

Prop. Per un moto centrale con $V(r) = -\frac{k}{r}$, $k > 0$,
 le ORBITE sono CONICHE con FUOCO nell'ORIGINE
 (centro delle forze) di eq.

$$r(\theta) = \frac{\eta}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

Con parametri η ed eccentricità e dati da

$$\eta = \frac{l^2}{mk} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$$

Esse sono ellissi, iperbole o iperboli μ
 $E < 0$ $E = 0$ $E > 0$

$$L_{eff} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \overbrace{V(r)}^{-V_{eff}(r)} - \frac{l^2}{2mr^2}$$

$$\hookrightarrow E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{eff}(r) \quad \text{cost. del moto}$$

$$\hookrightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{eff}(r))} \Rightarrow dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{eff}(r))}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = t_0 + \int_{r_0}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{eff}(r))}}$$

$\Rightarrow t(r) \xrightarrow[\text{la funt.}]{\text{invertire}} r(t)$

Ricordiamo che $\dot{\theta}(t) = \frac{l}{mr^2(t)} \rightarrow d\theta = \frac{l}{mr^2} dt \rightarrow$

$$\rightarrow \theta(t) = \int_{t_0}^A \frac{l dt'}{mr^2(t')}$$

$$\rightsquigarrow d\theta = \frac{l}{\sqrt{2m}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V_{eff}(r)}}$$

$$\downarrow$$

$$\theta(r) = \theta_0 + \int_{r_0}^r \frac{l}{\sqrt{2m}} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - V_{eff}(r')}}$$

Consideriamo moti con $E < 0$ (orbite limitate nel piano; nel piano di fase sono curve chiuse)

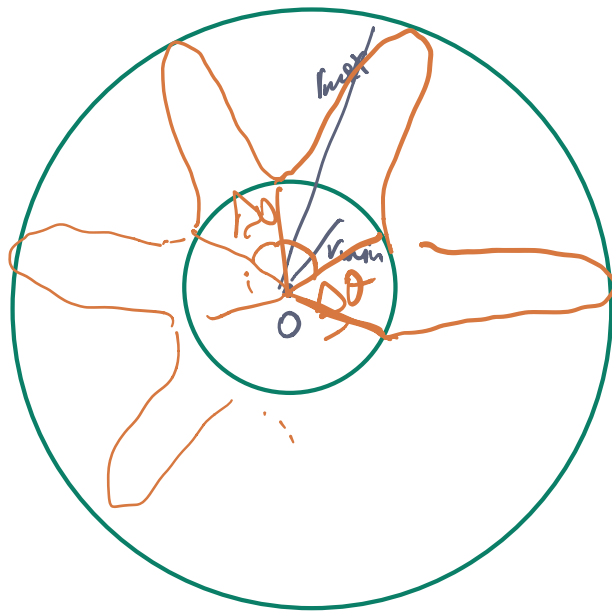
- moto $r(t)$ è periodico con periodo $T_r(E, l)$

- ogni periodo di r , $\theta(t)$ avanza di una quantità

$$\Delta\theta = 2 \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V_{eff}(r)}}$$

- θ è una variabile periodica di periodo 2π

\Rightarrow l'orbita nel piano è CHIUSA se $\frac{2\pi}{\Delta\theta} \in \mathbb{Q}$



Se $\frac{2\pi}{\Delta\theta} \in \mathbb{Q}$ prima o poi l'orbita si chiude.

Altrimenti è detta "orbita a rosetta" (l'orbita non chiude)

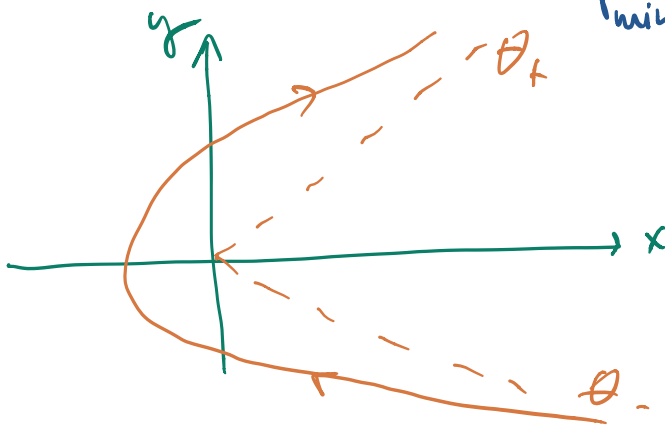
Consideriamo il caso $E > 0$ (orbite illimitate)

$$r \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} \infty \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{l}{mr^2} \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0 \Rightarrow \text{processo d'urto}$$

$$\Rightarrow \theta(t) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} \theta_{\pm} \text{ cost.}$$

$$\Delta\theta = \theta_+ - \theta_- = 2 \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - V_{eff}(r)}}$$

