



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

PSICOLOGIA PER L'INSEGNAMENTO

Mariachiara Feresin, PhD

mariachiara.feresin@units.it

MATEMATICA

Il calcolo e i modelli esplicativi

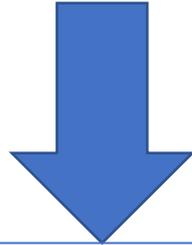
- Per capacità di **calcolo** si intende l'insieme dei processi che consentono di operare sui numeri tramite operazioni aritmetiche
- Nell'apprendimento delle **procedure di calcolo**, le prime informazioni elaborate sono i **segni** delle operazioni e poi ci sono i **fatti aritmetici** (operazioni base) che corrispondono a calcoli semplici o tabelline, i cui risultati sono archiviati nella memoria a lungo termine
- I fatti aritmetici possono essere direttamente richiamati dalla memoria senza ricorrere a particolari procedure di calcolo [Miceli 1990].
- Quando invece non è possibile recuperare il risultato dalla memoria, si deve ricorrere alla conoscenza delle procedure del calcolo generiche e specifiche.

Il calcolo e i modelli esplicativi

- Calcolo a mente vs calcolo scritto
- Calcolo a mente:
 - Prime fase dell'apprendimento: uso delle dita come appoggio essenziale
 - Poi: immagine del calcolo
 - Strategie basate sulla decina
 - Beishuizen: studio delle addizioni a due cifre → 2 strategie:
 1. 1010: scomposizione in decine e unità di entrambi gli addendi che vengono ricomposti in un secondo momento, cioè dopo aver svolto l'operazione richiesta (per esempio, $43 + 25 = (40 + 20) + (3 + 5)$).
 2. N10: scomposizione in decine e unità del secondo addendo che viene poi sommato o sottratto al primo (per esempio, $52 + 27 = (52 + 20) + 7$). Strategia più evoluta e più efficace, maggiormente utilizzata dai soggetti più esperti.
 - Calcolo approssimativo: stima l'ordine di grandezza del risultato di un'operazione

Il calcolo e i modelli esplicativi

Il calcolo a mente vs il calcolo scritto



utilizza ed esercita prevalentemente strategie che richiedono elaborazione cognitiva



utilizza ed esercita soprattutto l'applicazione di procedure più o meno automatizzate

