Lezione del 4 Maggio 2021

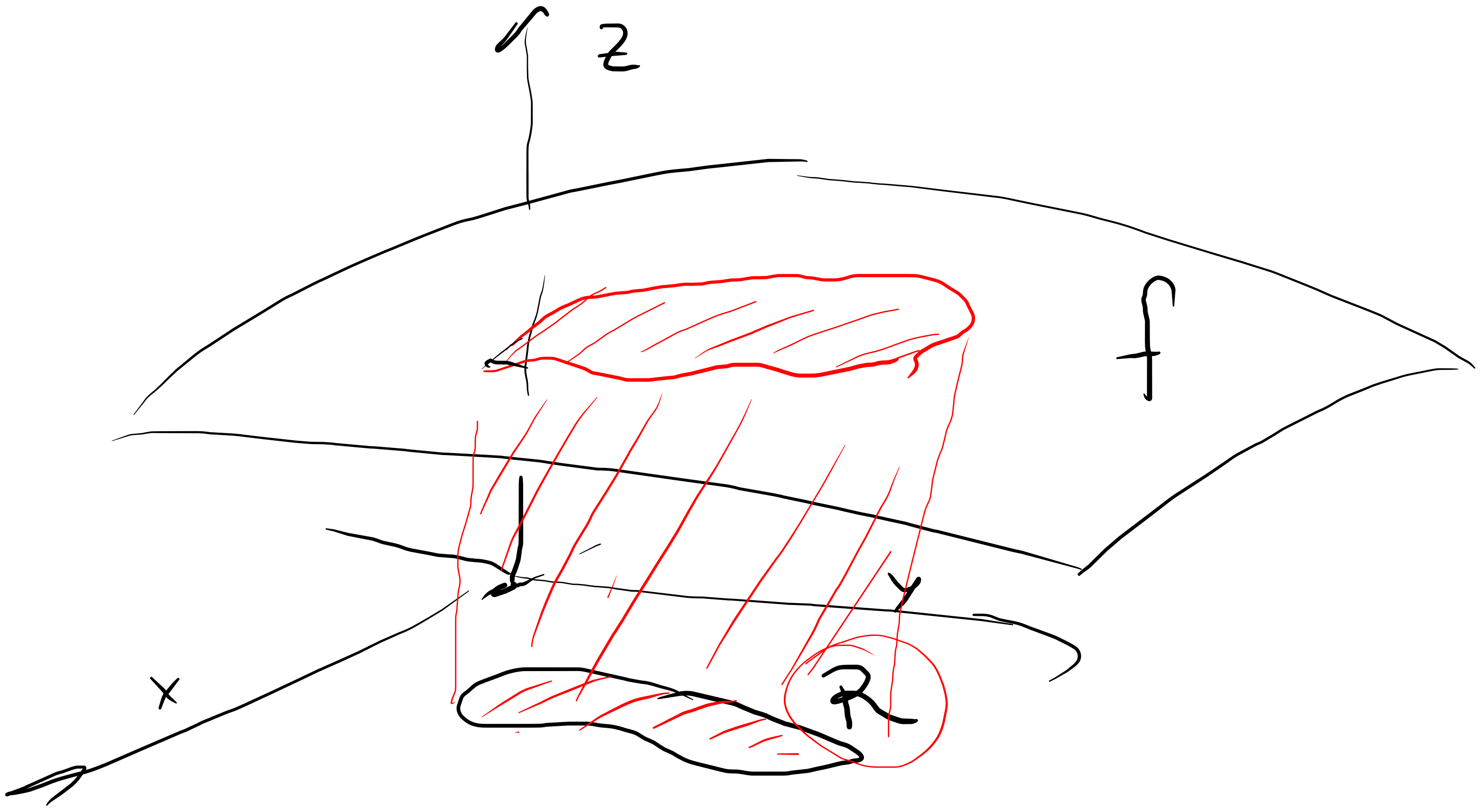
Presenti in aula (su autodichiarazione)

