SISTEMI DINAMICI

28 aprile 2021

Sistemi dinamici nonlineari

$\dot{x} = f(x)$ $\qquad f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Andare a vedere i punti critici

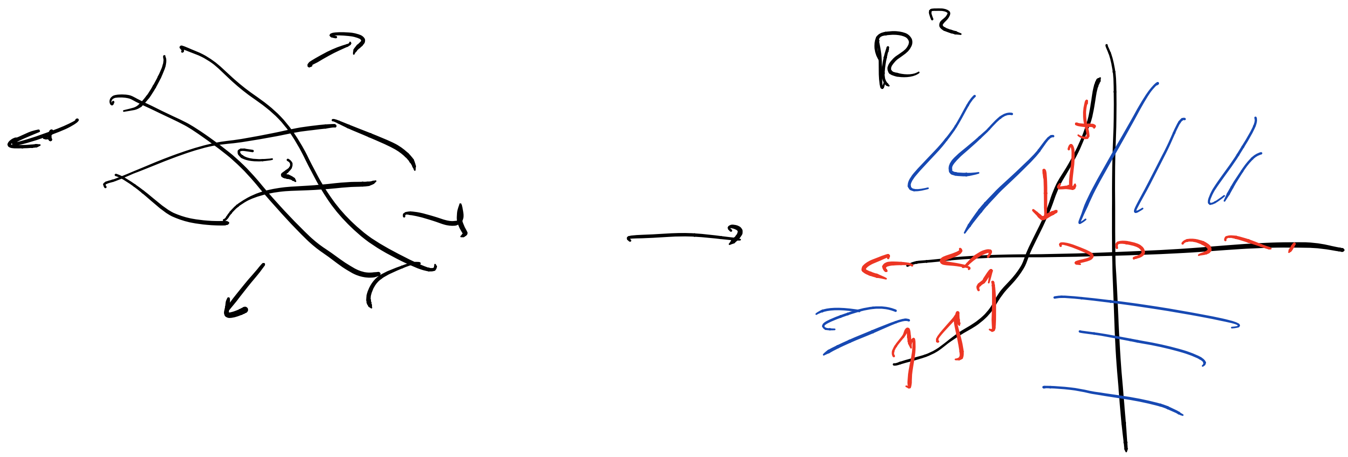
$x^* : \quad f(x^*) = 0$

Isocline : prendiamo x_i

$\dot{x}_i = 0 = f_i(x_1, \ldots, x_n)$

$\mathbb{R}^n$ $\quad f_i \to x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2 - R = 0$

$\to \quad \dot{x}_i = 0 \qquad \dot{x}_i > 0 \,, \quad \dot{x}_i < 0$



Informazione locale vicino ai punti critici $\to$ linearizzazione

$x = x^* + \eta \qquad \eta$ "piccola"

$$\frac{d}{d\tau} x(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left(x^* + \eta(\tau)\right) = \frac{d}{d\tau}\eta(\tau) =$$

$$= \underbrace{f(x^*)}_{=0} + Df(x^*)\,\eta + \boxed{O(|\eta|^2)}$$

$$\downarrow$$

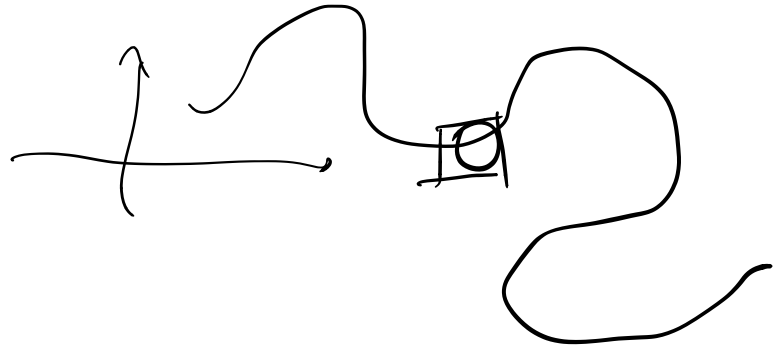
$$(Df)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$ calcolata in x^*

$(Df)_{(x^*)\,ij} =: A_{ij}$

$\to \quad \dot{\eta} = A\,\eta$

matrice

$\dot{x}_i = 0$



Esempio

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}y + 2x^2 + \frac{1}{2}y^2 \\ \dot{y} = -x + 2y + 4xy \end{cases}$$

punti critici $\longrightarrow (x^*, y^*) = (0,0)$

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} + 4x & -\frac{1}{2} + y \\ -1 + 4y & 2 + 4x \end{pmatrix}$$

calcoliamo $Df \big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow e^{tA}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdot \\ \cdot & \lambda_2 \end{pmatrix}$ --

$\rightarrow$ la struttura locale è determinata dagli autovalori di $A = (Df)_{(x^*)}$

$A : E \to E$

$E = E^s \oplus E^c \oplus E^u$

Def Un punto di equilibrio si dice iperbolico se $E^c = \emptyset$ (Tutti gli autovalori hanno parte reale non nulla)

Pozzo : $E = E^s$

Sorgente : $E = E^u$

Sella : $E = E^s \oplus E^u$

Centro ; Fuoco ---

$\hookrightarrow$ quando la soluzione del sistema linearizzato assomiglia alla soluzione del sistema non lineare.

