

SIMMETRIE E L'INTEGRALE SUI CAMMINI

Il formalismo dell'integrale funzionale rende manifeste le simmetrie e invarianze del sistema quantistico:

Se l'azione $S[\varphi]$ e la misura $\mathcal{D}\varphi$ sono invarianti sotto una trasformazione, allora questa è una simmetria.

Equazioni di Schwinger-Nyson [PS. 9.6, S. 14.7]

Cominciamo studiando le equazioni del moto quantistiche.

Facciamo uno shift $\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = \varphi(x) + \varepsilon(x)$

è un cambio di variabile che non modifica l'integrale funzionale o la misura: $\mathcal{D}\varphi \rightarrow \mathcal{D}\varphi$

Prendiamo la funzione a due punti

$$\langle 0 | T \{ \varphi(x_1) \varphi(x_2) \} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\varphi e^{i \int \mathcal{L}(\varphi)} \varphi(x_1) \varphi(x_2) = \int \mathcal{D}\varphi' e^{i \int \mathcal{L}(\varphi')} \varphi'(x_1) \varphi'(x_2) \quad (*)$$

Esponendo al primo ordine in $\varepsilon(x)$:

$$\begin{aligned} \int d^4x \mathcal{L}(\varphi') &= \int \left[\mathcal{L}(\varphi) + \delta \mathcal{L} \right] = \int \mathcal{L}(\varphi) + \int \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \varepsilon + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} \partial_\mu \varepsilon \right] = \\ &= \int \mathcal{L}(\varphi) + \int d^4x \varepsilon(x) \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \varphi} \right] \quad \leftarrow \text{Equazioni di} \\ &\quad \text{Eulero-Lagrange} \end{aligned}$$

Prendendo la differenza in (*) abbiamo:

$$0 = \int \mathcal{D}\varphi e^{i\int \mathcal{L}(\varphi)} \left\{ i \int d^4x \varepsilon(x) \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \varphi)} \right] \varphi(x_1) \varphi(x_2) + \varepsilon(x_1) \varphi(x_2) + \varphi(x_1) \varepsilon(x_2) \right\}$$

Derivando in $\int \varepsilon(x)$: le derivate le portiamo fuori dall'integrale **termini di contatto**

$$\Rightarrow \langle 0 | T \left[\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \varphi)} \right) \varphi(x_1) \varphi(x_2) \right] | 0 \rangle = \langle i \int (x-x_1) \varphi(x_2) \rangle + \langle \varphi(x_1) i \int (x-x_2) \rangle$$

In generale:

Equazioni di Schwinger-Dyson

$$\left\langle \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \varphi)} \right) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \varphi(x_1) \dots i \delta(x-x_i) \dots \varphi(x_n) \rangle$$

↳ Le derivate vanno fuori dal T-prodotto.

⇒ Le equazioni del moto sono soddisfatte per tutte le funzioni di Green, almeno di termini di contatto.

Esempio:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{m^2}{2} \varphi^2 \quad \rightarrow \quad \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \varphi)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} = (\square_x + m^2) \varphi(x)$$

$$(\square_x + m^2) \langle \varphi(x) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle = \sum_{i=1}^n \langle 0 | T \{ \varphi(x_1) \dots (-i \delta(x-x_i)) \dots \varphi(x_n) \} | 0 \rangle$$

$n=1$:

$$(\square_x + m^2) \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle = -i \delta(x-y) \quad \leftarrow \text{Il propagatore}$$

SIMMETRIE GLOBALI

Nella teoria dei campi classica, ad ogni simmetria continua corrisponde una corrente conservata:

$$(1) \quad \varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = \varphi(x) + \varepsilon \Delta\varphi(x)$$

tale che $\forall \varphi(x): \mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \varepsilon d_r \int^\mu(x)$ ← possibile termine di superficie.

$$\Rightarrow S = \int d^4x \mathcal{L}(x) \text{ è invariata.}$$

Confrontiamo con quello che si ottiene da una transf. dei campi (1):

$$\varepsilon \Delta\mathcal{L} = \varepsilon \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \Delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_r\varphi)} d_r(\Delta\varphi) \right] = \varepsilon \left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - d_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right) \Delta\varphi + d_\mu \left(\Delta\varphi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right) \right]$$

$$\equiv \varepsilon d_\mu \int^\mu \leftarrow \text{assumendo che la trasformazione sia una simmetria.}$$