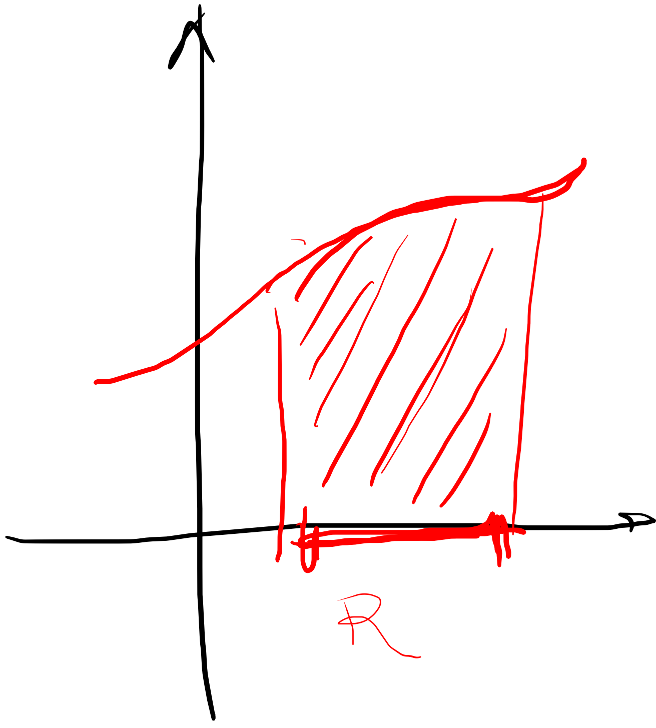
SM 6000694 SM 6000699

SM 6000687 SM 6000683

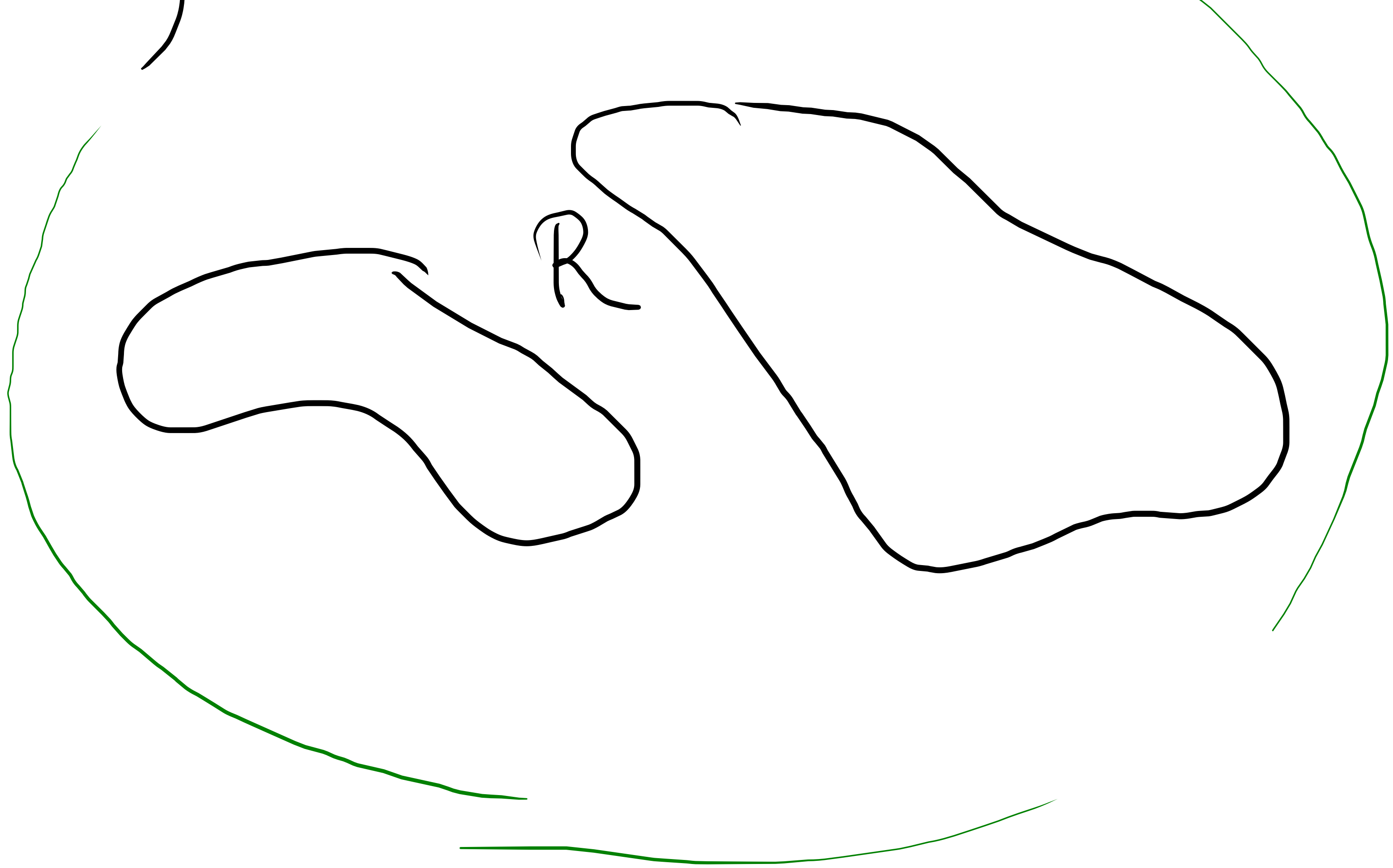
SM 6000695

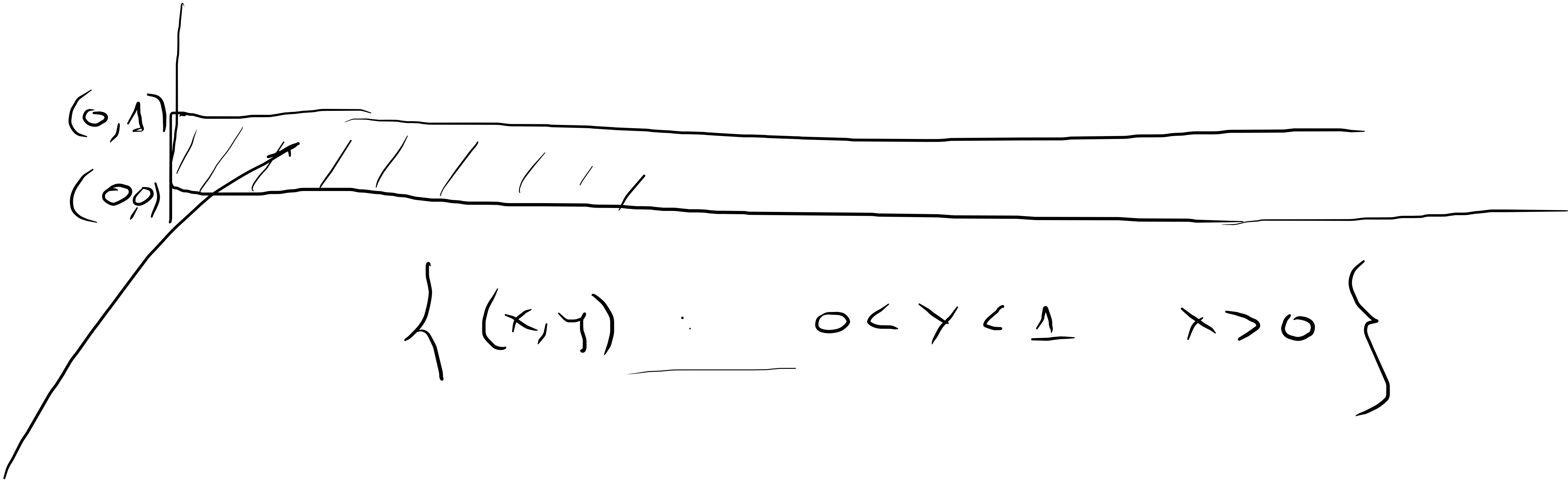
$f(x,y)$ $\qquad$ $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$





Sia R una regione (un insieme limitato) di $\mathbb{R}^2$.

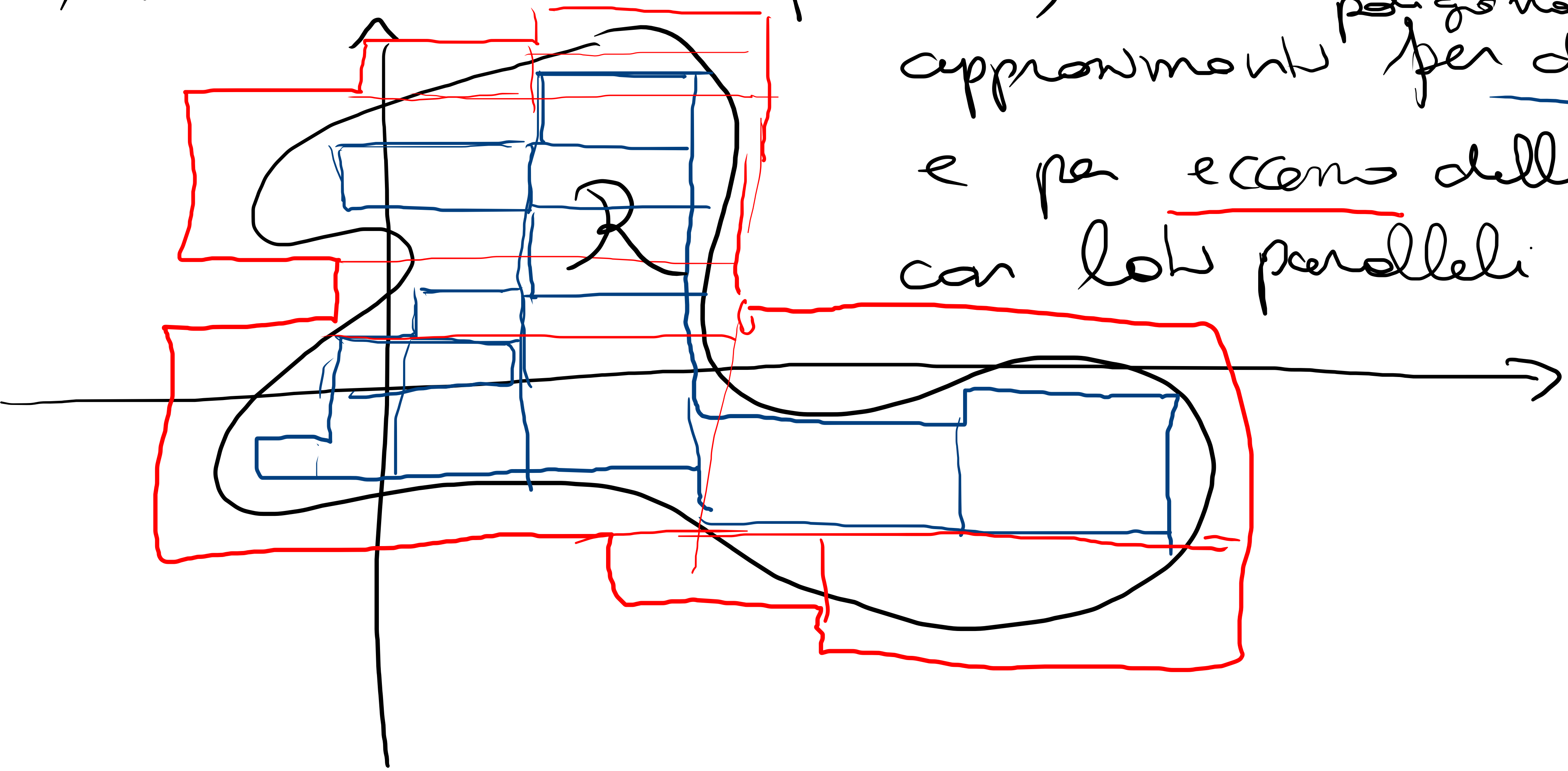




$$\{(x,y) : 0<y<1 \quad x>0\}$$

Regione NON limitata del piano

Per misurare l'estensione di una regione limitata R del piano, considero delle approssimanti poligonali per difetto e per eccesso della regione R con lati paralleli agli assi



Def

R si dice MISURABILE o QUADRABILE se, il

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} \left(\underline{\underline{\text{Area}(P)}} \right) = \inf_{P' \in \mathcal{P}'} \left(\underline{\underline{\text{Area}(P')}} \right)$$

regioni individuate da poligonali a lati paralleli agli assi contenute in R

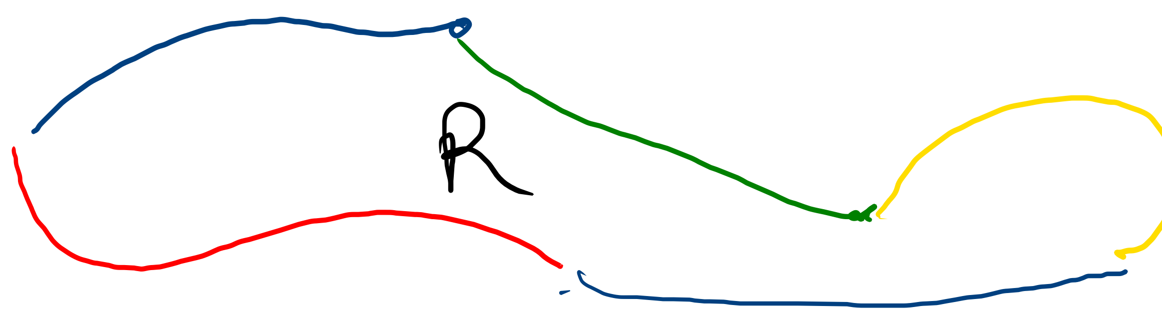
regioni individuate da poligonali con lati paralleli agli assi contenenti R

