sistema dinamico $\dot{\underline{y}} = \underline{F}(\underline{y})$ tale che

1) $\underline{F}$ dipende solo da $\underline{y}$ ed è regolare

2) $\exists$ una funzione $\mathcal{H}(\underline{y})$ regolare tale che per ogni soluzione

$\underline{y}(\tau)$ si abbia

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{H}(\underline{y}(\tau)) \leq 0 \qquad \forall\, t > 0$$

3) $y(\tau) = \underline{y}_\varepsilon$ è soluzione stazionaria

e $\underline{y}_\varepsilon$ è un minimo proprio

di $\mathcal{H}(\underline{y})$

Allora 1), 2), 3) $\Rightarrow$ $\underline{y}_\varepsilon$ è stabile secondo Liapunov

<u>Dim</u>

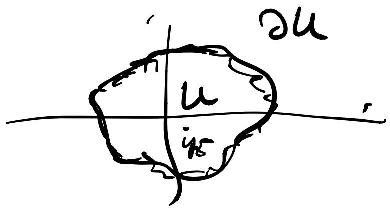
1. Siccome 3) (min di $\mathcal{H}$)

$\exists$ un intorno $\Omega$ di $\underline{y}_\varepsilon$ tale

che $\mathcal{H}(\underline{y}) > \mathcal{H}(\underline{y}_\varepsilon) = 0 \quad \forall\, \underline{y} \in \Omega$

2. $\forall\, U \subset \Omega$ intorno di $\underline{y}_\varepsilon$ e

chiamiamo $\partial U$ il suo bordo




Definiamo $\varepsilon := \min_{\underline{y} \in \partial U} H(\underline{y})$

$\varepsilon > 0$

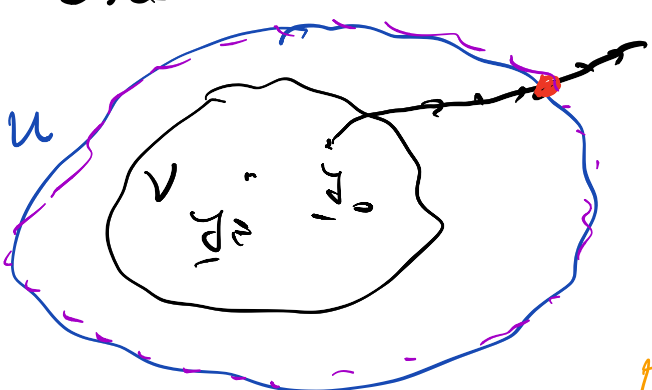
3. $$\lim_{\underline{y} \to \underline{y}_E} \mathcal{H}(\underline{y}) = \mathcal{H}(\underline{y}_E) = 0$$

Allora $\exists$ intorno $V$ di $\underline{y}_E$ tale che
$$\left| \mathcal{H}(\underline{y}) - \underbrace{\mathcal{H}(\underline{y}_E)}_{=0} \right| = \mathcal{H}(\underline{y}) < \frac{\bar{E}}{2}$$
$\forall\, \underline{y} \in V$

4. Vogliamo dimostrare che $\forall\, \underline{y}_0 \in V$ la traiettoria uscente da $\underline{y}_0$ è contenuta in $U$.

Chiamiamo questa traiettoria $\Gamma_{\underline{y}_0}$

Per assurdo supponiamo che $\Gamma_{\underline{y}_0}$ esca da $U$.




$\exists\, \bar{t}$

$\underline{y}(\bar{t}; y_0) \in \partial U$

Allora
$$\boxed{\mathcal{H}(\underline{y}(\bar{t}; y_0)) \geq \bar{E}}$$

Tuttavia, sappiamo che $\frac{d}{dt} \mathcal{H}(\underline{y}) \leq 0$

e quindi $\mathcal{H}$ non cresce lungo

la traiettoria $\Gamma_{\underline{y}_0}$

Quindi

$$\boxed{\mathcal{H}(\underline{y}(\bar{t}; y_0))} \le \mathcal{H}(\underline{y}_0) \le \boxed{\frac{\bar{t}}{2}}$$

per 3) $\forall \underline{y}_0 \in V$

Assurdo, $\Gamma_{\underline{y}_0}$ non può uscire

da $\mathcal{U}$ ∎