Definendo $j^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \Delta\varphi - \int^\mu$ si ha

$$\partial_\mu j^\mu = -\Delta\varphi \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - d_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right) \longrightarrow 0$$

per configurazioni che soddisfano Eulero-Lagrange

↑ corrente conservata di Noether

$\Rightarrow Q = \int d^3x j^0$ è una carica conservata

Eg: $\mathcal{L} = |\partial_\mu\varphi|^2 - m^2|\varphi|^2 \rightarrow \varphi \rightarrow \varphi' = e^{i\alpha}\varphi(x) \simeq (1+i\alpha)\varphi(x)$

$$\Rightarrow \int^\mu = 0 \quad \& \quad j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \Delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)} \Delta\varphi^* = i(\partial^\mu\varphi^* \varphi - \varphi^* \partial^\mu\varphi)$$

Equazioni di Schwinger-Dyson per simmetrie globali

(o identità di Ward-Takahashi)

[Se. 4.4.2, PS. 9.6, S. 14.8.1]

A livello quantistico, vediamo le conseguenze di una simmetria continua a partire dal path integral

$$\mathcal{L} = |\partial_r \phi|^2 - m^2 |\phi|^2 \quad \phi \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha} \phi(x) \simeq (1+i\alpha) \phi(x)$$

Prendiamo $\alpha = \alpha(x)$: $\mathcal{D}\phi' = \mathcal{D}\phi$ \leftarrow La misura è invariante

$$\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi)} \phi(x_1) \phi^*(x_2) = \int \mathcal{D}\phi' e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\phi')} \phi'(x_1) \phi'^*(x_2) \Big|_{\phi' = (1+i\alpha)\phi}$$

$$\mathcal{L}(\phi') \simeq |\partial_r (1+i\alpha)\phi|^2 - m^2 |\phi|^2 = \mathcal{L}(\phi) + (\partial_r \alpha) i (\partial^r \phi^* \phi - \phi^* \partial^r \phi)$$

Espandendo in α al primo ordine: $\mathcal{L}(\phi') = \mathcal{L}(\phi)$ per α costante.

$$0 = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}} \left\{ i \int d^4x \left[(\partial_r \alpha) i (\phi \partial^r \phi^* - \phi^* \partial^r \phi) \right] \phi(x_1) \phi^*(x_2) + [i \alpha(x_1) \phi(x_1)] \phi^*(x_2) - \phi(x_1) [-i \alpha(x_2) \phi^*(x_2)] \right\}$$

In integrando per parti, derivando in $\frac{\delta}{\delta \phi(x)}$ e dividendo per $Z[0]$:

$$i \langle \partial_r \mathcal{J}^r(x) \phi(x_1) \phi^*(x_2) \rangle = i \delta(x-x_1) \langle \phi(x_1) \phi^*(x_2) \rangle - i \delta(x-x_2) \langle \phi(x_1) \phi^*(x_2) \rangle$$

Come per le equazioni del moto, la corrente è conservata a meno di termini di contatto.

IDENTITÀ DI WARD-TAKAHASHI PER LA QED

Studiamo le implicazioni della simmetria globale di QED

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\not{D} - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\nu\mu} F^{\nu\mu}$$

$$\begin{cases} \psi \rightarrow e^{ie\alpha} \psi \approx (1 + ie\alpha) \\ \bar{\psi} \rightarrow e^{-ie\alpha} \bar{\psi} \approx \bar{\psi} (1 - ie\alpha) \\ A_\mu \rightarrow A_\mu \\ D\bar{\psi} D\psi \rightarrow D\bar{\psi} D\psi \end{cases}$$

Prendiamo $\alpha \rightarrow \alpha(x)$

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - e(\not{\partial}\alpha) \bar{\psi} \gamma^r \psi$$

(una trasformazione A_μ quindi $\mathcal{L}' \neq \mathcal{L}$)

Studiamo

$$\langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \int D\bar{\psi} D\psi D A e^{i\int d^4x \mathcal{L}} \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)$$

trasformando come fatto prima per i campi scalari:

$$\Rightarrow 0 = \int D\bar{\psi} D\psi D A e^{i\int d^4x \mathcal{L}} \left\{ -i \int d^4x \partial_\mu \alpha(x) [j^\mu \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)] + \right. \\ \left. + [ie\alpha(x_1) \psi(x_1)] \bar{\psi}(x_2) + \psi(x_1) [-ie\alpha(x_2) \bar{\psi}(x_2)] \right\}$$

$$\boxed{j^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \langle j^\mu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle = -e \delta(x-x_1) \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle + e \delta(x-x_2) \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle$$

Prendiamone la trasformata di Fourier:

$$\int d^4x d^4x_1 d^4x_2 e^{ipx} e^{iq_1x_1} e^{-iq_2x_2} \left(\langle j^\mu(x) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle \right) \equiv M^\mu(p, q_1, q_2)$$

$$\int d^4x_1 d^4x_2 e^{iq_1x_1} e^{-iq_2x_2} \left(\langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle \right) \equiv M_0(q_1, q_2)$$