FATTO

R risulta misurabile se il bordo di R (o la frontiera di R) è costituito da curve

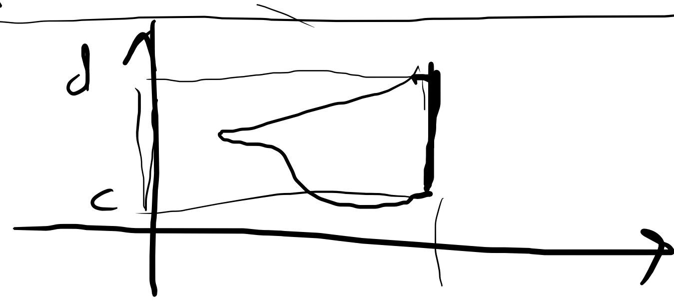
∂R

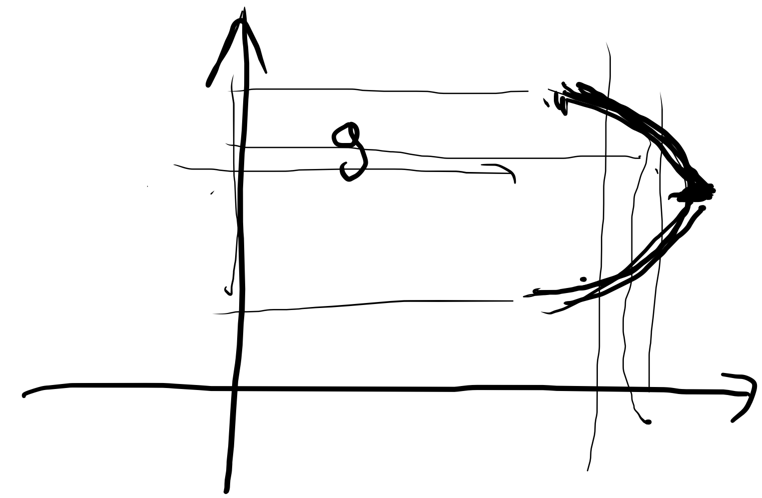
Più precisamente supponiamo che ∂R sia costituito da una (FINITA) unione di curve



In particolare, potremo rappresentare i tratti delle curve che costituiscono il bordo di R (∂R) come grafici di funzioni del tipo $\{(x, f(x)) \quad f:(a,b)\to\mathbb{R}\}$

o $\{(g(y), y) \quad g:(c,d)\to\mathbb{R}\}$



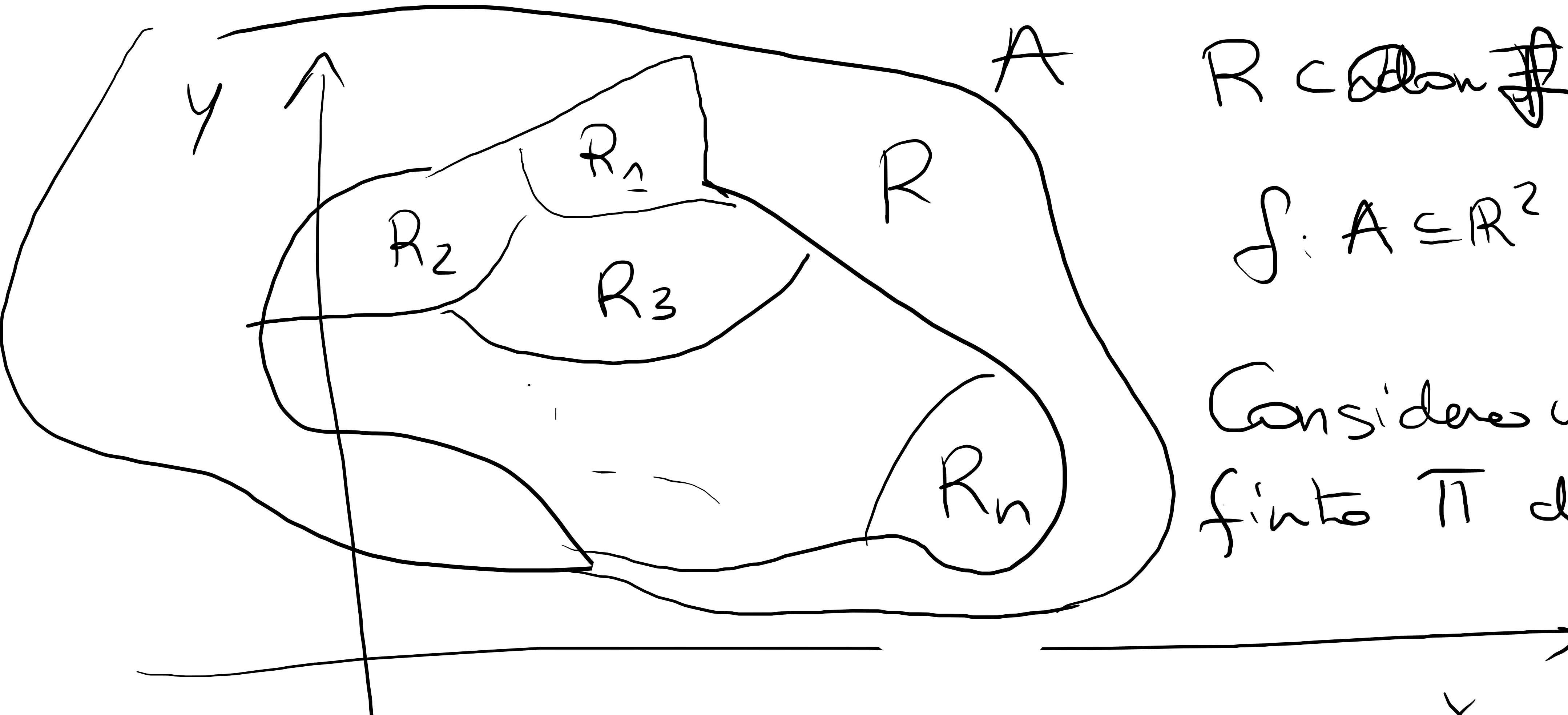


Calcolo quindi le aree delle regioni delimitate da tali approssimanti per difetto e per eccesso della regione R.

Area di ciascuna di queste regioni delimitate da poligonali con lati paralleli agli assi si calcola sommando le aree dei rettangoli (con lati paralleli agli assi cartesiani) in cui si decompone la regione stessa.

Sia dunque R una regione piana limitata e misurabile, il cui bordo ∂R è unione finita di curve che localmente rappresentano i grafici di funzioni reali di variabile reale.

Osse



$R \subset \operatorname{dom} f = A$

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Considero una partizione finita Π di R

$\Pi = \{R_1, \dots, R_n\}$ $R_j \subseteq R$

$\bigcup_{j=1}^{n} R_j = R$ $R_i \cap R_k = \emptyset$

Osserviamo

$$\text{Area}(R) = \underline{\text{Area}(R_1)} + \underline{\text{Area}(R_2)} + \dots + \underline{\text{Area}(R_n)}$$