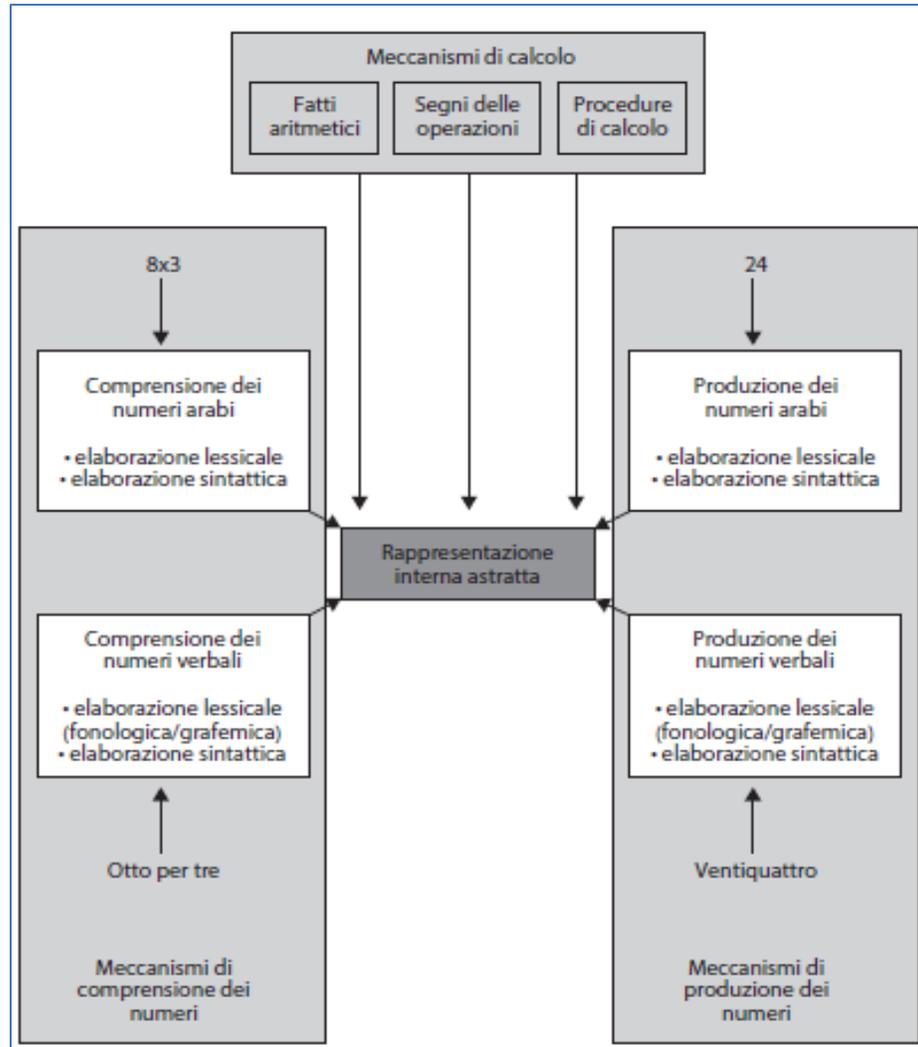
Il calcolo e i modelli esplicativi

Nel panorama degli studi che hanno spiegato l'abilità di calcolo, in relazione anche ad altri aspetti dell'elaborazione del numero, hanno avuto molta influenza due modelli neuropsicologici:

- il modello modulare di McCloskey, Caramazza e Basili [1985]
- il modello del triplo codice di Dehaene [1992]

Il calcolo e i modelli esplicativi

Struttura generale del sistema dei numeri e del calcolo per McCloskey, Caramazza e Basili [1985]



Il modello propone:

- tre moduli distinti nelle loro funzioni
- ognuno dei moduli è costituito da più componenti
- la *rappresentazione astratta di quantità* collega indirettamente i moduli