IDENTITÀ DI WARD-TAKAHASHI

$$\Rightarrow -ip_\mu M^\mu(p, q_1, q_2) = -eM_0(q_1+p, q_2) + eM_0(q_1, q_2-p)$$

$$P_\mu \left(\begin{array}{c} j^\mu \\ \downarrow \downarrow p \\ q_1 \quad \otimes \quad q_2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} \xrightarrow{q_1+p} \bullet \xrightarrow{q_2} \\ \xrightarrow{q_1} \bullet \xrightarrow{q_2-p} \end{array}$$

Questi sono diagrammi off-shell: momento non è necessariamente conservato.

Vedremo come questa relazione implica che la carica sia conservata anche dopo la rinormalizzazione.

IDENTITÀ DI WARD [S. 19.8, Se. 4.4.3]

Vogliamo ora ottenere le identità di Ward, ovvero:

1) Disaccoppiamento della polarizzazione longitudinale

Sostituendo $\epsilon_\mu(p) \rightarrow p_\mu$ per un fotone esterno in un elemento di matrice S , questo fa zero.

2) Invarianza di gauge

Elementi di matrice S sono indipendenti dal parametro ξ .



1) Disaccoppiamento della polarizzazione longitudinale

Prendiamo un elemento di matrice S , con due polarizzazioni ϵ e ϵ_κ fra gli stati finali:

Da LSZ:

$$\langle \epsilon \dots \epsilon_\kappa \dots | S | \dots \rangle =$$

Funzione di Green

$$\epsilon_\mu \epsilon_\alpha^\kappa \left[i^n \int d^4x e^{ipx} \Delta_{\mu\nu} \int d^4x_\kappa e^{ip_\kappa x_\kappa} \Delta_{\alpha\beta}^\kappa \dots \right] \langle A_\nu(x) \dots A_\beta(x_\kappa) \dots \rangle$$



Dove $\Delta_{\mu\nu} = \Delta g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) d_\mu d_\nu$ è il termine cinetico di $A_\mu(x)$

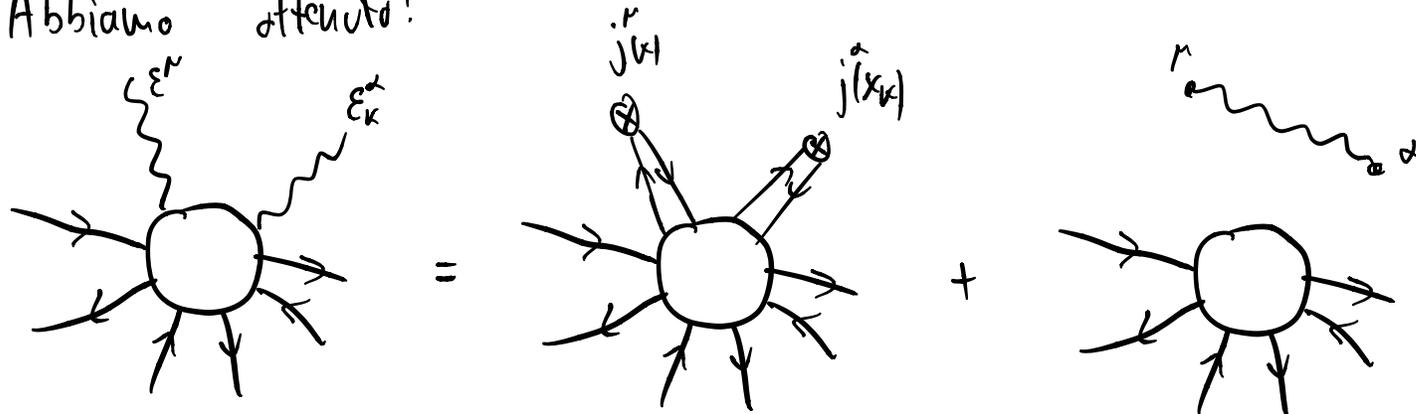
L'eq. del moto per il fotone è $\Delta_{\mu\nu} A_\nu = j_\mu(x)$.