Supponiamo di considerare

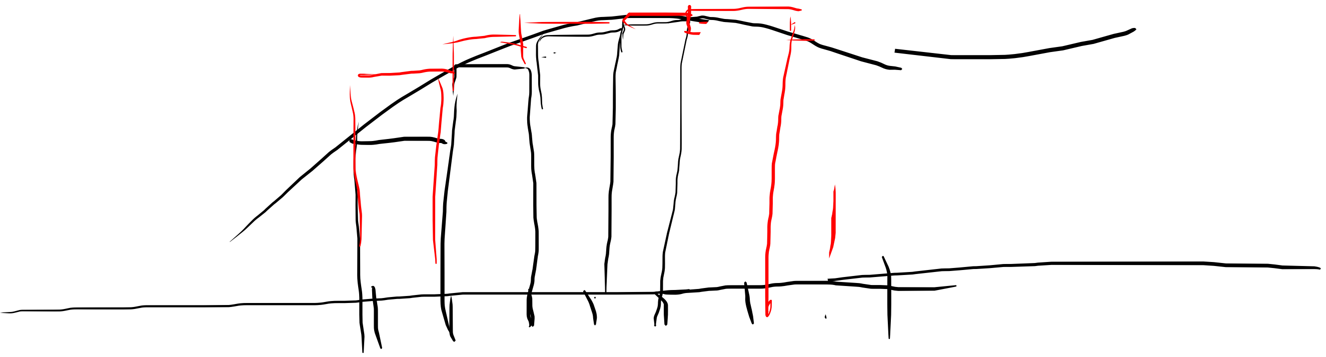
$$f|_{R_j} := f_j$$

$$s_\pi = \sum_{j=1}^{n} \text{Area}(R_j) \inf_{R_j} f_j$$

$$\wedge\!|$$

$$S_\pi = \sum_{j=1}^{n} \text{Area}(R_j) \cdot \underline{\sup_{R_j} \cdot f_j}$$

dato che $\quad \inf_{R_j} f_j \leq \sup_{R_j} f_j$



In analogia al caso della definizione dell'integrale definito di funzioni reali di una sola variabile reale, considerano

$$\sup_{\Pi} \dot{s}_{\Pi} \le \inf_{\Pi} S_{\Pi}$$

decomposizione di R

Def Diremo di $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è

INTEGRABILE su $R \subseteq A$

se $\inf_{\pi} S_{\pi} = \sup_{\pi} s_{\pi}$

e indicheremo tale valore comune

con $$\iint_R f(x,y)\,\underbrace{dx}\,\underbrace{dy} = \iint_R f(x,y)\, dA$$ ← elemento di Area

↖ INTEGRALE DOPPIO di f su R.

Proprietà dell'integrale doppio

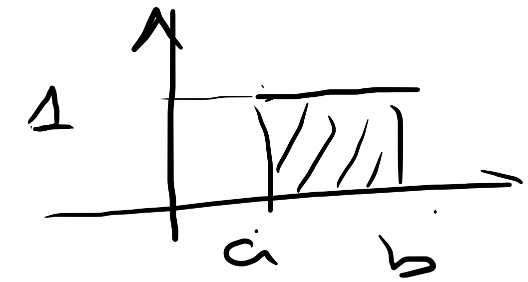
① $$\iint_R c \cdot f(x,y)\,dx\,dy = c \cdot \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

② $$\iint_R \left[f(x,y)+g(x,y)\right]dx\,dy = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy + \iint_R g(x,y)\,dx\,dy$$

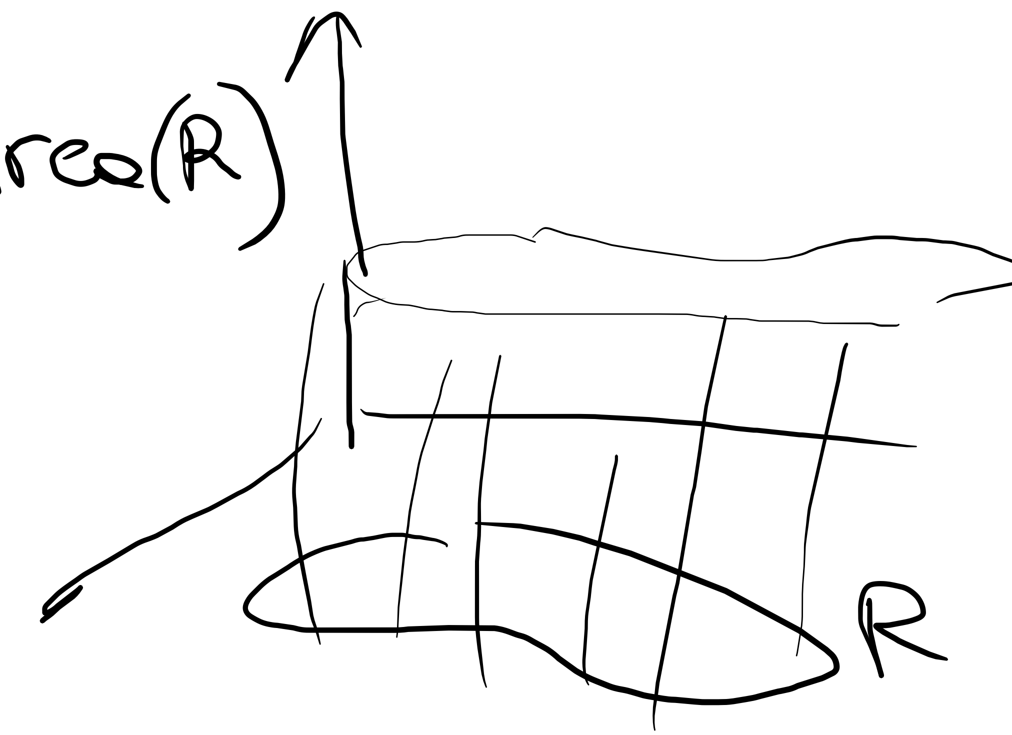
Oss

$$\int_a^b 1\,dx = (b-a)$$

lunghezza del segmento (a,b)

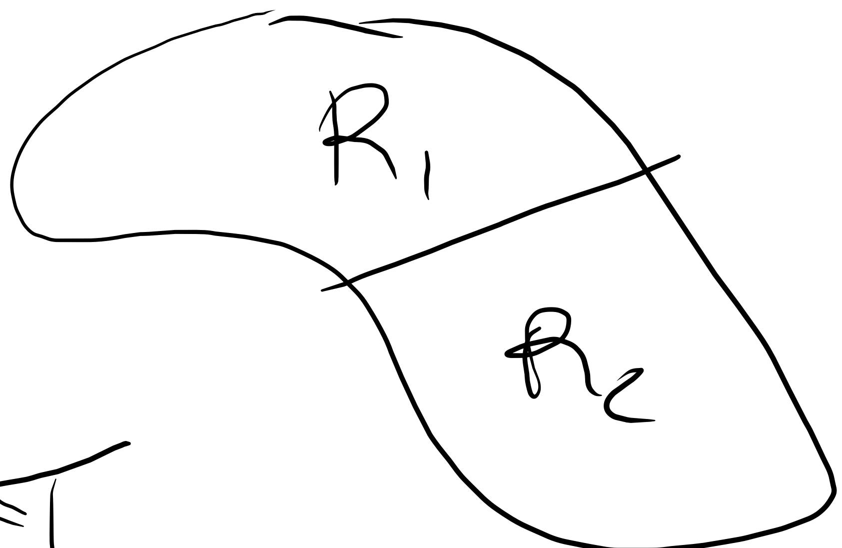


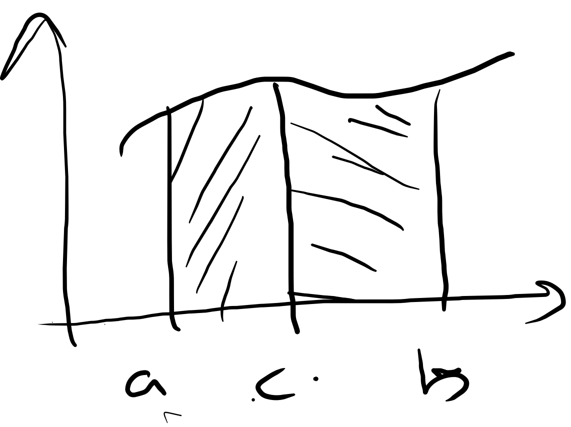
$$\iint_R 1\,dx\,dy = 1 \cdot \text{Area}(R)$$



③ Se $R = R_1 \cup R_2$ con $R_1 \cap R_2 = \emptyset$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{R_2} f(x,y)\,dx\,dy$$





4 Se $f(x,y) \le g(x,y) \quad \forall (x,y) \in R$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_R g(x,y)\,dx\,dy$$

In particolare, ~~dato~~ dato che $r \in \mathbb{R}$, $-|r| \le r \le |r|$, segue che

$f(x,y) \le |f(x,y)|$ e quindi $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_R |f(x,y)|\,dx\,dy$

$-|f(x,y)| \le f(x,y) \qquad -\iint_R |f(x,y)|\,dx\,dy \le \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$

