MECCANICA RAZIONALE

Ing Civile e Ambientale

Novole

3 maggio 2021

Dinamica $\to$ vari aspetti

eq. di Lagrange . caso conservativo

$\to \mathcal{L} = K - V$, $\underline{q} = (q_1, \dots, q_\ell)$

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \mathcal{L} = 0} \qquad i = 1, \dots, \ell$$

$\ddot{q}, \dot{q}, q$

$q_i(0) = q_{i,0}$

$\dot{q}_i(0) = \dot{q}_{i,0}$

$\to$ mettere in evidenza le coordinate libere

Caso non conservativo

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial k}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial k}{\partial q_i} = Q_i} \leftarrow \text{forze generalizzate}$$

Eq differenziali del 2° ordine nelle q_i

→ eq differenziali del 1° ordine

nelle (q_i, p_i)

momenti coniugati $\frac{\partial k}{\partial \dot q_i}$

Sistema dinamico (di origine meccanica)

$$\begin{cases} \dot{\underline{y}} = \underline{F}(\underline{y}) \\ \underline{y}(0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

sistema autonomo

→ STABILITÀ

↪ $\underline{y}(t; \underline{y}_0)$

→ traiettoria

$$\{ \underline{y} \in R^{2\ell} : \underline{y} = \underline{y}(t; y_0) \}$$

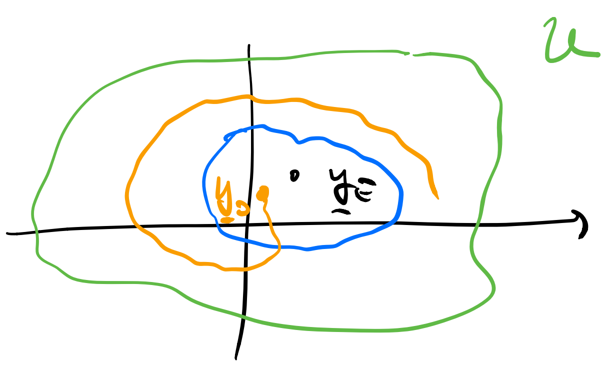
In spazio delle fasi:

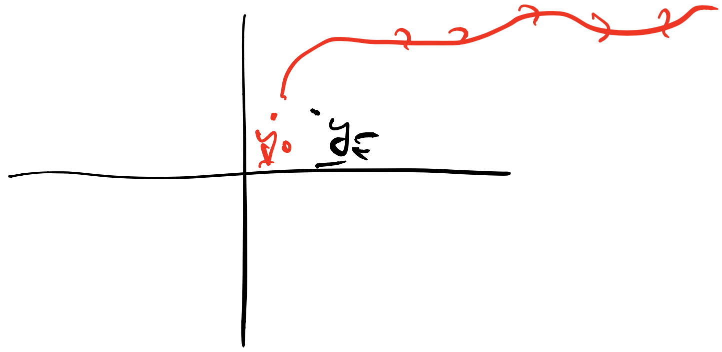
Configurazioni di equilibrio del tipo $\underline{y}_E = (\underline{q}_E, \underline{0})$

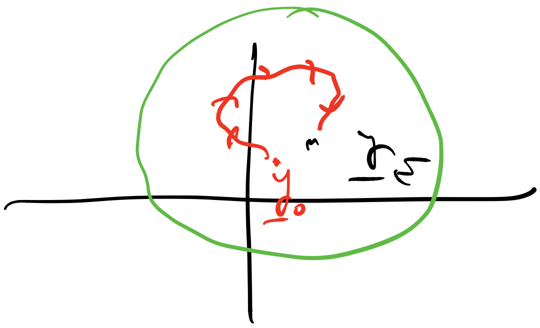
$\dot{\underline{y}} = F(\underline{y}) \longrightarrow F(\underline{y}_E) = 0$

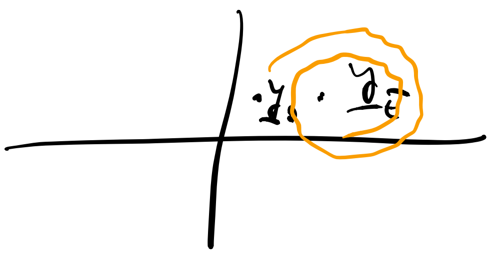
<u>Definizione</u> di stabilità (Liapunov)

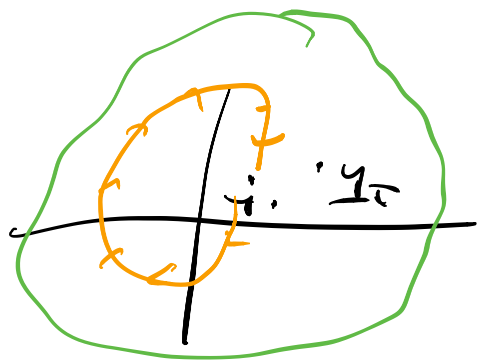
Sol $\underline{y}_E$ è <u>stabile</u> se $\forall$ intorno $\mathcal{U}$ di $\underline{y}_E$, $\exists$ un intorno $\mathcal{V}$ di $\underline{y}_E$ tale che $\forall\, \underline{y}_0 \in \mathcal{V}$, la traiettoria uscente da $\underline{y}_0$ è contenuta in $\mathcal{U}$











Teorema di Liapunov

$$\dot{\underline{y}} = \underline{F}(\underline{y})$$

- $\underline{F}$ è regolare
- $\exists\ \mathcal{H}(\underline{y})$ tale che

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}(\underline{y}(t)) \le 0 \qquad \forall t$$

$=$

- $\underline{y}_e$ è minimo di $\mathcal{H}$

$\longrightarrow$ $\underline{y}_e$ è stabile

$\longrightarrow$ l'energia meccanica si conserva

$K + V = \mathcal{H}$ "hamiltoniana"

$\longrightarrow$ funzione di Liapunov

$\longrightarrow$ ma $\mathcal{H}$ può non essere l'hamiltoniana ma una funzione più generale.