Il calcolo e i modelli esplicativi

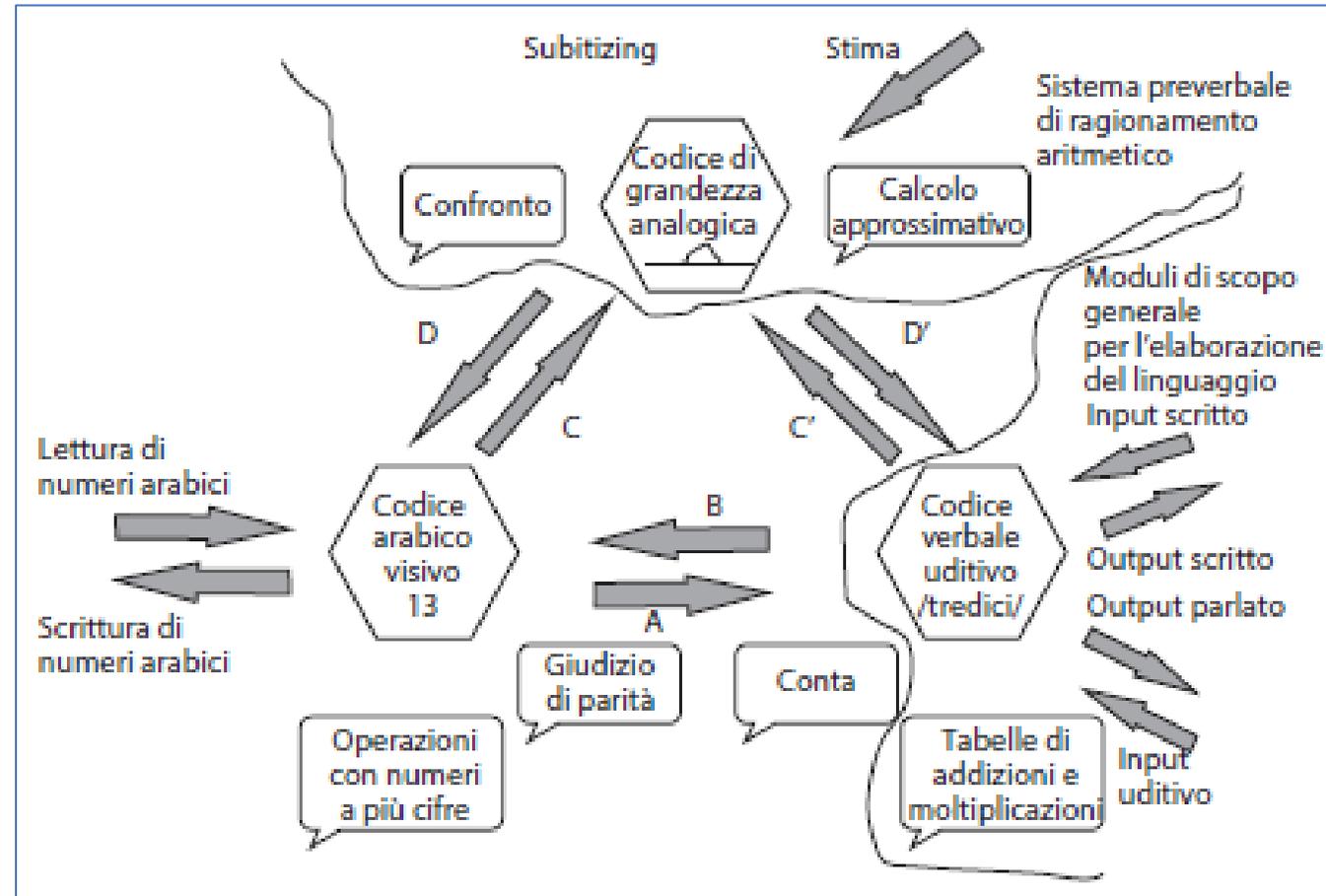
Un modello alternativo a quello di McCloskey è quello elaborato da Dehaene [1992]

Tale modello poggia su due premesse fondamentali:

- 1. i numeri possono essere rappresentati mentalmente in tre diversi formati:** verbale uditivo (per esempio la parola pronunciata: /quattro/), arabico visivo (/4/) e come grandezza analogica
- 2. ogni codice numerico specifico possiede i propri processi di input e output**

Il calcolo e i modelli esplicativi

Struttura generale del modello di Dehaene [1992]



Il calcolo e i modelli esplicativi

Una sostanziale novità introdotta dal modello di Dehaene [1992]

- riguarda la capacità del nostro sistema numerico di manipolare i numeri e di svolgere i vari compiti aritmetici utilizzando la via asemantica, cioè senza la necessità di elaborare una rappresentazione analogica della quantità

Le difficoltà nel calcolo

Alcune fra le principali:

- difficoltà a comprendere i concetti di base delle operazioni
- difficoltà di comprensione dei termini o dei segni matematici
- difficoltà nel riconoscimento dei simboli numerici
- difficoltà ad attuare le manipolazioni aritmetiche standard
- difficoltà nel comprendere quali numeri sono pertinenti al problema aritmetico che si sta considerando
- difficoltà ad allineare correttamente i numeri o a inserire decimali o simboli durante i calcoli
- difficoltà a organizzare spazialmente numeri e calcoli
- difficoltà ad apprendere in modo soddisfacente i fatti aritmetici