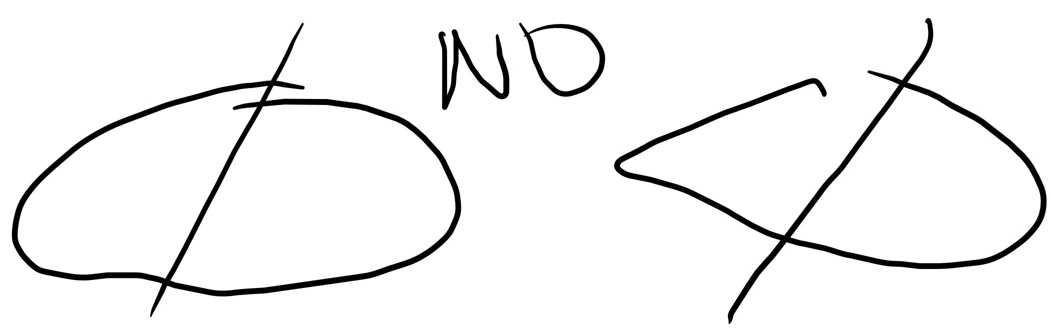
Osservo

$$\iint_R |f(x,y)|\,dx\,dy \geq \left| \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \right|$$

Supponiamo f sia continua in $\overline{R} = R \cup \partial R$

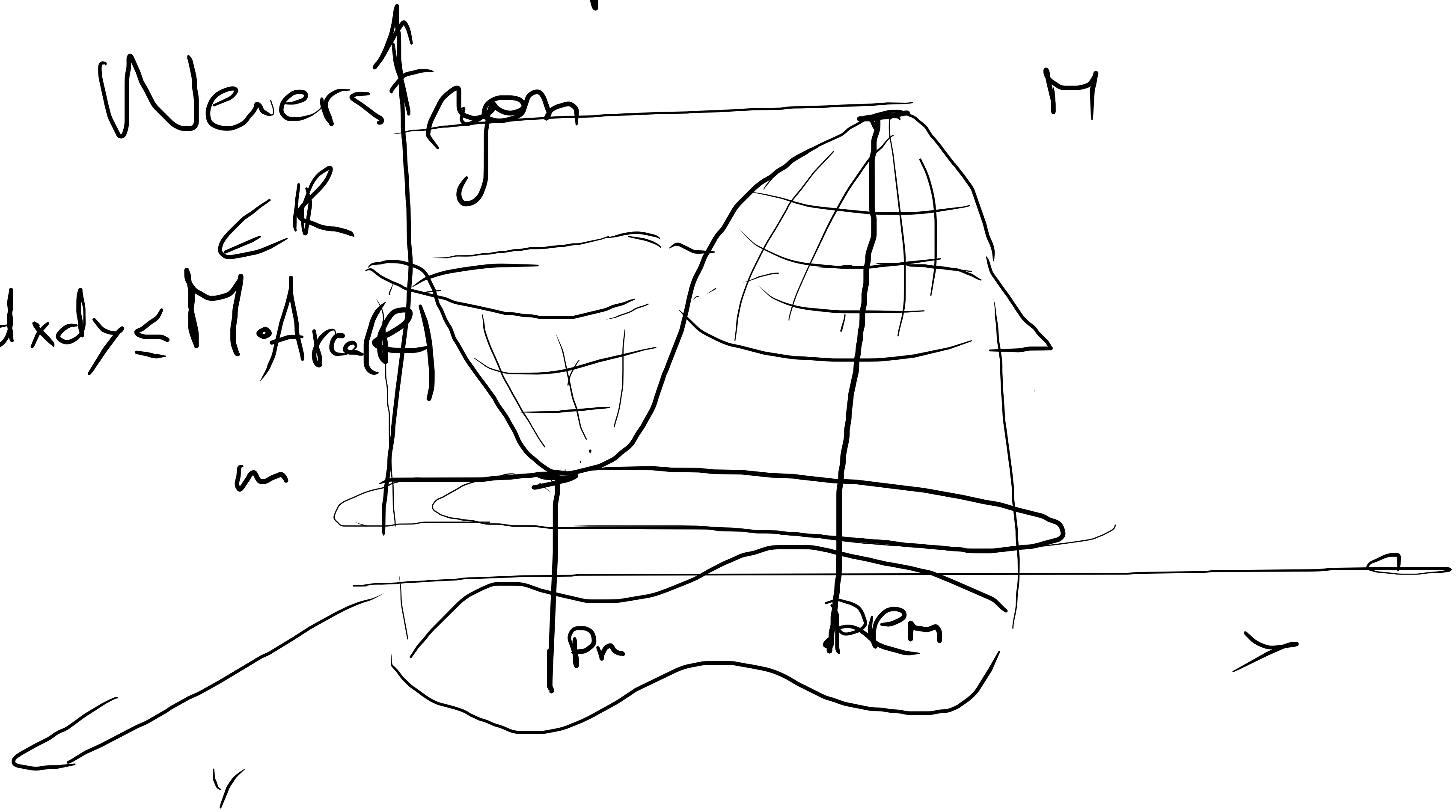
(R regione piana limitata e misurabile)

Supponiamo inoltre che R sia connessa cioè che non si possa ottenere come unione di due regioni disgiunte e non vuote.



$f|_{\bar{R}}$ è dotata di minimo e di massimo per il Teorema di Weierstrass

$$\underset{\in \mathbb{R}}{m} \cdot \underset{\in \mathbb{R}}{\mathrm{Area}(R)} \leq \underset{\in \mathbb{R}}{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy} \leq M \cdot \mathrm{Area}(R)$$



Poiché $\text{Area}(R) \neq 0$, posso equivalentemente scrivere che

$$m \leq \frac{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy}{\text{Area}(R)} \leq M$$

Teorema valori intermedi $\Longrightarrow$ $\exists (x_0, y_0) \in R$ tale che

$$f(x_0, y_0) = \frac{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy}{\text{Area}(R)}$$

Versione 2 dimensionale del Teorema della Media Integrale

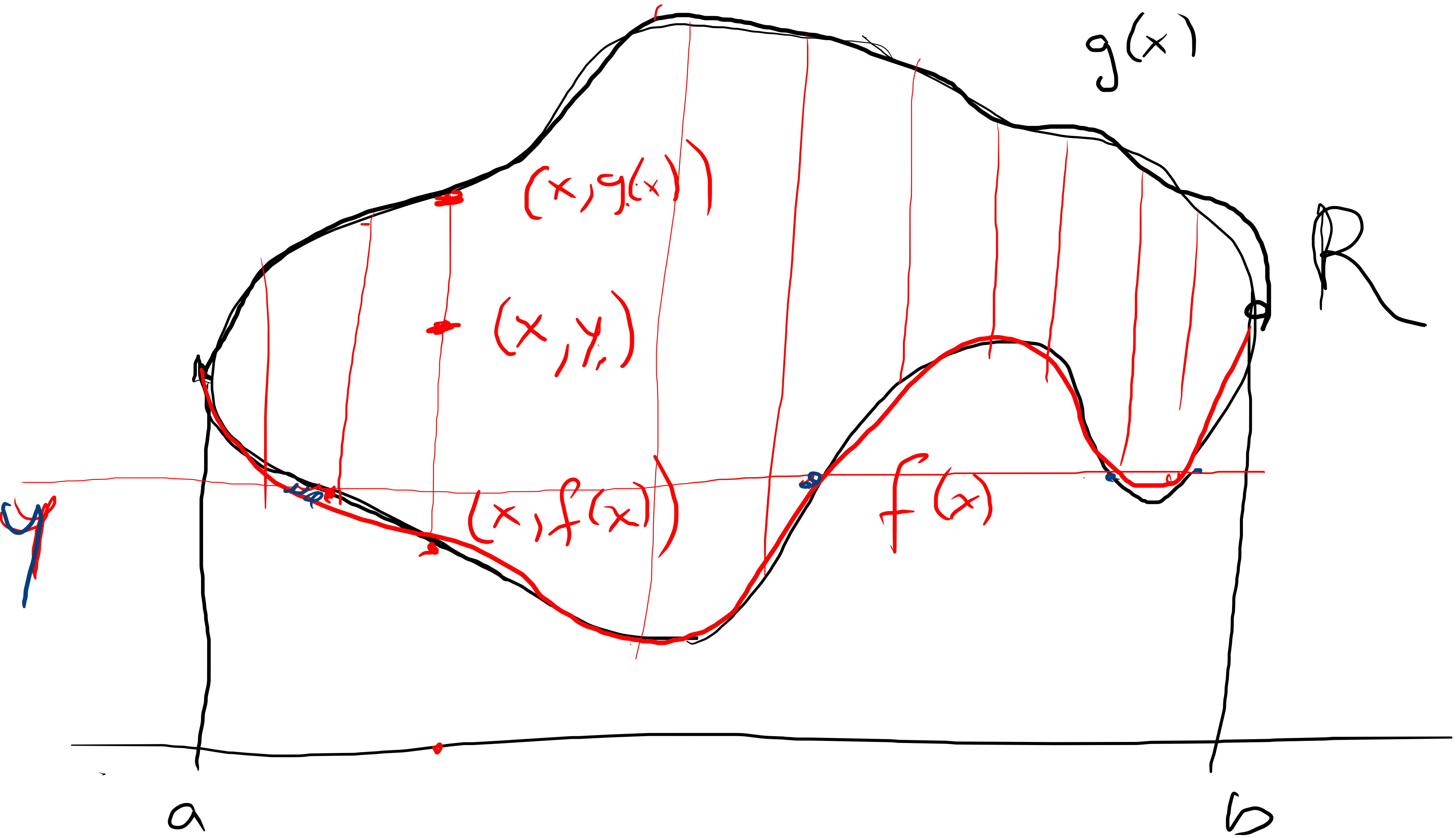
Def Diremo che una regione piana R limitata