ANGOLO DI SCATTERING



Utilizzando

$$\Theta(r) = \Theta_0' + \int_{r_0}^r \frac{l}{\sqrt{2m}} \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E - V_{eff}(r')}} \quad \mu$$

calcolando le ORBITE per $V(r) = -\frac{K}{r}$, cioè

$$V_{eff}(r) = -\frac{K}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mK^2}} = \sqrt{1 + \frac{2E\eta}{K}}$$

$$\frac{1}{\eta} = \frac{mK}{l^2}$$

$$\Theta(r) - \Theta_0' = \int_{r_0}^r \frac{d\varrho}{\varrho^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mK}{l^2 \varrho} - \frac{1}{\varrho^2}}}$$

$$= \int_{r_0}^r \frac{d\varrho}{\varrho^2 \sqrt{\frac{2E}{\eta K} + \left(\frac{2}{\eta \varrho} - \frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\eta^2} \right) + \frac{1}{\eta^2}}}$$

$$= \int_{r_0}^r \frac{d\varrho}{\varrho^2 \sqrt{\frac{2E}{\eta K} + \frac{1}{\eta^2} - \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\eta} \right)^2}} = \int_{r_0}^r \frac{d\varrho}{\varrho^2 \sqrt{\frac{1}{\eta^2} \left[\left(\frac{2E\eta}{K} + 1 \right) - \left(\frac{\eta}{\varrho} - 1 \right)^2 \right]}}$$

$$= \int_{r_0}^r \frac{\eta d\varrho}{\varrho^2 \sqrt{e^2 - e^2 \left(\frac{\eta}{e\varrho} - \frac{1}{e} \right)^2}} = \frac{\eta}{e} \int_{r_0}^r \frac{d\varrho}{\varrho^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\eta}{e\varrho} - \frac{1}{e} \right)^2}}$$

$$w = \frac{\eta}{e\varrho} - \frac{1}{e}$$

$$dw = -\frac{\eta}{e\varrho^2} d\varrho$$

$$= - \int_{\frac{\eta}{er_0} - \frac{1}{e}}^{\frac{\eta}{er} - \frac{1}{e}} \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} = \arccos \left(\frac{\eta}{er} - \frac{1}{e} \right) + \text{cost.}$$

||
 $\theta(r) - \theta_0'$

$$\Rightarrow \theta(r) = \arccos \left(\frac{\eta}{er} - \frac{1}{e} \right) + \underbrace{\theta_0'}_{\theta_0} + \text{cost}$$

↓ inventiamo

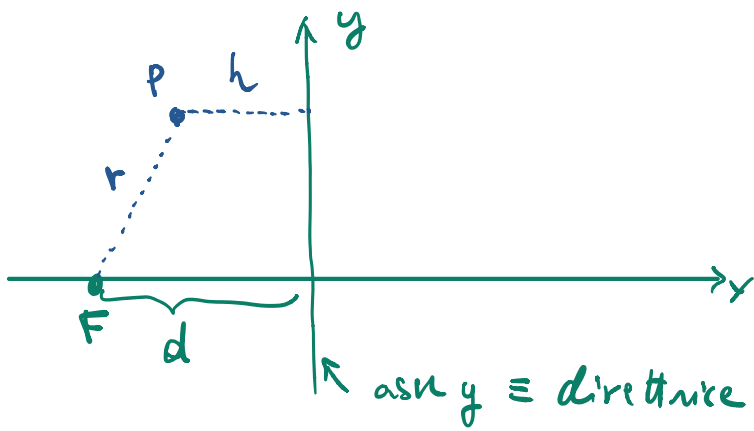
$$\frac{\eta}{er(\theta)} - \frac{1}{e} = \cos(\theta - \theta_0)$$

$$\Rightarrow \frac{\eta}{r(\theta)} = \frac{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}{e}$$

$$r(\theta) = \frac{\eta}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

Coniche

Coniche : curve del piano date dal luogo dei pt' P
 per cui è costante il rapporto delle distanze
 r e h da un pt' (FUOCO) e da
 una retta (DIRETTRICE)



$$\frac{r}{h} = e$$

$$d = \frac{h}{e}$$

$$P = (x, y)$$

In coord. cartesiane

$$r = \sqrt{(x+d)^2 + y^2}$$

$$h = |x|$$

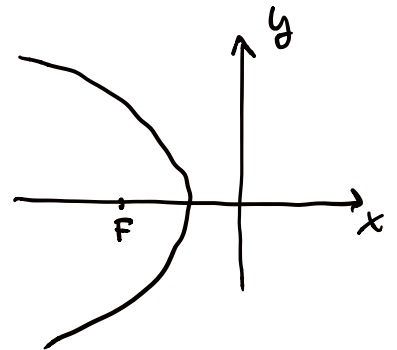
→ eq. della
conica:

$$\frac{r^2}{h^2} = e^2 \quad \text{cioè}$$

$$(x+d)^2 + y^2 = e^2 x^2$$

$$x^2 + 2dx + d^2 + y^2 - e^2 x^2 = 0$$

$$x^2(1-e^2) + 2d \cdot x + y^2 = -d^2$$



- se $e=1 \rightarrow x = -\frac{1}{2d}y^2 - \frac{1}{2}d$

- se $e \neq 1 \rightarrow x^2 + 2 \frac{d}{1-e^2} x + \frac{d^2}{(1-e^2)^2} + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{-d^2}{1-e^2} + \frac{d^2}{(1-e^2)^2}$

$$\left(x + \frac{d}{1-e^2} \right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2 d^2}{(1-e^2)^2}$$

$$\tilde{x}^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2 d^2}{(1-e^2)^2}$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{ed}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{(ed)^2}{1-e^2}} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

↑ ellipse
↑ iperbolo

se $e > 1$ iperbolo
se $e < 1$ ellipse

$$a = \frac{ed}{1-e^2} \quad b = \frac{ed}{\sqrt{|1-e^2|}}$$

ELLISSE:

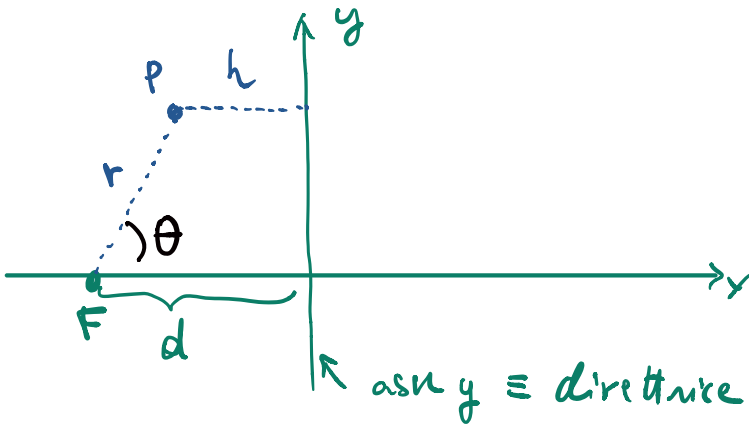
$$a = \frac{\eta}{1-e^2} \quad b = \frac{\eta}{\sqrt{1-e^2}}$$

$a > b$

$$\frac{r}{h} = e$$

$$d = \frac{\eta}{e}$$

$$b^2 = \eta a$$



In coord. polari (con origine in F)

$$e = \frac{r}{h} \quad h = d - r \cos \theta \rightarrow$$

↓

$$\frac{r}{e} = d - r \cos \theta \rightarrow r \left(\frac{1}{e} + \cos \theta \right) = d$$

$$\rightarrow r(\theta) = \frac{\eta}{1 + e \cos \theta}$$

$$d = \frac{\eta}{e}$$

↓

Leggi di Keplero

- 1) Pianeti si muovono descrivendo delle ellissi, con fuoco sul Sole
- 2) $\bar{r}(t)$ (con origine nel Sole) descrive aree uguali in tempi uguali (\Rightarrow velocità areolare è cost.)
- 3) Detto T il periodo di rivoluzione,
 T^2 è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse.

1) e 2) già dimostrate

Prop. Periodo di T del moto sulle ellissi è legato al semiasse maggiore della ellisse

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{k}$$

Dim. Usiamo la 2) legge:

$$T = \frac{\text{area ellisse}}{\text{velocità areolare}} = \frac{\pi a b}{\frac{1}{2} r \dot{\theta}} = \frac{\pi a b}{l/2m}$$

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{4m^2 \pi^2 a^2 b^2}{l^2} = \frac{4m^2 \pi^2 a^2}{l^2} \eta a = \frac{4m^2 \pi^2 a^3}{l^2} \frac{l^2}{mk} = \\ &= \frac{4\pi^2 m}{k} a^3 // \end{aligned}$$

ELLISSE:

$$a = \frac{\eta}{1-e^2} \quad b = \frac{\eta}{\sqrt{1-e^2}} \quad b^2 = \eta a$$

$a > b$

$$K = G m M_s$$

↓

dato Keplero interpretato in
come la massa del pianeta

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \rightarrow \text{cioè } T \text{ è indep. della}$$

massa del pianeta

In realtà $m = \frac{m_p M_s}{m_p + M_s} \neq m_p$

e $K = G \underline{m_p} M_s$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{K} = \frac{4\pi^2 m_p M_s}{m_p + M_s} \cdot \frac{1}{G m_p M_s} =$$

$$= \frac{4\pi^2}{G M_s} \frac{1}{1 + \frac{m_p}{M_s}}$$

↳ $m_p \ll M_s$

$$\frac{m_p}{M_s} \ll 1$$

$$\sim \frac{4\pi^2}{G M_s} \left(1 - \frac{m_p}{M_s} + \dots \right)$$

↑ trascurabile