Le difficoltà nel calcolo

- In Italia, attraverso la somministrazione di prove ideate per valutare abilità distinte sottostanti il calcolo, costitutive della **batteria AC-MT** [Cornoldi, Lucangeli e Bellina 2002], sono state rintracciate tre fondamentali abilità/difficoltà nella popolazione scolastica relative a:
 - automatizzazione (il bambino è lento),
 - conoscenza numerica (il bambino non si muove bene nel mondo dei numeri)
 - calcolo scritto.
- Quando i problemi nel calcolo compromettono in modo significativo la prestazione degli studenti: **discalculia (DSA)**

Le difficoltà nel calcolo

I due profili principali della Discalculia

1. Il primo è caratterizzato da debolezza nella strutturazione cognitiva delle componenti di cognizione numerica, cioè negli aspetti basali dell'intelligenza numerica (subitizing, meccanismi di quantificazione, comparazione, seriazione, strategie di calcolo mentale)
2. Il secondo fa riferimento alle procedure esecutive (lettura, scrittura e messa in colonna dei numeri) e al calcolo

Le difficoltà nel calcolo

I due profili principali della Discalculia

1. Sorta di «cecità ai numeri»: l'incapacità per il soggetto di comprendere le numerosità e, di conseguenza, di manipolarle [Landerl, Bevan e Butterworth 2004; Butterworth 2005].
 - Butterworth: ha ipotizzato l'esistenza di un «cervello matematico», una struttura innata specializzata nel senso del numero, cioè nel categorizzare il mondo in termini di numerosità. Tale struttura fornisce al bambino un nucleo base di capacità numeriche (ad esempio la capacità di riconoscere numericamente piccoli insiemi di oggetti), mentre è poi l'insegnamento che offre gli strumenti culturali per ampliare le facoltà del modulo numerico [Butterworth 1999].

Questo «modulo numerico» si attiva automaticamente: non possiamo guardare il mondo senza ricavare la numerosità di ciò che vediamo, come non possiamo fare a meno di vederne i colori. Tuttavia, affermare che nasciamo predisposti all'intelligenza numerica implica anche riconoscere che, per qualche motivo, possiamo nascerne sprovvisti. Per questo motivo alcuni bambini discalculici incontrano difficoltà anche nell'eseguire compiti molto semplici, come la stima di numerosità, il confronto di quantità, il subitizing.

Le difficoltà nel calcolo

I due profili principali della Discalculia

2. Il secondo profilo di discalculia si riferisce invece in modo specifico alle difficoltà nell'acquisizione delle procedure e degli algoritmi del calcolo ed è stato oggetto di analisi approfondita da chi più specificamente si è occupato di difficoltà matematiche scolastiche, anche in bambini e ragazzi più grandi.

Per esempio, Christine Temple [1991], nel contesto di una verifica dell'applicabilità del modello di McCloskey anche a soggetti in età evolutiva, attraverso lo studio di casi, ha evidenziato tipologie diverse di discalculia, con difficoltà o nel sistema di elaborazione dei numeri o in quello del calcolo.

Le difficoltà nel calcolo

- Analisi degli errori di calcolo commessi dai bambini e ragazzi, sia in termini di frequenza che di tipologia → sulla loro base è possibile comprendere in modo più approfondito le difficoltà e impostare un lavoro mirato, in ambito scolastico o riabilitativo, in cui è possibile introdurre una attività metacognitiva, facendo riflettere l'allievo sui suoi errori più frequenti e aiutandolo a individuarli e risolverli.
- Una classificazione dei principali errori a cui potrebbe essere utile far riferimento è la seguente:
 - errori nel recupero di fatti aritmetici;
 - errori nel mantenimento e nel recupero delle procedure;
 - errori nell'applicazione delle procedure;
 - difficoltà visuospatiali.

