

LEGGE ORARIA (cioè soluzione delle eq. del moto)

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r))}} \rightarrow t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{\frac{k}{\tilde{r}} - \frac{l^2}{2m\tilde{r}^2} + E}} \rightarrow t(r) \xrightarrow{\text{inversione}} r(t) \quad (*)$$

$$d\theta = \frac{l}{mr^2} dt \rightarrow t = \frac{m}{l} \int_{\theta_0}^{\theta} r(\tilde{\theta})^2 d\tilde{\theta} \rightarrow t(\theta) \xrightarrow{\text{invers}} \theta(t)$$

$$= \frac{m}{l} \frac{l^3}{m^2 k^2} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\tilde{\theta}}{[1 + e \cos(\tilde{\theta} - \theta')]^2}$$

Integrali da fare non sono complicati e quindi  $t(r)$  e  $t(\theta)$  sono esprimibili in termini di funzioni elementari. Quello che è complicato spesso è l'INVERSIONE di pt. funzioni per ottenere  $r(t)$  e  $\theta(t)$

Esempio: prendiamo  $\theta' = 0$  ( $\theta = 0$  è il periclio, cioè  $r_{min}$ ) e consideriamo la traiettoria PARABOLICA ( $e=1$ )

$$t = \frac{l^3}{mk^2} \int_0^{\theta} \frac{d\tilde{\theta}}{(1 + \cos\tilde{\theta})^2} = \frac{l^3}{4mk^2} \int_0^{\theta} \frac{d\tilde{\theta}}{(\cos\frac{\tilde{\theta}}{2})^2 (\cos\frac{\tilde{\theta}}{2})^2}$$

$\frac{1 + \cos d}{2} = \cos^2 \frac{d}{2}$

$$x = \text{tg} \frac{\tilde{\theta}}{2} = \frac{\sin \tilde{\theta}/2}{\cos \tilde{\theta}/2}$$

$$= \frac{l^3}{2mk^2} \int_0^{\text{tg} \theta/2} dx (1 + x^2) = \frac{l^3}{2mk^2} \left[ \text{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \text{tg}^3 \frac{\theta}{2} \right] = t(\theta)$$

$A(\theta)$  è funz. semplice, ma per ottenere  $\theta(t)$  dobbiamo risolvere un'eq. cubica (complicata) e infine inventare la tangente.

[ Osservazione:  $\theta=0 \leftrightarrow t=0$        $\theta=\pm\pi \leftrightarrow t \rightarrow \pm\infty$   
(consist. con traiettoria periodica) ]

Una volta che abbiamo ottenuto  $\theta(t)$ , per trovare  $r(t)$ :

1) risolvere (\*)

2) siccome conosciamo  $r(\theta)$ :

$$r(t) = r(\underline{\theta(t)})$$

Metodo alternativo: prima risolvere (\*)  $\rightarrow r(t)$   
e poi mettere  $r(t)$  in  $d\theta = \frac{l}{m r^2} dt$  e integrare  
per trovare  $\theta(t)$ .

# ORBITA utilizzando il vettore di (Laplace-) Runge-Lenz.

Finora abbiamo calcolato  $v(\theta)$  in 2 modi:

- valido  
per ogni  
potenziale  
 $V=V(r)$
- 1) risolvendo le eq. di Lagrange (Eq. diff. 2° ord.)  
per il problema RIDOTTO (usando cost. del moto  $\bar{M}$ )
  - 2) abbiamo usato un'altra cost. del moto,  
l'ENERGIA, per ridurre l'eq. diff. del 2° ord.  
a un'eq. diff. del 1° ord. (risolvibile per quadrature)

Introduciamo un'ulteriore cost. del moto che ci  
permetterà di ridurre il problema del calcolo di  $r(\theta)$   
alla risoluzione di eq. diff. "del 0° ordine" cioè  
un'eq. algebrica.