Esempio

competizione tra due specie

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - x^2 - 2xy \\ \dot{y} = 2y - y^2 - yx \end{cases}$$

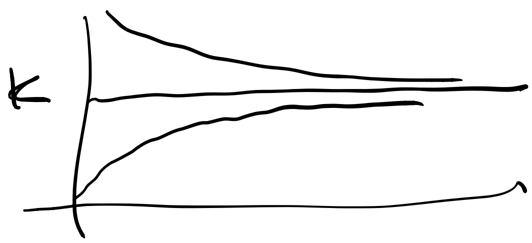
$\dot{x} = r x \quad \rightarrow \quad e$

$r = \beta - \mu \qquad x = \#$ elementi di una specie

$\dot{x} = \beta x - \mu x = r x$

modelli logistici

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$



$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - x^2 - 2xy \\ \dot{y} = 2y - y^2 - xy \end{cases} \qquad \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}$$

punto di partenza :

$$x(3 - x - 2y) = 0$$

$$y(2 - y - x) = 0$$

$(0,0)$ —
$(0,2)$ —
$(3,0)$ —
$(1,1)$

$$Df = \begin{pmatrix} 3-2x-2y & -2x \\ -y & 2-2y-x \end{pmatrix}$$

Struttura locale vicino ai punti critici

(0,0)

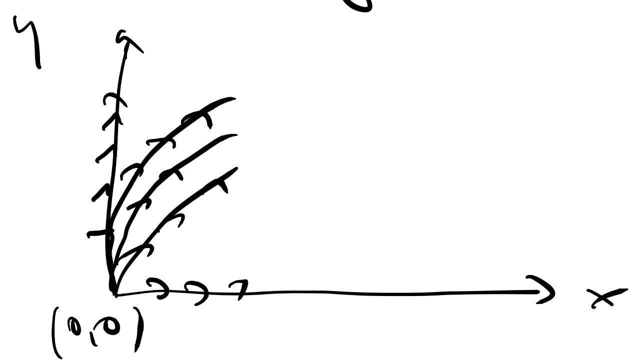
$$A = (Df)\big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ sorgente

$\lambda = 3, 2$

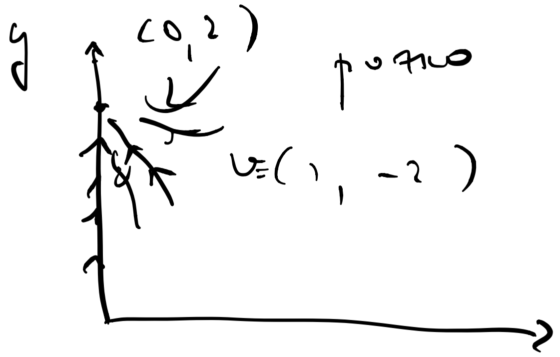
$\lambda = 2$

$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



(0,2)

$$A = (Df)\big|_{(0,2)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$



pozzo

$v = (1, -2)$

$\lambda = -1, -2$

$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix}$

$(-1-\lambda)(-2-\lambda)$

autovettore

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2+4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -1$

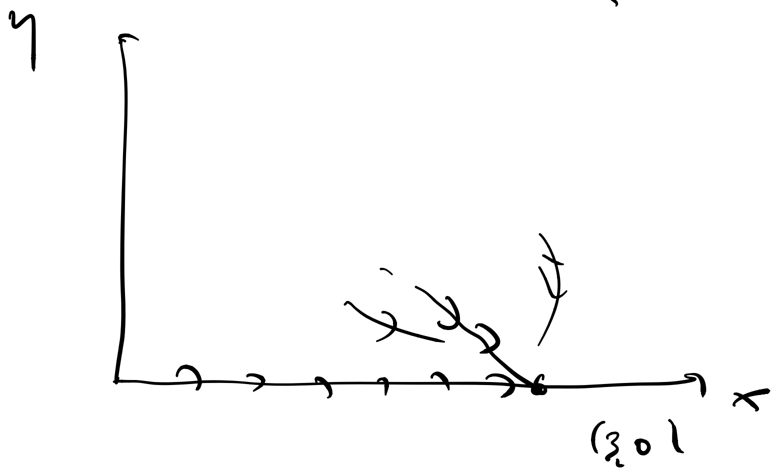
(3,0)