Abilità matematiche: risoluzione di problemi, abilità cognitive e metacognitive implicate

- I problemi che i bambini e i ragazzi devono affrontare a scuola sono di differente natura e complessità
- Fuchs e Fuchs [2002] hanno distinto fra problemi aritmetici semplici, complessi e soluzione di problemi del mondo reale → continuum:
 - Al livello di difficoltà più basso sono posti i problemi aritmetici semplici, che presentano un testo breve ed essenziale, con una domanda e con la richiesta di un'unica operazione per ottenere la soluzione
 - A un livello intermedio sono posti i problemi aritmetici complessi, che hanno un testo più lungo (ma ancora relativamente breve), che contiene delle domande e dei dettagli non essenziali, ma nessun dato numerico irrilevante. Per la soluzione sono necessarie da una a tre operazioni.
 - Al livello più elevato si situa il problem-solving della vita reale, che pur richiedendo lo stesso numero di operazioni di un problema complesso, si caratterizza per un testo esteso, dettagli non essenziali ed elementi numerici irrilevanti. In questo terzo tipo di problemi, la varietà delle possibili soluzioni, la quantità delle informazioni, la non scontata posizione delle informazioni necessarie per comprendere il problema contribuiscono ad aumentare la difficoltà che uno studente incontra nel riconoscere un problema nuovo come appartenente a un problema di tipo familiare, per il quale sarebbe in realtà noto un metodo risolutivo.

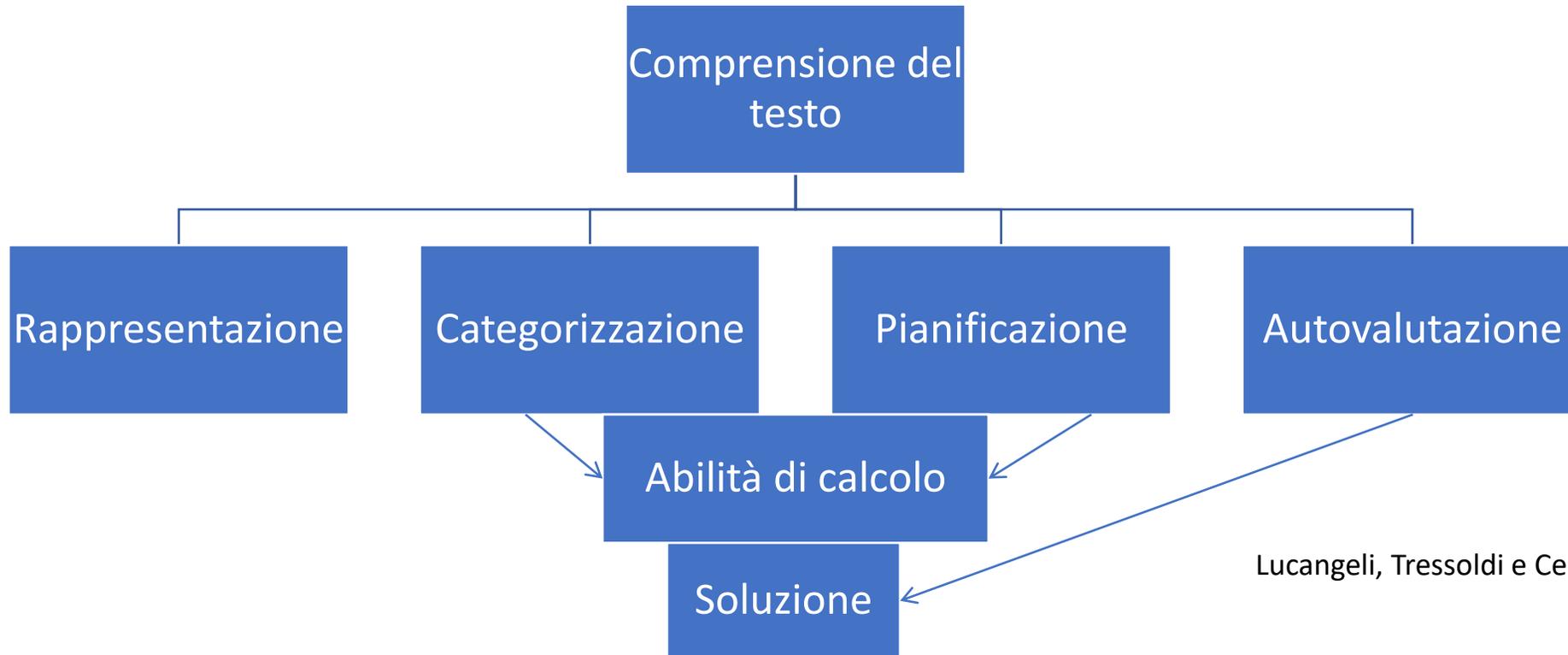
Abilità matematiche: risoluzione di problemi, abilità cognitive e metacognitive implicate