Applichiamo Schwinger-Dyson per il fotone:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta}^k \langle A_\nu(x) \dots A_\beta(x_k) \dots \rangle &= \\ &= \Delta_{\alpha\beta}^k \left[\langle j_\mu(x) \dots A_\beta(x_k) \dots \rangle - i \delta^4(x-x_k) g_{\mu\alpha} \langle \dots \rangle \right] = \\ &= \langle j_\mu(x) \dots j_\beta(x_k) \dots \rangle + \Delta_{\alpha\beta}^k \square \Delta_F(x-x_k) \langle \dots \rangle \end{aligned}$$

dove $\square \Delta_F(x-x_k) = -i \delta^4(x-x_k)$, $\Delta_F(x-x_k) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2} e^{-ipx}$

Abbiamo ottenuto:



Il secondo termine ha una contrazione fra i due fotoni e implica $p = p_k \Rightarrow$ è un termine sconnesso che non contribuisce a S per $p \neq p_k$

$$\Rightarrow \Delta_{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta}^k \langle A_\nu(x) \dots A_\beta(x_k) \dots \rangle = \langle j_\mu(x) \dots j_\beta(x_k) \dots \rangle$$

ovvero:

Elementi di matrice S con fotoni esterni a cui viene rimossa la polarizzazione sono uguali a funzioni di Green di correnti.

• Adesso sostituiamo ad $\epsilon_r \rightarrow p_r$

Explicitiamo un fermione:

$$\begin{aligned} \langle p, u_{s_1}, \dots, \epsilon_k, \dots | S | \dots \rangle &= \left[i^n \int d^4x e^{ipx} \int d^4x_k e^{ip_k x_k} \int d^4y_1 e^{iq_1 y_1} \bar{u}_{s_1}(i\cancel{y}_1 - m_1), \dots \right] \\ &\quad \times \int_{\mathcal{D}_r} \langle j_r(x_1) \dots j_d(x_k) \dots \psi(y_1) \rangle \\ &= \bar{u}_{s_1}(q_1) [(q_1 - m_1), \dots] i p_r M^{\alpha, \dots} (p, p_k, \dots, q_1, \dots) \end{aligned}$$

↳ trasformata di Fourier

Usiamo l'identità di Ward-Takahashi:

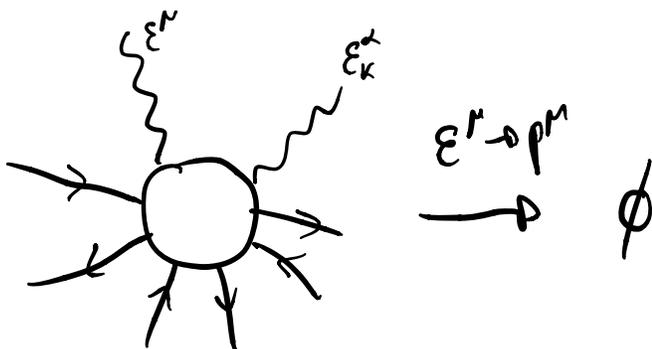
$$= \pm e \bar{u}_{s_1} [(q_1 - m_1), \dots] \sum_j Q_j M^{\alpha, \dots} (p_k, \dots, q_j \pm p, \dots)$$

questi fermioni hanno poli in $(q_j \pm p)^2 = m_j^2$

Però li moltiplichiamo per $\lim_{q_j^2 \rightarrow m_j^2} (q_j - m_j) = \frac{q_j^2 - m_j^2}{q_j + m_j} \rightarrow 0$

quindi il polo nel propagatore della gamba esterna dei fermioni non compensa più questo zero e tutta la somma fa zero:

$$\langle p, u_{s_1}, \dots, \epsilon_k, \dots | S | \dots \rangle = 0$$



← Non è necessario avere il fotone on-shell $p^2=0$.
Solo i fermioni.

2) Invarianza di gauge

Prendiamo un elemento di matrice S con

• b fotoni esterni

• f fermioni

all'ordine e^n in espansione perturbativa.

Il numero di fotoni interni e^- necessariamente

$$M = \frac{n-b}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{- Ad ogni vertice si attacca 1 fotone} \\ \text{- fotoni interni si attaccano a 2 vertici} \end{array} \right\}$$

L'ampiezza sarà data dal prodotto di M propagatori:

$$M = e^n \varepsilon_1^{\alpha_1} \dots \varepsilon_b^{\alpha_b} \int d^4k_1 \dots d^4k_M \prod_{\mu=1}^M \Pi_{\mu\nu}(k_\mu) \times \\ \times M^{\mu_1\nu_1 \dots \mu_M\nu_M \alpha_1 \dots \alpha_b} (\dots k_i \dots q_i)$$

Il termine $\propto k_\mu k_\nu$ dentro $\Pi_{\mu\nu}(k)$ fa zero dato che

$$k_{\mu_i} M^{\mu_1\nu_1 \dots \mu_i\nu_i \dots \mu_M\nu_M \alpha_1 \dots \alpha_b} = 0$$

anche se $k_i^2 \neq 0$ \Leftarrow fotone off-shell.