MOTO CENTRALE

Dati due corpi con en. pot. $V(\bar{r}_1-\bar{r}_2)$, allora questo sist. è descritto dalla Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\bar{R}}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{\bar{r}}^2 - V(\bar{r})}_{}$$

$$\bar{R} = \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2}{m_1+m_2}$$

$$\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$$

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

$$M = m_1+m_2$$

Ci restringiamo al caso di potenziale

$$V(\bar{r}) = V(\|\bar{r}\|)$$

$$L(\bar{r}, \dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{\bar{r}}^2 - V(\|\bar{r}\|) = \frac{1}{2} m \|\dot{\bar{r}}\|^2 - V(\|\bar{r}\|)$$

↳ L dipende solo dalle NORME dei vettori $\bar{r}$ e $\dot{\bar{r}}$

⇒ L è INVARIANTE per ROTAZIONI ⇒

⇒ Momento angolare $\bar{M}$ è COST. DEL MOTO

⇝ 3 cost. del moto scalari (le tre componenti del momento angolare)

Se $\bar{M}$ è cost. del moto, i moti $\bar{r}(t)$ che soddisfano le eq. di Lag. sono t.c.

$$\bar{r}(t) \times m \dot{\bar{r}}(t) = \bar{M}_{\text{cost.}} \qquad (A)$$

↳ ⇒ $\bar{r}(t)$ e $\dot{\bar{r}}(t)$ $\perp$ $\bar{M}$

Se $\bar{M} \neq 0$ è fisso durante il moto, vuol dire che

$\bar{r}(t)$ e $\dot{\bar{r}}(t)$ stanno sempre nel piano $\perp$ al mom. ang. $\bar{M}$

$\Rightarrow$ il moto avviene su un PIANO

(Se $\bar{M}=0$, $\bar{r} \parallel \dot{\bar{r}}$ $\rightarrow$ il moto è rettilineo.)

$\rightsquigarrow$ possiamo prendere l'asse $z \parallel \bar{M}$ cost.

$$\Rightarrow \bar{r} = x\bar{e_1} + y\bar{e_2} \qquad \dot{\bar{r}} = \dot{x}\,\bar{e_1} + \dot{y}\,\bar{e_2}$$

$\rightarrow$ ridotto il problema a 2 GRADI DI LIBERTA'

$\bar{M} \parallel$ asse z

$$L(\bar{r}, \dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

- per scrivere L a 2 gradi di libertà, abbiamo usato la DIREZIONE di $\bar{M}$, che è 2 cost. del moto
  Rimane il modulo (ovvero M_z)
  $\rightarrow$ ci aspettiamo di ritrovare altre cost. del moto nel problema a $n=2$.

Passiamo a COORD. POLARI

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta \\ \dot{y} &= \dot{r}\,\text{sen}\,\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{aligned}$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - V(r)$$

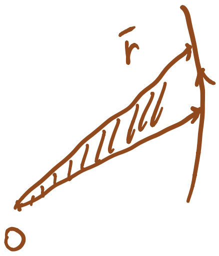
$\longrightarrow$ θ è una COORDINATA CICLICA

$\rightsquigarrow$ $p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta} = m r^2 \dot\theta$ è COST. DEL MOTO

$M_z = m(\dot x y - x \dot y)$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2} r^2 \dot\theta}_{\text{VELOCITÀ AREOLARE}}\Big) = 0$ lungo un moto che risolve eq. Lagr.

$\rightarrow$ Velocità areolare è cost. del moto $\longleftrightarrow$ 2ª legge di Keplero



$$dA = \frac{1}{2} r\, dr\, d\theta$$

$$A(t) = \int_{\theta_0}^{\theta(t)}\int_{r_0}^{r(t)} r'\, dr'\, d\theta' = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta' \int_{r_0}^{r(\theta')} r'\, dr' = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta(t)} r(\theta')^2\, d\theta'$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2}\cdot\dot\theta$$

$m r^2 \dot\theta = \ell$ costante

$\Downarrow$

$\dot\theta = \dfrac{\ell}{m r^2} > 0$ (se $\ell > 0$) $\rightarrow$ $\theta(t)$ è una funzione MONOTONA (crescente)

$\Updownarrow$

$\theta(t)$ è invertibile

$\rightsquigarrow$ mi dà una buona trasformazione di coordinate

θ può essere usata come variabile in luogo di t

cioè possiamo descrivere le TRAIETTORIE (ORBITE) con le funz.

$$r(\theta) \equiv r(t(\theta))$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - V(r)$$