è <u>semplice</u> rispetto a y se

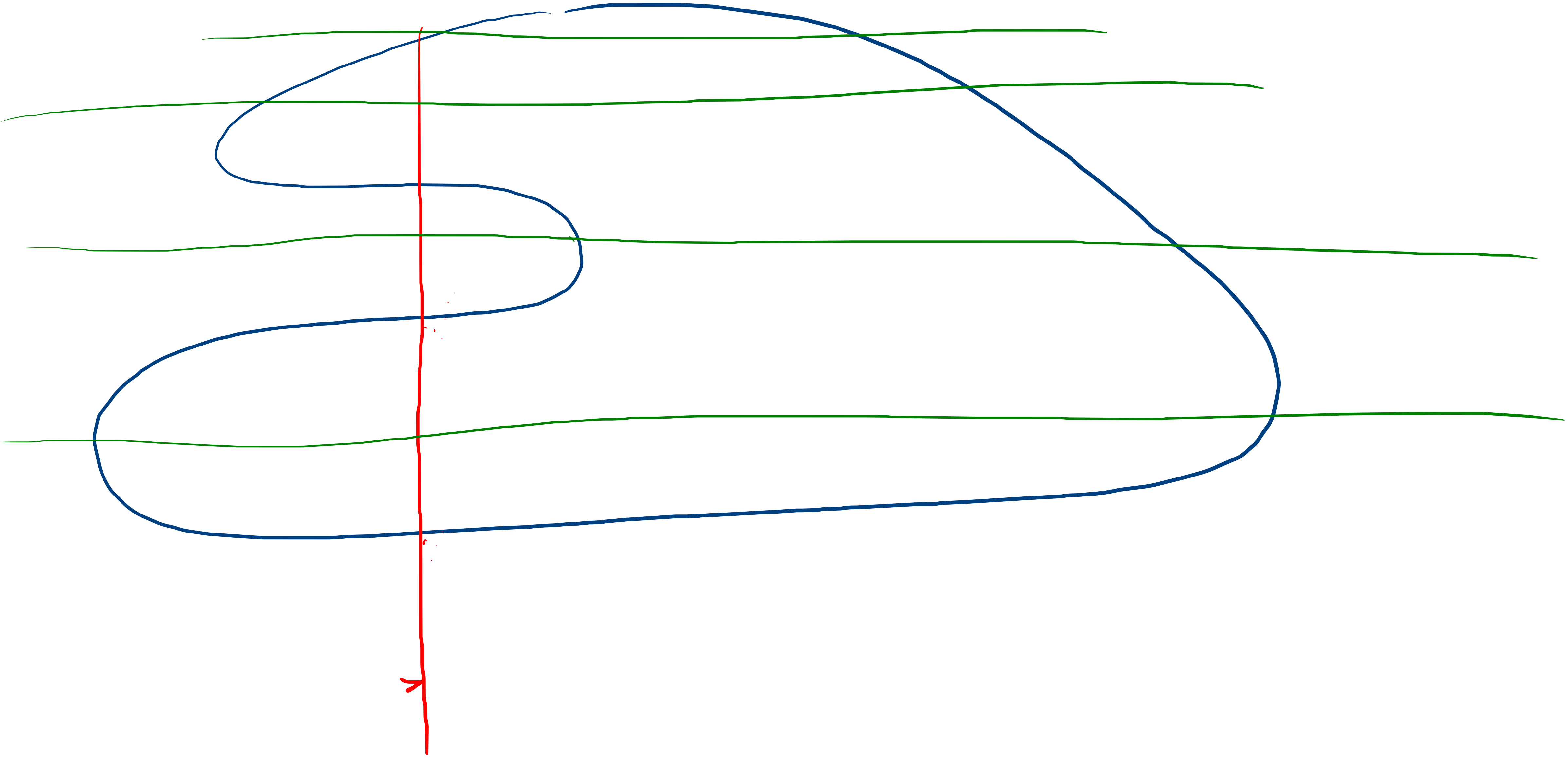
[rispetto a x]

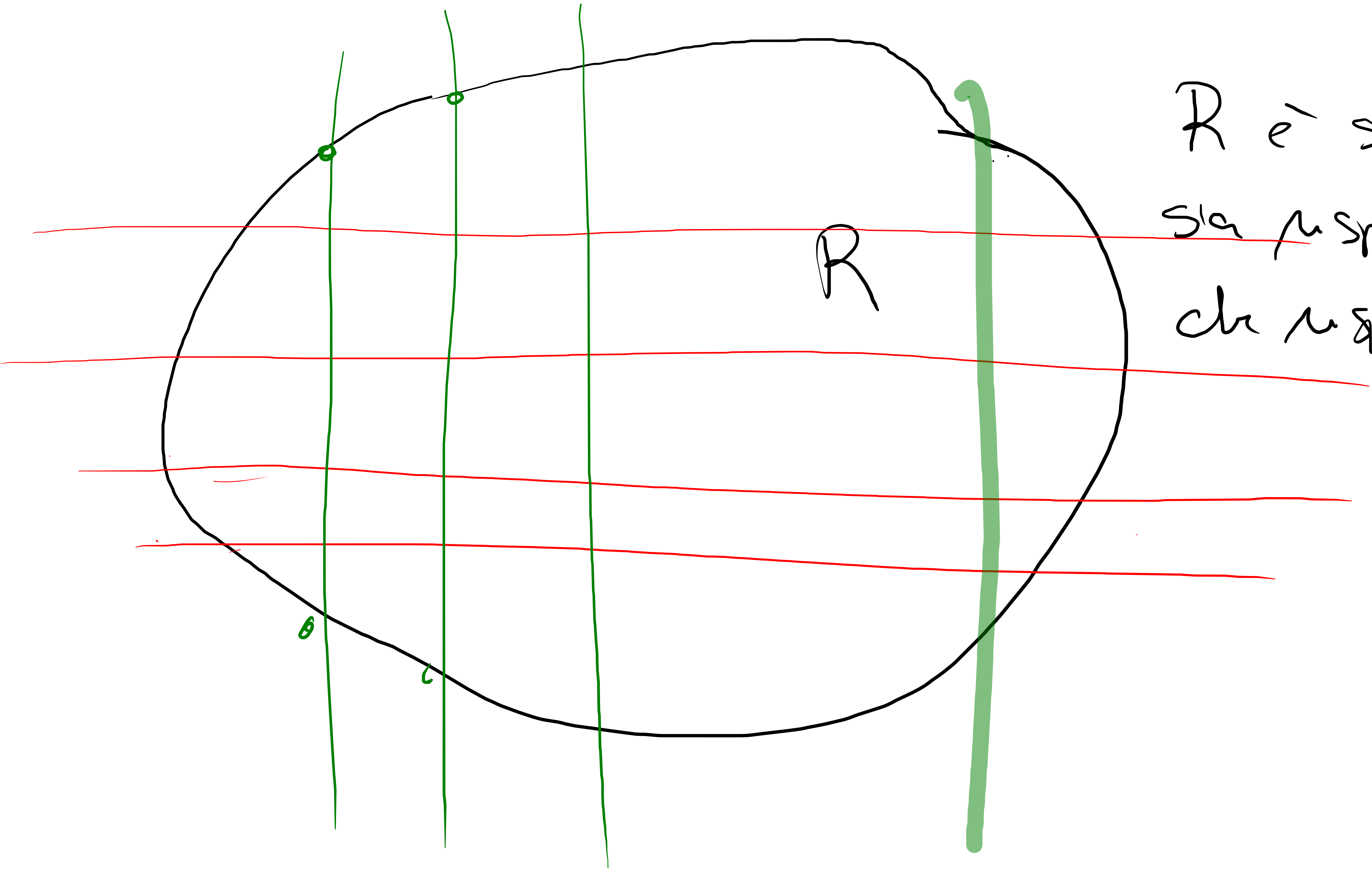
$$R = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x) \le y \le g(x) \quad x \in (a,b) \quad f,g : (a,b) \to \mathbb{R} \}$$

$$\left[R = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(y) \le x \le g(y) \quad y \in (c,d) \quad f,g : (c,d) \to \mathbb{R} \right]$$