Carpenter e Moser [1983] hanno classificato i problemi aritmetici di tipo verbale in base alla struttura semantica: cambio, associazione, comparazione e uguaglianza

- Nei **problemi «cambio»** vi è una quantità iniziale e un'azione che determina un aumento o decremento della quantità (Mario ha 15 caramelle. Il suo amico Giovanni gli dà altre 6 caramelle. Quante caramelle ha ora Mario?).
- I **problemi «associazione»**, comportano una relazione statica fra un particolare insieme e due distinti sottoinsiemi («Ci sono 14 calze in un cassetto, 5 sono nere e il resto sono blu. Quante sono le calze blu?»).
- I **problemi «comparazione»** comportano una relazione statica in cui c'è una comparazione fra due distinti sottoinsiemi («Marta costruisce una torre alta 15 cubi, Maria una alta 19 cubi. Quanti cubi in più è alta la torre di Maria?»).
- Infine nei **problemi «uguaglianza»** c'è lo stesso tipo d'azione come nei problemi di tipo «cambio», ma è richiesta la comparazione di due distinti sottoinsiemi («Il mio vestito ha 14 bottoni. Il vestito di mia cugina avrebbe lo stesso numero di bottoni del mio se avesse 5 bottoni in più. Quanti bottoni ha il vestito di mia cugina?»).

Abilità matematiche: risoluzione di problemi, abilità cognitive e metacognitive implicate

Modello di organizzazione delle componenti cognitive del problem solving valutate dal test SPM



Lucangeli, Tressoldi e Cendron [1998]

Abilità matematiche: risoluzione di problemi, abilità cognitive e metacognitive implicate

- Alcuni ricercatori hanno considerato la possibilità che abilità sovraordinate di tipo metacognitivo possano influenzare in modo causale la prestazione nella soluzione di problemi
- Si è osservato che **i buoni solutori**, rispetto a solutori meno abili, possiedono un **livello più alto di capacità metacognitive** che permette loro di:
 - analizzare in modo migliore la struttura del compito,
 - scegliere in modo flessibile le strategie più adatte
 - utilizzare in modo maggiormente produttivo le risorse cognitive

Abilità matematiche: risoluzione di problemi, abilità cognitive e metacognitive implicate

- Ann Brown ha descritto alcuni processi metacognitivi di controllo implicati nella soluzione di un problema, risultati altamente correlati col successo in matematica, e precisamente le capacità di:
 - Prevedere se si è in grado di risolverlo (previsione).
 - Predisporre un progetto di soluzione (pianificazione).
 - Tenere sotto controllo il processo risolutivo (monitoraggio).
 - Valutare il risultato conseguito (valutazione).

Aspetti motivazionali ed emotivi della matematica

- Fin dall'inizio della vita scolastica, percepire sé stessi come capaci di comprendere e controllare le esperienze nell'area matematica risulta una forza trainante dell'apprendimento.
- Oltre alla percezione della propria capacità, sono importanti la concezione della matematica stessa come disciplina scolastica e il concetto di sé in relazione a questa materia e al suo apprendimento → importante sviluppare atteggiamenti positivi per interiorizzare valori, per generare stati motivazionali che dirigano il comportamento regolandone lo sforzo e la persistenza in maniera adeguata.