Coord. ciclica θ, $\quad \dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}$

$$L_{eff} = \left(L - \dot{\theta} p_\theta\right)\Big|_{\dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}}$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{\ell}{mr^2}\right)^2 - V(r) - \left(\frac{\ell}{mr^2}\right)\ell$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - V(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

$$L_{eff} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - V_{eff}(r) \qquad \text{con } V_{eff} = V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

↳ risolvendo eq. di Lag. otteniamo $r(t)$

Poi prendo $\dot{\theta}(t) = \frac{\ell}{m r(t)^2}$ ⤳ $\theta(t)$

Se riusciamo a risolvere il problema a 1 grado di lib. con Lag. L_{eff}, siamo poi in grado di ottenere il moto $(r(t), \theta(t))$ sul piano.

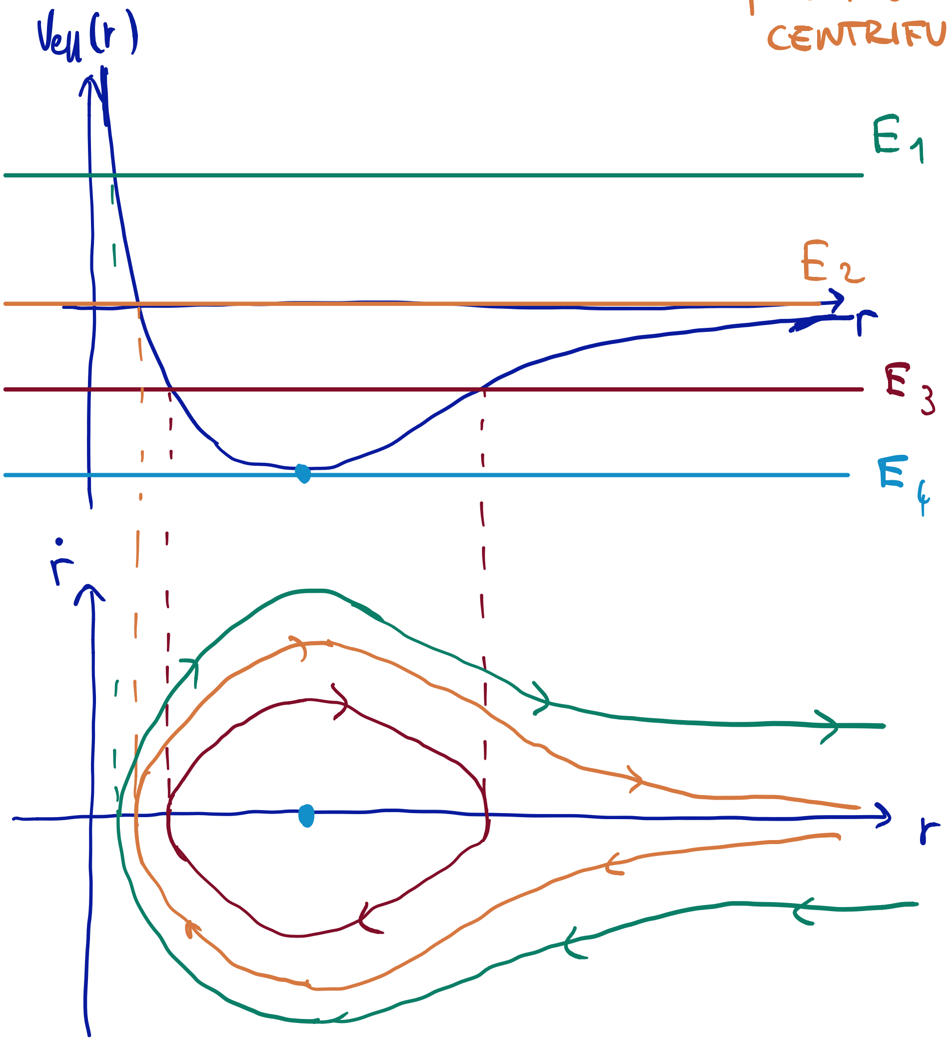
Diagramma di fase per $V(r) = -\frac{K}{r}$ (potenziale Kepleriano)

$\rightarrow V_{eff} = -\frac{K}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$ ← potenziale CENTRIFUGO

$V_{eff}'(r) = \frac{K}{r^2} - \frac{\ell^2}{mr^3} = \frac{K}{r^3}\left(r - \frac{\ell^2}{Km}\right)$