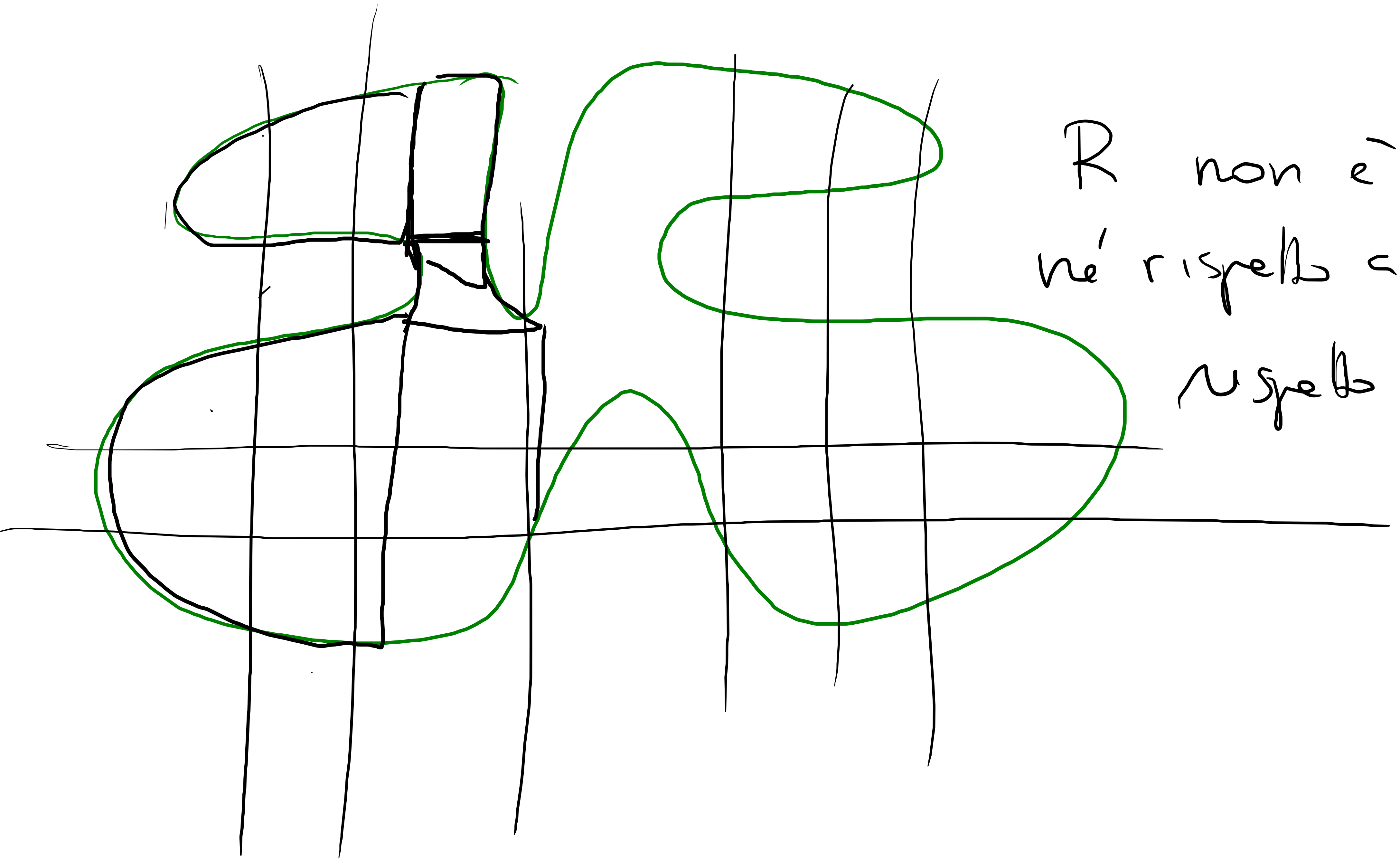


g(x)
R
(x, g(x))
(x, y)
(x, f(x))
f(x)
y
a
b





R è semplice
sia rispetto a x
che rispetto a y



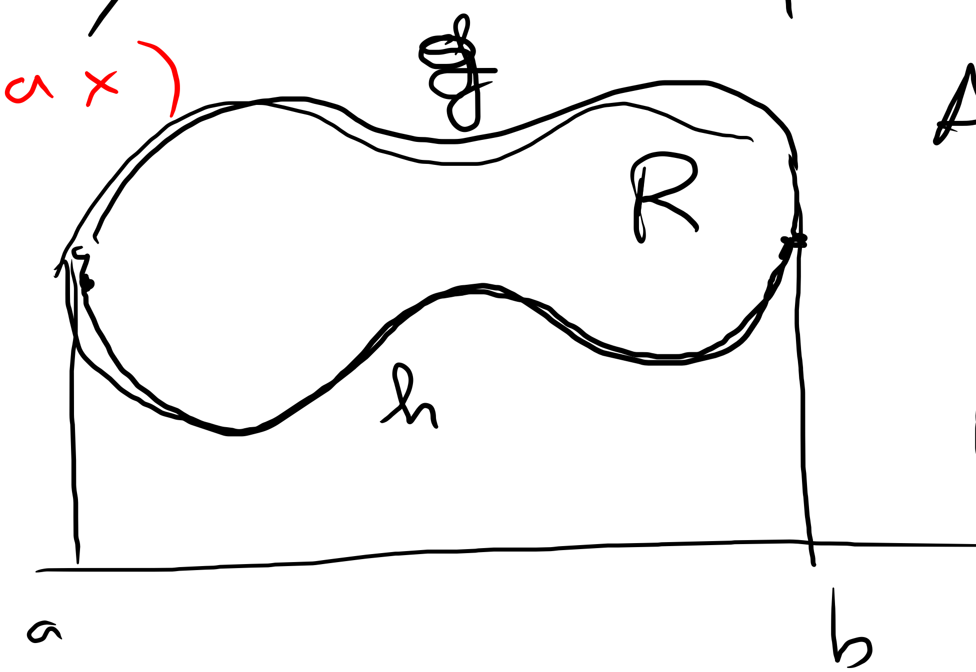
R non è semplice né rispetto a x né rispetto a y.

Se R non è semplice rispetto a x e/o rispetto a y è possibile decomporla in sottoregioni semplici rispetto a x o rispetto a y.