Aspetti motivazionali ed emotivi della matematica

- Richardson e Suinn [1972] definiscono l'ansia per la matematica come «un sentimento di tensione, apprensione, paura che interferisce con la manipolazione dei numeri e la soluzione dei problemi matematici in una vasta varietà di situazione quotidiane e accademiche»
- Fennema e Sherman [1976] la denotano come «un insieme di sensazioni e di sintomi corporei collegati al fare matematica»
- L'ansia della matematica ha diverse manifestazioni, che variano da individuo a individuo. Queste vanno da sintomi fisiologici, quali sudorazione e tremore alle mani, nausea, palpitazioni cardiache e risate nervose, esperienze di blocco del pensiero a reazioni emotive difensive.
- L'insorgenza di ansia per la matematica è talora precoce: fenomeni ansiosi possono essere già presenti all'inizio della scolarità e perdurare o ripresentarsi a livello di istruzione superiore e universitaria [Perry 2004]

Aspetti motivazionali ed emotivi della matematica

Quali sono le cause di questo fenomeno?

- **Stile d'insegnamento** di alcuni docenti che pretendono un alto livello di correttezza e competenza senza però dare un adeguato sostegno
- **natura stessa della disciplina:** in matematica l'errore è evidente e riconosciuto unanimemente
 - ciò rende gli individui particolarmente vulnerabili alla manifestazione pubblica della loro incompetenza, provocando l'insorgere dell'ansia [Ashcraft 2002]
- I bambini (e soprattutto le bambine) che hanno conseguito insuccessi sviluppano un senso di scarsa competenza, che contribuisce a renderli ansiosi e diminuisce la loro motivazione a cercare di raggiungere la padronanza della materia

Aspetti motivazionali ed emotivi della matematica

- L'ansia della matematica comporta delle forti conseguenze per la vita degli individui, in quanto è un fattore che limita le loro scelte formative e i loro percorsi professionali.
- Gli studenti che manifestano questa condizione presentano una tendenza pervasiva a evitare la matematica e tutto ciò che pertiene a essa.
- Tali evitamenti si basano sull'idea di essere carenti in matematica o di non avere le giuste abilità e contribuiscono al fenomeno per cui ci sono in tutto il mondo, ma soprattutto in Italia, troppo pochi studenti che affrontano le famose discipline dette STEM dalle iniziali di Science, Technology, Engineering e Mathematics.
- Mathematic Anxiety Rating Scale (MARS) [Richardson e Suinn 1972] → misura attendibile dell'ansia per la matematica

Evoluzione delle abilità matematiche

- **Subitizing**, che permette di ricavare la numerosità di un piccolo insieme di elementi in modo immediato senza contare [Mandler e Shebo 1982] già nei primi mesi di vita
- **Conteggio verbale**, che si sviluppa tra i 2 e i 6 anni
- A 5 anni i bambini sviluppano la conoscenza della **forma scritta dei numeri** e imparano a unire la **cardinalità** alla **rappresentazione ordinale** dei numeri
- Gli automatismi del calcolo e le procedure vengono acquisite nei primi anni di insegnamento

Applicare

È importante:

- tenere presente che, nell'effettuare un certo compito matematico, il bambino può essere condizionato dalla insufficiente padronanza di un altro aspetto coinvolto, per esempio nel calcolo dalla scarsa conoscenza dei fatti, nel problem-solving dalle difficoltà di calcolo. Cercare dunque di consolidare le abilità sottese e di evitare, anche attraverso aiuti, che una debolezza nell'abilità sottesa comprometta l'esecuzione dell'attività più complessa.
- far esercitare il bambino nel calcolo a mente e nella scoperta delle strategie adatte per la sua età, cominciando con l'uso delle dita e proseguendo con strategie più raffinate
- sviluppare credenze appropriate e un atteggiamento positivo nei confronti della matematica
- calibrare le richieste matematiche in funzione dell'età del bambino/studente e del suo livello di esperienza e competenza