

# MECCANICA HAMILTONIANA

## EQUAZIONI DI HAMILTON

Domani:

ES2 26.07.18

ES2 19.02.20

Eq. di Lagrange son  $n$  eq. diff.  
del 2° ordine

$$\ddot{\bar{q}} = \bar{f}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Uno può passare a  $2n$  eq. diff. del 1° ordine

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}} = \bar{\eta} \\ \dot{\bar{\eta}} = \bar{f}(\bar{q}, \bar{\eta}, t) \end{cases}$$

$$\eta_h = \dot{q}_h$$

Questo non è sempre il metodo più conveniente per passare a eq. diff. del 1° ordine.

Eq. di Lagr.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)}{\partial q_h} = 0$$

l'idea è di definire nuove **VARIABILI**

$$(*) \quad p_h = \frac{\partial L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)}{\partial \dot{q}_h} \quad h=1, \dots, n \quad \text{MOMENTI CONIUGATI}$$

In queste nuove coord. le eq. di Lagr. diventano

$$\dot{p}_h = \frac{\partial L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)}{\partial q_h}$$

Vogliamo invertire le relazioni (\*) in forma

$$\dot{\bar{q}} = \dot{\bar{q}}(\bar{p}, \bar{q}, t)$$

Per poter invertire dobbiamo richiedere che

$$\det \left( \underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k}} \right) \neq 0 \quad (\text{cambiam. di coord. invertibile})$$

Per sistemi MECCANICI ( $L = T - V$ )

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

$$\rightsquigarrow p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \sum_{l=1}^m a_{nl} \dot{q}_l + b_n$$

$$\left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} = a_{jk} \text{ che \u00e9 invertibile (det } a \neq 0) \right)$$
$$\dot{\bar{q}} = \bar{A}^{-1}(\bar{p} - \bar{b})$$

Es. di Lagrange  $\dot{p}_n = \frac{\partial L}{\partial \bar{q}_n}(\bar{q}, \bar{A}^{-1}(\bar{p} - \bar{b}), t)$

$$\dot{q}_n = \bar{A}^{-1}(\bar{p} - \bar{b})$$

prendendo la forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}} = \bar{f}_q(\bar{p}, \bar{q}, t) \\ \dot{\bar{p}} = \bar{f}_p(\bar{p}, \bar{q}, t) \end{cases}$$

Se facciamo questi procedimenti  
le  $\bar{f}_q$  e  $\bar{f}_p$  prendono una forma  
molto particolare

Prop. Si consideri una Lagrangiana  $L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$  con det. Hessiano non nullo, cioè  $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0$ .

Allora il sistema

$$\begin{cases} p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} & \leftarrow \text{def. delle nuove coord.} \\ \dot{p}_h = \frac{\partial L}{\partial q_h} & \leftarrow \text{eq. di Lagrange} \end{cases}$$

$\hookrightarrow$  per inversione da  $\dot{\bar{q}} = \dot{\bar{q}}(\bar{p}, \bar{q}, t)$

è equivalente al sistema

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{p}_h = - \frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q}, t)}{\partial q_h} \\ \dot{q}_h = \frac{\partial H(\bar{p}, \bar{q}, t)}{\partial p_h} \end{cases}$$

con  $H(\bar{p}, \bar{q}, t) = \left[ \bar{p} \cdot \dot{\bar{q}} - L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \right]_{\dot{\bar{q}} = \dot{\bar{q}}(\bar{p}, \bar{q}, t)}$

Inoltre si ha  $\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}$ .

$H$  è detta **HAMILTONIANA** (o funz. di Hamilton)  
 le eq. (\*) sono dette **EQ. DI HAMILTON** (o eq. canoniche)

Dim. Siccome per ipotesi  $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0$ , allora

$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \text{ si può invertire, ottenendo } \dot{\bar{q}} = \dot{\bar{q}}(\bar{p}, \bar{q}, t)$$

$\Rightarrow H(\bar{p}, \bar{q}, t)$  è ben definita.

Della def. di differenziale:

$$dH = \sum_{m=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial p_m} dp_m + \frac{\partial H}{\partial q_m} dq_m \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Una facciamo il def. delle funz.  $H = (\bar{p} \cdot \dot{q} - L)_{\dot{q} = \dot{q}(p, q, t)}$

$$dH = \sum_{m=1}^n \boxed{p_m} dq_m + \sum_{m=1}^n \dot{q}_m dp_m - \sum_{m=1}^n \boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}} dq_m - \sum_m \frac{\partial L}{\partial q_m} dq_m - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

è il differenziale della funzione  $\dot{q}(p, q, t)$

Nota che il differenziale della funz.  $\dot{q}(p, q, t)$  appare in due ph; siccome  $p_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}$  questi contributi si cancellano.

$$= \sum_{m=1}^n \left( \dot{q}_m dp_m - \frac{\partial L}{\partial q_m} dq_m \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m} \quad \frac{\partial L}{\partial q_m} = - \frac{\partial H}{\partial q_m} \quad \frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial t}$$

Eq di Lagrange  $\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} = \dot{p}_m$

Prop. In un sist. meccanico, H assume l'espressione

$$H = T_2 - T_0 + V$$

↑  
mez. di pres 2 in q

→ Nel caso indep. del temp  $H = T + V$  (l'en. tot. del sist.)