Criterio di stabilità a priori

Criterio di DIRICHLET: consideriamo un sistema olonomo, l gradi di libertà, vincoli fissi. Allora se:

- forze conservative con ~~potenziale~~ energia potenziale indipendente dal tempo $V = V(\underline{q})$ (+ eventualmente forze dissipative)

- se la configurazione $\underline{q}_E$ è un minimo proprio $V(\underline{q})$

Allora $\underline{q}_E$ è una configurazione stabile.

Dim Segue dal Teorema di Liapunov. Infatti

- $\underline{\dot{y}} = \underline{F}(\underline{y})$ non dipende esplicitamente dal tempo.

$\underline{y} = (\underline{q}, \underline{p})$

- $$\frac{d}{dt}(K + V) = W_{dissipative} \leq 0$$

quindi $\mathcal{H} = K + V$ è una funzione di Liapunov

- da $\underline{q}_E$ minimo proprio di V segue che $(\underline{q}_E, \underline{0})$ è un minimo proprio di $\mathcal{H}$. Infatti

$$\mathcal{H} = K + V$$

$\underline{q}_E$ è minimo proprio di $V = V(\underline{q})$

$\underline{p}_E = \underline{0}$ è un minimo proprio di K (perché K è definita positiva)

Allora possiamo applicare il teorema di Liapunov $\longrightarrow$ $\underline{q}_E$ è stabile. ■

Seconda parte

Criterio statico di stabilità:

Sia $\underline{q}_E$ la configurazione di equilibrio e consideriamo uno spostamento virtuale ad una configurazione variata $\underline{q}^v$

$$\underline{q}_E \; \bullet \xrightarrow{\delta q} \bullet \; \underline{q}^v$$

Parametrizziamo con il tempo virtuale

$\tau \in [a, b]$

$\underline{q} = \underline{q}(\tau)$, $\underline{q}(a) = \underline{q}_E$

$\underline{q}(b) = \underline{q}^v$

Calcoliamo il lavoro virtuale per andare da $\underline{q}_E$ a $\underline{q}^v$

$$LV = \int_a^b \sum_{i=1}^{\ell} Q_i \frac{dq_i}{d\tau} d\tau$$

$$= - \int_a^b \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{dq_i}{d\tau} d\tau$$

$$Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

$$= - \int_a^b \frac{d}{d\tau} \left(V(\underline{q}(\tau)) \right) d\tau$$

$$= - \left(\underbrace{V(\underline{q}^v)}_{\tau = b} - \underbrace{V(\underline{q}^E)}_{\tau = a} \right)$$

$\underline{q}_E$ è un minimo proprio di V (criterio di Dirichlet) $\Longleftrightarrow$ il lavoro virtuale per andare da $\underline{q}^E$ a $\underline{q}^v = \underline{q}^E + \underline{\delta q}$ è negativo (criterio statico)

Rotazioni permanenti di un rigido

e precessione

Precessione di inerzia

$$\cancel{M} = \frac{d}{dt}\underline{L} \longrightarrow \text{equazioni di Eulero}$$

$\rightarrow$ assi principali di inerzia

ω_i $\omega_1, \omega_2, \omega_3$

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3)\,\omega_2\omega_3 \\ J_2 \dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1)\,\omega_1\omega_3 \\ J_3 \dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2)\,\omega_1\omega_2 \end{cases}$$

1 2 3

2 3 1

3 1 2

→ tre rotazioni permanenti

$$\rightarrow \begin{cases} \omega_i = \omega_0 & \text{costante} \\ \omega_j = 0 \end{cases} \qquad i, j = 1, 2, 3$$

hanno la forma $\dot{\underline{y}} = F(\underline{y})$

$$\underline{y} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

Ci sono due quantità che si conservano ("integrale primo del moto")

- energia cinetica $K = K_0$
  (perché non c'è momento delle forze esterne)

- momento angolare

$$\frac{d}{dt} \underline{L}(0) = \underline{0} \Rightarrow \|\underline{L}(0)\|^2 = \text{costante} = L_0^2$$

$$(*) \begin{cases} 2K = J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 = 2K_0 \\ \|\underline{L}(0)\|^2 = J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2 = L_0^2 \end{cases}$$

→ spazio delle fasi $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

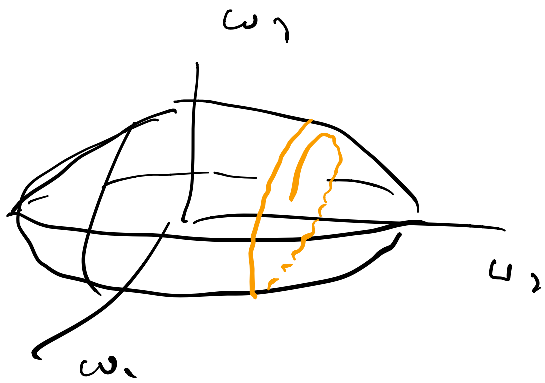
le traiettorie devono giacere su entrambe le superfici descritte da

$\circledast$

notiamo $J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 = 2k_0$

$$\to \{ \underline{x} \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \underline{x} = 2k_0 \}$$

→ ellissoide di inerzia



→ bisognerebbe prendere

$$J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2 = \text{costante}$$

→ cono o coppia di piani / o cono degenere

→ orbite del sistema dinamico

Eq differenziali : difficili da risolvere

→ approccio qualitativo

→ metodi di approssimazione

→ linearizzazione