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = -3, -1$$

autovettori

$(1,0)$

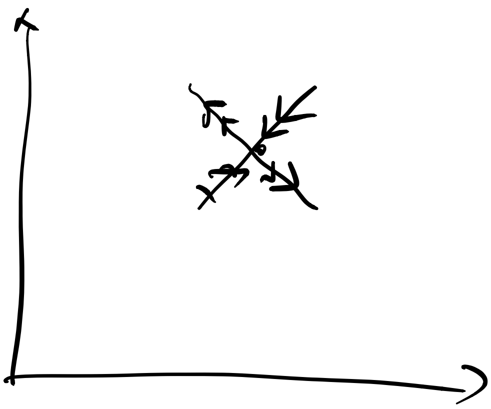
$(-3,1)$



(1,1)

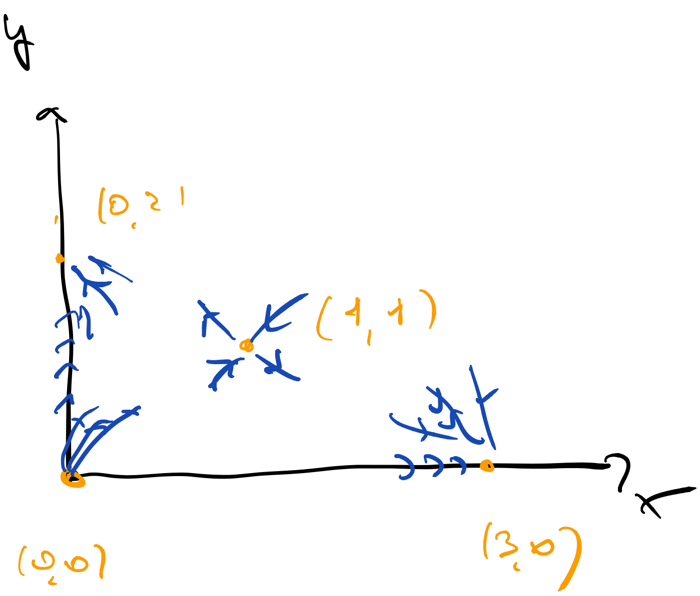
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = -1 \pm \sqrt{2}$$

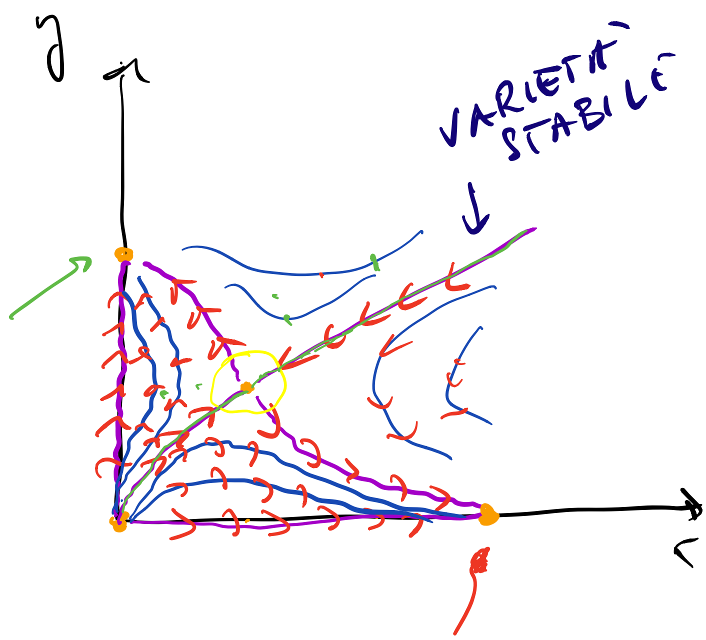
due autovalori di segno opposto



$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$(-1-\lambda)^2 = 2$$





In generale una specie porta all'altra all'estinzione, a seconda delle condizioni iniziali.

Per un punto critico x^*, parliamo di <u>bacino di attrazione</u> per indicare l'insieme delle condizioni iniziali (x_0, y_0) t.c.

$$\left(x(t; x_0), y(t; y_0) \right) \xrightarrow[t \to +\infty]{} (x^*, y^*)$$

<u>STABILITÀ</u> : misura di quanto orbite che partono vicine rimangono vicine

↳ stabilità à la Liapunov