Dim.  $T_2, T_1, T_0$  sono funz. omog. di grado 2, 1, 0

$$\sum_n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n = \sum_n \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n + \sum_n \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n + \sum_n \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_n} \dot{q}_n$$
$$= 2T_2 + T_1 + 0$$

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = 2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0 - V)$$
$$= T_2 - T_0 + V //$$

**SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI.**  $Q$  con coord  $(q_1, \dots, q_n)$

Formalismo Lagrangiano:  $Q$  è completo a uno spazio  $2n$ -dime detto

**SPAZIO DEGLI STATI**  $\underbrace{TQ}$  con coord.  $(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$   
"FIBRATO TANGENTE"

Formalismo Hamiltoniano:  $Q$  è completo a uno spazio  $2n$ -dime detto

**SPAZIO DELLE FASI**  $\underbrace{T^*Q}$  con coord.  $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$   
"FIBRATO COTANGENTE"

## Esempi

1) PTO MATERIALE in coord. cartesiane

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad V = V(x, y, z)$$

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad p_y = m\dot{y} \quad p_z = m\dot{z}$$

inversione

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m} \quad \dots$$

$$H(p_x, \dots, p_z, x, \dots, z) = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L$$

$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + V(x, y, z) = \frac{\bar{p}^2}{2m} + V$$

↑  
energia

2) Oscillatore ARMONICO

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \rightarrow H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

3) FORZE ELETTROMAGNETICHE

$$\vec{F} = e (\vec{E} + \dot{\vec{q}} \times \vec{B})$$

|

$$= -e \left( \vec{\nabla} \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + e \dot{\vec{q}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$\vec{E} = - \left( \vec{\nabla} \phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\bar{F} \text{ si nasce da } V(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \underbrace{e\phi(\bar{q})}_{V_0} - \underbrace{e\dot{\bar{q}} \cdot \bar{A}(\bar{q})}_{V_1}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt} (-e A_h(q)) = -e \left( \frac{\partial A_h}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \dot{q}_k \frac{\partial A_h}{\partial q_k} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial q_h} = e \frac{\partial \phi}{\partial q_h} - e \sum_{k=1}^3 \dot{q}_k \frac{\partial A_k}{\partial q_h} \\ - \end{array} \right.$$

$$= -e \left( \frac{\partial \phi}{\partial q_h} + \frac{\partial A_h}{\partial t} \right) + e \sum_{k=1}^3 \dot{q}_k \left( \frac{\partial A_k}{\partial q_h} - \frac{\partial A_h}{\partial q_k} \right)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\bar{q}}^2 + e \dot{\bar{q}} \cdot \bar{A} - e\phi$$

$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = m \dot{q}_h + e A_h \Rightarrow \dot{q}_h = \frac{p_h - e A_h}{m} \quad (\neq)$$

$$H = \bar{p} \cdot \dot{\bar{q}} - L \Big|_{(\neq)} = \bar{p} \cdot \left( \frac{\bar{p} - e\bar{A}}{m} \right) - \frac{m}{2} \frac{(\bar{p} - e\bar{A})^2}{m^2} - e \left( \frac{\bar{p} - e\bar{A}}{m} \right) \cdot \bar{A} + e\phi$$

$$= \frac{(\bar{p} - e\bar{A})^2}{2m} + e\phi = T + V_0$$

## FORMULAZIONE VARIATIONALE

Siamo interessati alle traiettorie nello sp. delle fasi

$$\underbrace{p_i(t) \quad q_i(t)}_{\text{sono funzioni}} \quad i=1, \dots, m \quad : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$$

Funzionale AZIONE HAMILTONIANA

$$S[\bar{p}, \bar{q}] \equiv \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left[ \sum_{h=1}^m p_h(t) \dot{q}_h(t) - H(\bar{p}(t), \bar{q}(t), t) \right]}_{L(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t)} dt$$

Se il sistema Hamiltoniano è equiv. a un sist. lagrangiano,  $S$  coincide con l'azione hamiltoniana vista in precedenza.

$$[ \text{Se } \text{ho } \mathcal{J}[\bar{p}, \bar{q}] \equiv \int dt F(\bar{p}(t), \bar{q}(t), t) ]$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{J} &= \frac{d}{d\alpha} \int dt \left[ F(\bar{p} + \alpha \delta \bar{p}, \bar{q} + \alpha \delta \bar{q}, t) \right] \Big|_{\alpha=0} \\ &= \int dt \sum_h \left( \frac{\partial F}{\partial p_h} \delta p_h + \frac{\partial F}{\partial q_h} \delta q_h \right) \end{aligned}$$

$$S[\bar{p}, \bar{q}] \equiv \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{h=1}^m p_h(t) \dot{q}_h(t) - H(\bar{p}(t), \bar{q}(t), t) \right] dt$$

$$\delta S [\bar{p}, \bar{q}, \delta \bar{p}, \delta \bar{q}] = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^m \left[ \underbrace{\delta p_s(t) \dot{q}_s(t)}_{\frac{\partial}{\partial p_s} \left( \sum_h p_h \dot{q}_h \right) \delta p_s} + \underbrace{p_s(t) \delta \dot{q}_s(t)}_{\substack{\text{Integrando in parti:} \\ \delta \dot{q}_s = \frac{d}{dt} \delta q_s}} - \frac{\partial H}{\partial p_s} \delta p_s(t) - \frac{\partial H}{\partial q_s} \delta q_s(t) \right] dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{s=1}^m \left[ \left( \dot{q}_s - \frac{\partial H}{\partial p_s} \right) \delta p_s - \left( \underline{\dot{p}_s} + \frac{\partial H}{\partial q_s} \right) \delta q_s \right] dt + \sum_{s=1}^m p_s \delta q_s \Big|_{t_0}^{t_1}$$

Prop. Il moto  $\bar{p}(t), \bar{q}(t)$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) rende stazionario il funzionale azione  $S[\bar{p}, \bar{q}]$  corrispondente a una data Hamiltoniana  $H$ ,  $m$  variabili arbitrarie e in  $\delta \bar{q}$  nulle agli estremi, SE E SOLO SE esso soddisfa le eq. di Hamilton relative a  $H$ .