$E = T + V_{eff}$

$T \geq 0 \Rightarrow V_{eff}(r) \leq E$



E_1) - pto materiale non arriva mai all'origine $(r \geq r_0)$

- $r(t) \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} \pm\infty$

- tipico PROCESSO D'URTO (con una barriera centrifuga)

E_2) - simile a E_1, ma ora $\dot{r} \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} 0$

E_3) - moto è confinato fra r_{min} e r_{max}

r_{min} ↙ PERICENTRO, r_{max} ↓ APOCENTRO (distanze APSIDALI)

→ nel piano (x,y) le orbite sono LIMITATE
(ma non necessariam. CHIUSE)

$E_4)$ - min. del pot. eff. $\dot{r}(t)=0 \to r(t) = \text{cost.}$
→ ORBITA è CIRCOLARE $(\dot{\theta} \neq 0)$

Caso Kepleriano $V(r) = -\frac{k}{r}$

$$L_{eff} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{k}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

Eq. di Lag.

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L_{eff}}{\partial \dot{r}} &= m\ddot{r} \\ \frac{\partial L_{eff}}{\partial r} &= -\frac{k}{r^2} + \frac{\ell^2}{mr^3} \end{aligned}\right\} \quad \ddot{r} = -\frac{k}{mr^2} + \frac{\ell^2}{m^2r^3} \qquad (*)$$

Invece di trovare la funzione $r(t)$ che risolve $(*)$, possiamo cambiare variabile $t \mapsto \theta$ e cerchiamo

$$r(\theta) \equiv r(t(\theta)) \longleftrightarrow r(t) = r(\theta(t)) \qquad \dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\ell}{m}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \Leftarrow \dot{r}(\theta)$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\dot{r}(\theta) = \frac{d}{d\theta}\dot{r}(\theta)\cdot\dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}\left(-\frac{\ell}{m}\right)\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\ddot{r} = -\frac{\ell^2}{m^2r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\ddot{r} = -\frac{k}{mr^2} + \frac{\ell^2}{m^2 r^3} \iff -\frac{\ell^2}{m^2 r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{k}{mr^2} + \frac{\ell^2}{m^2 r^3}$$

$$\rightarrow \quad -\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{km}{\ell^2} + \frac{1}{r}$$

$$u(\theta) \equiv \frac{1}{r(\theta)} \qquad \frac{1}{\eta} \equiv \frac{km}{\ell^2}$$

$$u'' + u = \frac{1}{\eta}$$

Eq. lin. 2° ordine.

Soluz. partic.: $u(\theta) = 1/\eta$

$C \equiv \frac{e}{\eta}$

Soluz. gen. omog. ass. $(u'' = -u)$: $u(\theta) = C\cos(\theta - \theta_0)$

$\downarrow$

$$u(\theta) = \frac{1}{\eta}\left(1 + e\cos(\theta - \theta_0)\right)$$

$\Downarrow$

$$r(\theta) = \frac{\eta}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

in funz. di E

Equazione di una CONICA nel piano (in coord. polari)

Prob. unidim. $L_{eff} = T_{eff} - V_{eff} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \left(-\frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}\right)$

$\rightsquigarrow$ $E = T_{eff} + V_{eff}$ cost. del moto

Dato E, r_{min} t.c. $V_{eff}(r_{min}) = E$.

$$r_{min} = \frac{\eta}{1+e} \quad \text{(da solut. gen. } r(\theta)\text{)}$$

$$V_{eff}(r_{min}) = E \Rightarrow -\frac{k}{r_{min}} + \frac{\ell^2}{2m\, r_{min}^2} = E \rightarrow$$ eq. di 2° grado in $1/r_{min}$

$$\frac{\ell^2}{2m}\left(\frac{1}{r_{min}}\right)^2 - k\left(\frac{1}{r_{min}}\right) - E = 0$$

$$\left(\frac{1}{r_{min}}\right)_{1/2} = \frac{km}{\ell^2} \pm \frac{m}{\ell^2}\sqrt{k^2 + \frac{2E\ell^2}{m}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{r_{min}} = \frac{km}{\ell^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}\right)$$

$$\Rightarrow r_{min} = \frac{\ell^2/mk}{1 + \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}} \Rightarrow e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}$$

ma $r_{min} = \dfrac{\eta}{1+e}$

$$\frac{1}{\eta} = \frac{km}{\ell^2}$$

e è l'eccentricità della CONICA

$0 \leq e < 1 \rightarrow$ ELLISSE $\leftarrow E < 0$

$e = 1 \rightarrow$ PARABOLA $\leftarrow E = 0$

$e > 1 \rightarrow$ IPERBOLE $\leftarrow E > 0$