Teorema di Integrazione successiva o di Fubini

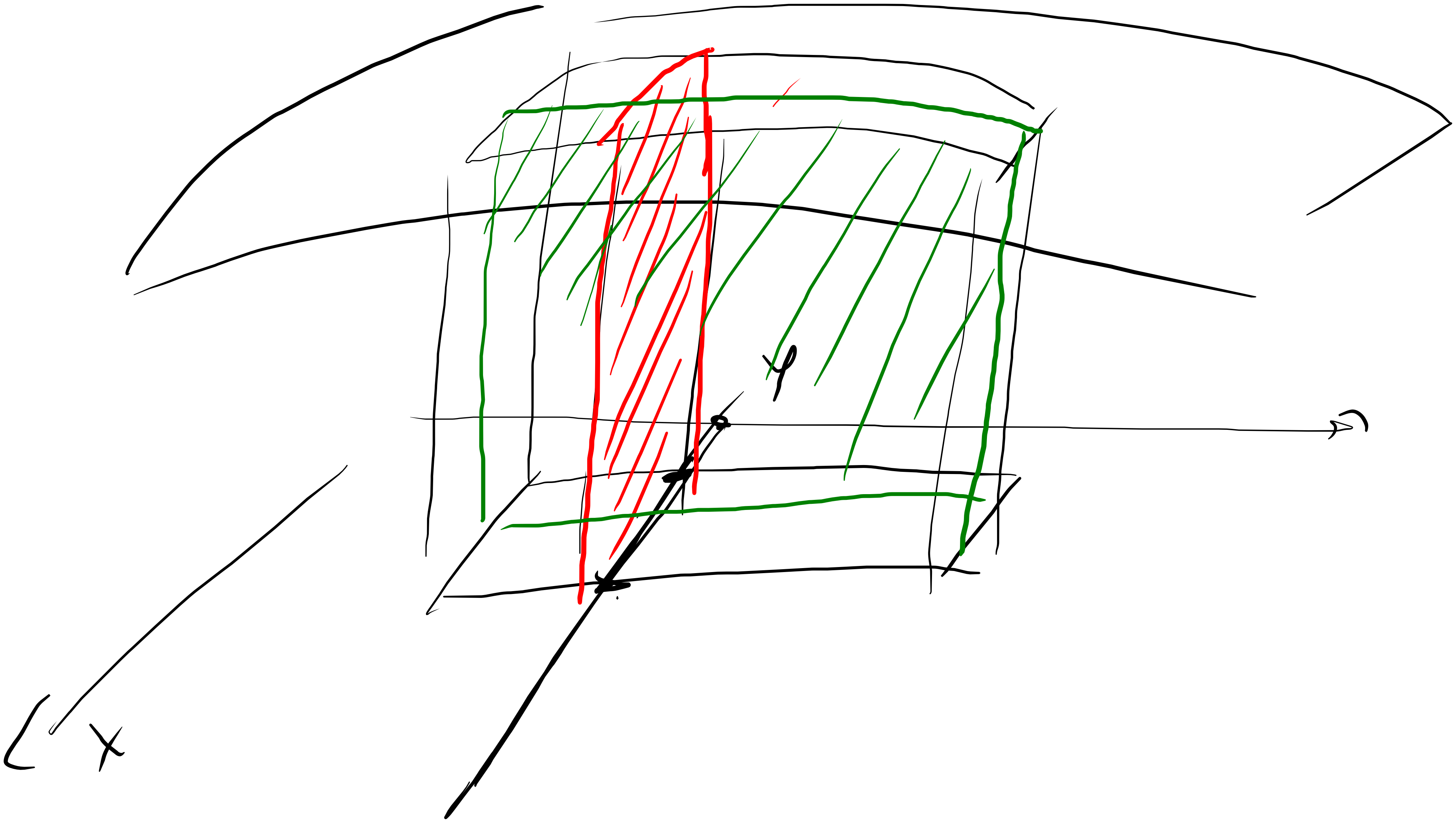
Sia f continua in una regione R semplice rispetto a y $\quad R = \{(x,y) : x \in (a,b)\ h(x) \le y \le g(x)$

(a x)



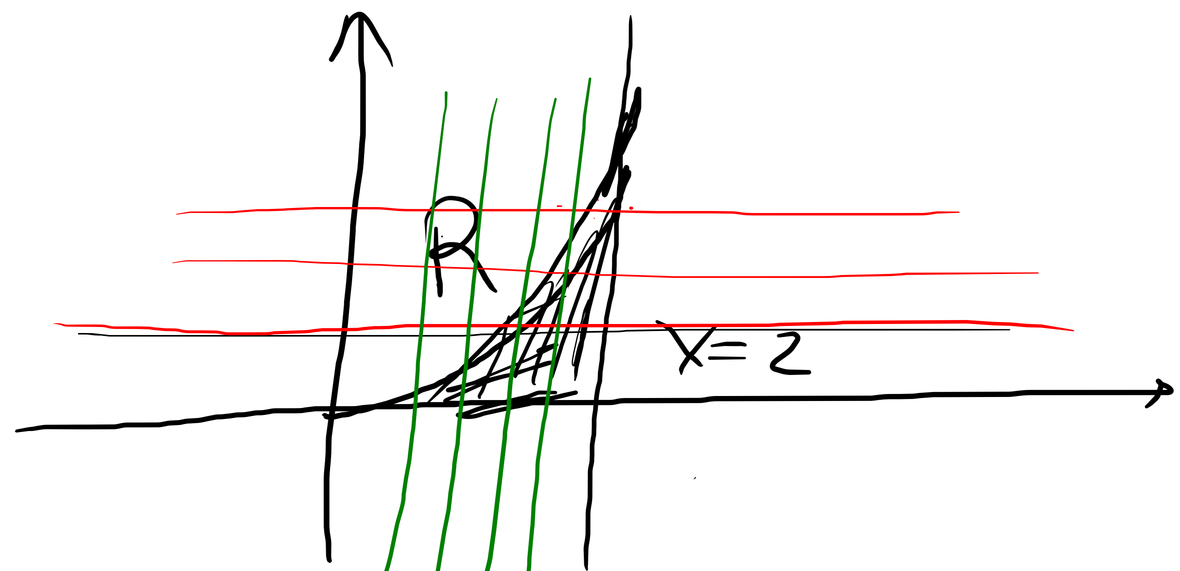
Allora $\quad y \in (c,d) \quad k(y) \le x \le g(y)$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy \right] dx \rightarrow \int_c^d \left(\int_{k(y)}^{g(y)} f(x,y)\,dy \right) dy$$


x

Es

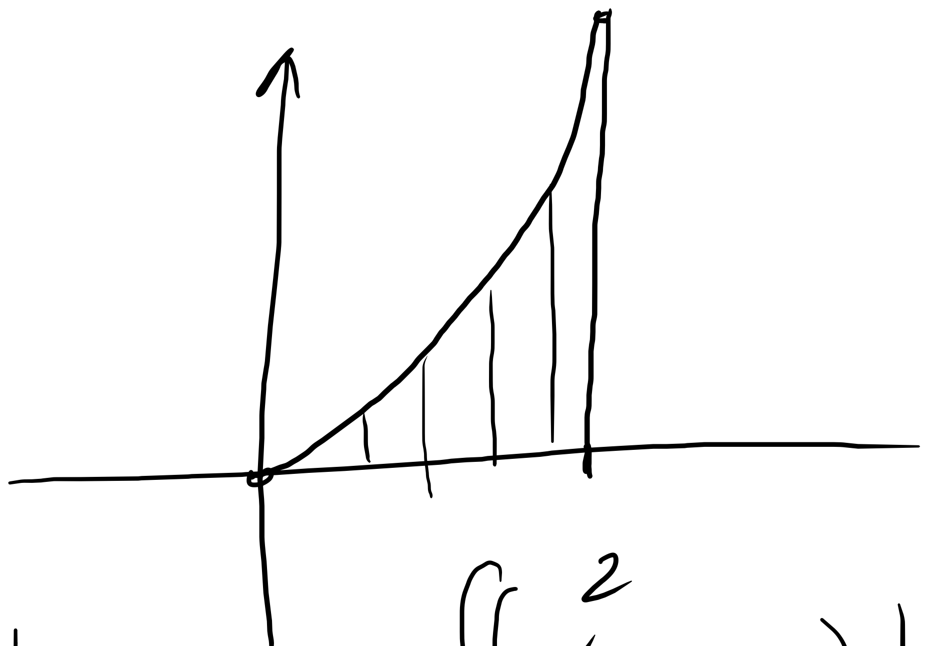
R è la regione di piano delimitata dall'asse delle x, dalla retta di eq. $x=2$ e dalla parabola di eq. $y=x^2$



R è semplice sia rispetto a x che rispetto a y.

$$R = \{ (x,y) \quad 0 \le x \le 2 \quad 0 \le y \le x^2 \}$$

$h(x) = 0 \qquad g(x) = x^2$



$f(x,y) = x^2 + y^2$

f è continua in R ed R è semplice $\Rightarrow$ applico il Teorema di Fubini

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R^{2} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^2 \left[\int_{\bigcirc}^{x^2} (x^2+y^2)\,dy \right] dx$$

$$\bigcirc \quad \int (x^2+y^2)\,dy = \left\{ x^2y + \frac{y^3}{3} + C \right\}$$

infatti $\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y + \frac{y^3}{3} + C\right) = x^2+y^2 \quad \forall C \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{x^2} (x^2+y^2)\,dy = \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{x^2} =$$

applicando il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale alla funzione $f(x,y)=x^2+y^2$ pensata come funzione della SOLA y

$$= x^2y+\frac{y^3}{3}\Big|_{y=x^2} - \left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0} = x^4 + \frac{x^6}{3} - 0 - 0$$

$$\int_0^2 \left(\underbrace{\int_0^{x^2} (x^2+y^2)\,dy}_{x^4+\frac{x^6}{3}} \right) dx = \int_0^2 \left(x^4+\frac{x^6}{3}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21} \right]_0^2 =$$

$$= \frac{2^5}{5} + \frac{2^7}{21} - 0 - 0 = \frac{32}{5} + \frac{128}{21}$$

$$\frac{32 \cdot 21 + 5 \cdot 128}{105} = \frac{\quad}{105}$$