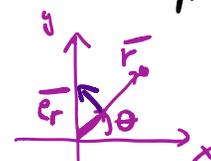
→ prob è vero se  $V(r) = -\frac{k}{r}$

prop. Nel moto Kepleriano le seguenti variab. dinamiche (vettoriali)  
si conservano:

$$\bar{A} = \bar{p} \times \bar{M} - mk \frac{\bar{r}}{r} = m \dot{\bar{r}} \times \bar{M} - mk \frac{\bar{r}}{r} \quad (\bar{M} = l\bar{e}_z)$$

↑ giace sul piano dell'orbita

Dimo. Valutiamo  $\bar{A}$  in  $r(t)$  e  $\theta(t)$



$$\bar{r} = r \bar{e}_r$$

$$\dot{\bar{r}} = \dot{r} \bar{e}_r + r \dot{\bar{e}}_r$$

$$= \dot{r} \bar{e}_r + r \dot{\theta} \bar{e}_\theta$$

$$\bar{e}_r = \cos\theta \bar{e}_x + \sin\theta \bar{e}_y$$

$$\dot{\bar{e}}_r = -\dot{\theta} \sin\theta \bar{e}_x + \dot{\theta} \cos\theta \bar{e}_y = \dot{\theta} \bar{e}_\theta$$

$$\bar{e}_\theta = -\sin\theta \bar{e}_x + \cos\theta \bar{e}_y$$

$$\dot{\bar{e}}_\theta = -\dot{\theta} \cos\theta \bar{e}_x - \dot{\theta} \sin\theta \bar{e}_y = -\dot{\theta} \bar{e}_r$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{r} \bar{\mathbf{e}}_r + \dot{r} \dot{\theta} \bar{\mathbf{e}}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\theta} \bar{\mathbf{e}}_\theta + r \ddot{\theta} \bar{\mathbf{e}}_\theta - r \dot{\theta}^2 \bar{\mathbf{e}}_r$$

$$\stackrel{!}{=} (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \bar{\mathbf{e}}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \bar{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\bar{\mathbf{e}}_r \times \bar{\mathbf{e}}_\theta = \bar{\mathbf{e}}_z, \quad \underline{\bar{\mathbf{e}}_r \times \bar{\mathbf{e}}_z = -\bar{\mathbf{e}}_\theta}, \quad \underline{\bar{\mathbf{e}}_\theta \times \bar{\mathbf{e}}_z = \bar{\mathbf{e}}_r}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = m \dot{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{M}} - \mu k \frac{\mathbf{r}}{r} \quad M = l \bar{\mathbf{e}}_z$$

$$\stackrel{!}{=} -ml \dot{r} \bar{\mathbf{e}}_\theta + \mu r \dot{\theta} l \bar{\mathbf{e}}_r - \mu k \bar{\mathbf{e}}_r$$

$$\dot{\bar{\mathbf{A}}} = -ml \ddot{r} \bar{\mathbf{e}}_\theta + 2ml \dot{r} \dot{\theta} \bar{\mathbf{e}}_r + \mu r \ddot{\theta} l \bar{\mathbf{e}}_r + \mu r \dot{\theta}^2 l \bar{\mathbf{e}}_\theta - \mu k \dot{\theta} \bar{\mathbf{e}}_\theta$$

valutiamo  
in  $r(t)$  e  
 $\theta(t)$  che soddisfano  
le eq. del moto

$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \quad \ddot{\theta} = -\frac{2l}{\mu r^3} \dot{r}$$

$$\ddot{r} = -\frac{k}{\mu r^2} + \frac{l^2}{\mu^2 r^3}$$

$$= \bar{\mathbf{e}}_\theta m \left[ -l \left( -\frac{k}{\mu r^2} + \frac{l^2}{\mu^2 r^3} \right) + r l \frac{l^2}{\mu^2 r^4} - \frac{k l}{\mu r^2} \right]$$

$$+ \bar{\mathbf{e}}_r m \left[ 2l \dot{r} \left( \frac{l}{\mu r^2} \right) + l r \left( -\frac{2l}{\mu r^3} \dot{r} \right) \right] = 0!$$

questo avviene

sob quando  $r(t)$  e  $\theta(t)$

soddisf. eq. del moto

[ Ricordiamoci come abbiamo utilizzato che  $\frac{\mu \dot{x}^2}{2} + V(x)$  e cost. del moto; abbiamo preso una cost. E

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) \rightsquigarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

Scegliamo una cost.  $a \cos \theta_0 \bar{e}_x + a \sin \theta_0 \bar{e}_y$

↳ imponiamo la condit.

$$a \cos \theta_0 \bar{e}_x + a \sin \theta_0 \bar{e}_y = \bar{A}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) \leftarrow$$

Ep. in  $r(\theta)$  e  $r'(\theta)$

$$\bar{e}_r = \cos \theta \bar{e}_x + \sin \theta \bar{e}_y$$

$$\bar{e}_\theta = -\sin \theta \bar{e}_x + \cos \theta \bar{e}_y$$

$$\underline{a \cos \theta_0 \bar{e}_x + a \sin \theta_0 \bar{e}_y =}$$

$$= -m l \dot{r} \bar{e}_\theta + m r \dot{\theta} l \bar{e}_r - m k \bar{e}_r$$

$$= ( m l \dot{r} \sin \theta + m r \dot{\theta} l \cos \theta - m k \cos \theta ) \bar{e}_x +$$

$$+ ( -m l \dot{r} \cos \theta + m r \dot{\theta} l \sin \theta - m k \sin \theta ) \bar{e}_y$$

$$\dot{\theta} = \frac{l}{m r^2} \Rightarrow m r \dot{\theta} = \frac{l}{r} \Rightarrow u(\theta) = \frac{l}{r(\theta)}$$

$$u(\theta) = \frac{l}{r(\theta)}$$

$$\dot{r} = r'(\theta) \cdot \dot{\theta} = r'(\theta) \frac{l}{m r^2} = -\frac{l}{m} \frac{u'}{u} \Rightarrow m \dot{r} = -l u'$$

$$= ( -l^2 u' \sin \theta + l^2 u \cos \theta - m k \cos \theta ) \bar{e}_x +$$

$$+ ( l^2 u' \cos \theta + l^2 u \sin \theta - m k \sin \theta ) \bar{e}_y$$

2 equazioni nelle incognite  $u$  e  $u'$

↓ sistema lineare

$$\begin{cases} -\underline{u}' \sin \theta + \underline{u} \cos \theta = \frac{\mu k}{l^2} \cos \theta + \frac{a}{l^2} \cos \theta_0 \cdot \cos \theta + \\ \underline{u}' \cos \theta + \underline{u} \sin \theta = \frac{\mu k}{l^2} \sin \theta + \frac{a}{l^2} \sin \theta_0 \cdot \sin \theta \end{cases}$$

$$u \cos^2 \theta + u \sin^2 \theta = \frac{\mu k}{l^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \frac{a}{l^2} (\cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 \sin \theta)$$

$$u = \frac{1}{\eta} + \frac{a}{l^2} \cos(\theta - \theta_0)$$

$$\frac{1}{r(\theta)} = \frac{1}{\eta} + \frac{e}{\eta} \cos(\theta - \theta_0)$$

$$r(\theta) = \frac{\eta}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

[ Dal sist. lineare,  $\begin{matrix} \bullet \sin \theta \\ \bullet \cos \theta \end{matrix} \rightarrow$

$$\rightarrow u' = \frac{e}{\eta} (\cos \theta \sin \theta_0 - \sin \theta \cos \theta_0) = -\frac{e}{\eta} \sin(\theta - \theta_0)$$

$$\text{cioè } u' = \frac{du}{d\theta} \quad // \quad ]$$

$\bar{p}$   $\longleftrightarrow$  traslazioni

$\bar{M}$   $\longleftrightarrow$  rotazioni in 3d  $SO(3)$   $OO^T = 1$

3 parametri  
continui

$\bar{A}$   $\longleftrightarrow$  ?

+ 3 parametri  
continui

$SO(4)$

6 parametri  
continui

Simmetrie di  $L$   
moto centrale:  
 $SO(3)$

3 param. cont.

↓ Teor. Noth

3 cost. del moto

$(M_x, M_y, M_z)$

moto kepleriano  
 $SO(4)$

6 param. cont.

↓ Teor. Noth

6 cost. del moto

$(M_x, M_y, M_z, A_x, A_y, A_z)$

$\lceil SO(d)$  rotaz. in  $\mathbb{R}^d \rightarrow$  parametrizzate dalle rotazioni  
su piani indep.

$SO(2)$  :  $\binom{2}{2} = 1$  piano  $\rightarrow$  1 parametro (1 angolo)

$SO(3)$  :  $\binom{3}{2} = 3$  piani  $\rightarrow$  3 "

$SO(4)$  :  $\binom{4}{2} = 6$  "  $\rightarrow$  6 "

$$So(d) \quad \binom{d}{2} \text{ pieces} \quad \rightarrow \quad \frac{d(d-1)}{2} \text{ angles}$$

